ACTAS:

I SIMPOSIO HISPANO-MEXICANO DE FILOSOFIA

Salamanca, Octubre 1984

Volumen II

LOGICA Y FILOSOFIA DEL LENGUAJE

COMPILADORES:
S. Alvarez, F. Broncano, M. A. Quintanilla

EDICIONES UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
EXCMA. DIPUTACION PROVINCIAL DE SALAMANCA

CARACTERISTICAS TECNICAS Y SIGNIFICACION FILOSOFICA DE UN CALCULO LAMBDA LIBRE

Lorenzo Peña

Introducción

En este trabajo presento algunas consideraciones sobre las raíces, los orígenes y precursores, las características técnicas y las aplicaciones filosóficas de un determinado cálculo λ libre, basado en una lógica no clásica.

En primer lugar, voy a recorrer rápidamente el proceso que lleva de la importante y honda reflexión fregeana sobre las funciones al tipo de sistema que constituyen los cálculos λ y lógicas combinatorias, presentando, en ese trasfondo, el sistema que voy a proponer, pero no directamente, sino a partir de la búsqueda de un sistema con dos características determinadas (a saber: latitud sintáctica cominatoria que permita tratar cada fórmula como un término y viceversa, así como identificación de verdad con existencia) inicialmente en el marco de la propia lógica lásica. Veremos que esa empresa está destinada a traicionarse o superarse a sí misma y nos lleva a la opción por un sistema lógico no clásico sobre cuya base podemos erigir un cálculo λ libre con las características deseadas. Por último esbozaré un esclarecimiento del perfil teorético y, en particular, filosófico del sistema brindado.

En varias referencias bibliográficas citadas al final de este trabajo encuéntranse enfoques y aplicaciones de interés del cálculo λ. No pudiendo entrar aquí en la discusión de todas esas cuestiones, se invita cordialmente al lector a consultar los trabajos siguientes. En (C:1), pp. 129-36, se halla una introducción concisa y clara del cálculo λ. Otra presentación sucinta, de fácil y agradable lectura, la constituye (C:6). Un tratamiento a fondo del cálculo λ con tipos (o sea: no libre) aparece en (C:2) y del cálculo sin tipos en (B:1) y (:2). Sobre las relaciones entre la lógica combinatoria y el cálculo λ nada ha superado la obra de Curry y Feys, (C:3), pero en (F:2) aparece tratado el tema con facetas singularmente cautivantes, aunque a las veces también algo engorrosas. En (R:2), pp. 306-36, aparece una larga y rica discusión tanto sintáctica como semántica, sobre los lenguajes λ-categoriales y las lógicas formulables en los mismos, si bien esa discusión no está exenta de prejuicios que la hacen filosóficamente no esclarecedora en lo tocante al cálculo λ *libre*. Por último, en (M:1), (R:1), (C:4) hállanse discusiones sobre aplicaciones del cáclulo λ -o, en el último caso, de la lógica combinatoria de Fitch, que incluys definicionalmente un cálculo λ- al tratamiento de cuestiones de la lengua natural. En esa misma línea cabe citar la obra de Montague y sus seguidores así como, en una temática similar pero con un enfoque opuesto -por tratarse, esta vez, del cálculo λ *libre*- un interesantísimo trabajo de Fitch, (F:1). Y en otros terrenos, como aplicaciones del cálculo λ a la teoría de computación, existe una amplia bibliografía que me he abstenido de citar.

Frege y la teoría de las funciones

La primera teorización rigurosa sobre las funciones fue hecha, como es bien sabido, por G. Frege. No en balde ha sido la obra de Frege la principal fuente de inspiración del fundador del cálculo lambda, Alonzo Church. Sobre ese influjo y sobre el contraste entre las ideas del propio Frege y las de Church, vide (P:10). (No parece desmentido ese influjo de Frege por la afirmación de Church recogida en (S:2), p. 260).

Frege cimenta toda su ontología en el distingo entre objeto y función. Los objetos son saturados; las funciones, insaturadas. Una función es una (ley de) correlación que proyecta, o envía, argumentos sobre valores. Cuando estos argumentos son objetos, se trata de funciones de primer orden. Objeto es todo lo que no sea función. Luego entran en escena: las funciones pluriargumentales; las funciones uni o pluricategoriales de segundo orden, de tercer orden, etc., las funciones mixtas. Esas diferencias son de naturaleza, son barreras categoriales, no meras diferencias de papel. Cada función tiene un recorrido o curso de valores (un grafo, en terminología actual), que vendría a ser como un conjunto de pares ordenados cada uno de los cuales estará formado por un argumento, o secuencia de n argumentos (para una función n-argumental), y por el valor sobre el que la función en cuestión envíe a ese argumento o a esa secuencia de n argumentos.

En (P:8), secc. I, cap. 12, he escudriñado críticamente toda esa ontología de Frege. Conocidos son los sinsabores y quebraderos de cabeza que para el fundador de la lógica matemática supusieron los correlatos de funciones -o, mejor dicho, los motivos que lo llevaron a la postulación de tales entículos-, los diversos significados de 'existir' según a entes de qué nivel se esté aplicando el verbo y, en general, todo el problema de la inefabilidad a que se ve abocada su teoría si ésta es correcta. Así y todo, Frege había logrado clarificar la noción de función -más allá de la metáfora de 'ente insaturado'- como un ente que toma argumentos y los envía o proyecta sobre valores. Además, uno de sus mayores logros fue el permitir que pudieran funcionar, sintácticamente, como nombres cualesquiera fórmulas y viceversa. Ello se debía a que Frege consideró a los valores de verdad, que según él son los significados de las oraciones, como objetos -en su dicotomía categorial tenían que ser o bien objetos o bien funciones, y le parecía estar claro que no son esto último.

Pues bien, reconociendo esa concepción fregeana de función ¿no cabría identificar a cada ente con una función? ¿Qué inconvenientes se seguirían de ello? ¿No alcanzaríamos así latitudes sintácticas combinatorias insospechadas en el angosto marco de la teoría fregeana? Así se resolverían además todos esos problemas de inefabilidad. Podrán entonces decirse, y hasta con verdad, muchas cosas que, en el estrangulado desfiladero fregeano, no pueden decirse ni negarse porque carecerían de significado y hasta de sentido (lo que acarrea que tampoco tenga sentido decir lo que se acaba de decir y así sucesivamente -salvo como arbitraria convención metalingüística- ya que carecerá de sentido toda dilucidación que se quiera brindar del porqué de ese sinsentido). Claro que, entonces, se yergue el problema de las paradojas, pero -como lo había demostrado Russell- el propio sistema de Frege estaba aquejado por el surgimiento de paradojas, precisamente a través de las extensiones de conceptos -que son los recorridos o cursos de valores de las funciones conceptuales- pues, por obra de ellos, se venían a derogar en cierto modo las barreras categoriales; o mejor dicho: éstas persistían, pero, como a cada función le corresponde su recorrido y al concepto de segundo orden mixto de *caer bajo* le corresponde además el recorrido del concepto *estar veritativamente en* (que es un concepto biargumental de primer orden que envía sobre la Verdad a un par de argumentos, x,z, ssi x es un objeto, siendo z el correlato de un concepto bajo el cual una sombra o proyección- de los planos a primera vista inifinitamente más complejos y variados de las funciones. Eso engendraba paradojas, mas ¿no habría modo de sortear éstas y mantener la proyección? Pero, si es posible mantener esa proyección del plano funcional sobre el objetual, ¿no resulta entonces posible, al fin y al cabo, abolir la frontera categorial entre objetos y funciones y emanciparse de las insoportables trabas inefabilistas que imponía semejante frontera?

Otra dificultad a la que también debía hacer frente el planteamiento de Frege era el deslinde categorial no ya entre funciones de diversos niveles sino, hasta en un mismo nivel, entre funciones de diverso número de argumentos. Entre los muchos inconvenientes que de eso se siguen figuran éstos: 1) lo que tiene sentido afirmar o negar de una función uniargumental como el bañarse no lo tiene de una función biargumental como amar, pues ésta está doblemente insaturada; 2) hay que introducir de golpe una infinidad de categorías de signos del mismo nivel; 3) el sistema formal resulta increíblemente complicado con esa proliferación de categorías -al igual que les su cede a las versiones originarias de la teoría de tipos, no ya a la ramificada sino hasta a la "simple"-; 4) al introducirse, *uelis nolis*, el orden de inserción de los argumentos como un signo suprasegmental más en el enunciado, se mete un signo de una categoría superior, al cual debe corresponder una función también de categoría superior en la realidad, con riesgo de regresión al infinito, quebrantándose con ello los cimientos de la teoría sintáctico-semántica de Frege -pues, por paralelismo, también puediera decirse que la diferencia entre argumento y función es de lugar, o sea de papel, igual que la que se da entre primero y segundo argumento, p. ej., y, si eso desencadena una regresión, no es de naturaleza diferente de la que, como hemos señalado, se desencadena en la propia teoría fregeana por la necesidad, no reconocida por Frege, de insertar un signo colocacional o posicional.

Una última dificultad en la teoría de Frege viene dada por el no reconocimiento de funciones que tomen como valores a funciones, pese a que Frege se ve abocado a tales funciones aun sin quererlo (tales habrán de ser los significados de funciones verifuncionales cuando uno de los argumentos sea una matriz o fórmula abierta en vez de una oración; caso similar es el de un cuatificador, o descriptor, operando sobre una matriz con varias variables libres diferentes entre sí). Mas, si se añaden a la ya frondosa jungla categorial fregeana esas nuevas categorías no sólo se incurre en proliferación superexuberante, sino que surgen problemas ulteriores -aunque similares al ya bien conocido problema de los correlatos de función-, al no poderse significar con una descripción definida *al valor de la función para tal argumento*, si ese valor es una función.

Los orígenes del cálculo lambda

Fue la penúltima dificultad señalada en la sección anterior la que suscitó tentativas de superación que condujeron: por un lado, a la definición de par ordenado en la línea de Wiener y Kuratowski; por otro, a la noción de *aplicación* de Schönfinkel, quien en 1924 sienta las bases de la lógica combinatoria. (Esa noción de aplicación es una generalización de la noción fregeana de tomar como argumento asignando determinado valor: la aplicación permite que el valor sea una función, con lo cual las relaciones n-ádicas serán funciones que proyectan un argumento sobre una función (n-1)ádica). La lógica combinatoria fue desarrollada por Curry en 1930. Independientemente, Church en 1932-3 elabora el cálculo lambda. En 1935 Rosser demostró que una teoría de conversiones lambda como la de Church pero reformada equivalía a uno de los sistemas de lógica combinatoria de Curry. El mismo año, Kleene y Rosser demostraron la delicuescencia del sistema lambda de Church y del más fuerte de los sistemas de lógica combinatoria de Curry. Ese importante descubrimiento puso en claro lo siguiente: los cálculos lambda en su versión ingenua lo mismo que la lógica combinatoria tienen una latitud combinatoria irrestricta: cualquier signo actúa como signo funcional y se aplica a cualquier argumento -todo signo se trata como signo funcional monoargumental-. Esa latitud combinatoria -gracias a la cual esos sistemas escapan a las tres dificultades señaladas en la sección precedente, dificultades que asediaban al enfoque de Frege- es inocua en lógica combinatoria pura, que es un sistema de ecuaciones -dicho de manera algo tosca o simplificada- pero desastrosa en la lógica ilativa, entendiendo por tal una lógica con la regla del modus ponens y con un signo de entrañamiento para el que valga alguna versión del metateorema de la deducción; desastrosa a menos que la lógica en cuestión restrinja suficientemente los principios de conversión lambda.

La evolución ulterior ha seguido varios derroteros. De un lado, y tras varios esfuerzos fracasados igualmente que llevaron a cabo Church y sus colaboradores Kleene y Rosser, Church adoptó en 1941 (vide (C:2)) un sistema de cálculo lambda con tipos, que es el más comúnmente citado y conocido -sus trabajos anteriores sobre el tema son poco accesibles-: cada fbf es de determinado tipo, con dos tipos básicos, o y ι -respectivamente el tipo de las oraciones y el de los individuos-, estipulándose que, si t, t' son tipos, también lo es<t, t'> y que cada variable, lo mismo que cada constante, es de un solo tipo, pudiendo ser reemplazada, sin desmedro de la corrección sintáctica, sólo por signos del mismo tipo que ella. Posteriormente, Church parece desinteresarse del cálculo lambda. Y, probablemente, la razón es que, así desjarretado, el sistema ya no ofrecía ventajas considerables sobre la teoría de tipos, una vez que se había descubierto el ya aludido procedimiento de Kuratowski para evitar la postulación de predicados irreduciblemente poliádicos. Otros autores, como Fitch, elaboran una lógica combinatoria ilativa con el pleno potencial de un cálculo lambda libre pero en el marco de una lógica no clásica sin principio de tercio excluso y, lo que es más, sin la regla irrestricta del modus ponens: la noción misma de demostración se sujeta a restricciones que tienen que ver con cuál haya sido el proceso demostrativo precedente; o sea: la validez inferencial se pone en dependencia de cuál sea el contexto -cosa que puede resultar atractiva desde ciertos puntos de vista, pero que choca con la noción usual de deducibilidad, según lo ha puesto de relieve Geach. Otros autores, como Barendregt, se dedican a la lógica combinatoria pura. Por último, Curry y Feys han elaborado sistemas sólidos de lógica combinatoria o conversión lambda -por ej. su teoría básica de la funcionalidad, expuesta en (C:3), cap.9º- acudiendo a la noción de estratificación, que también va a ser usada en el sistema propuesto en el presente trabajo, aunque con rasgos diferentes, en cuyo análisis no voy a entrar aquí (vide infra las escuetas consideraciones al respecto de la sección 8ª)

La orientación seguida en mi propio planteamiento difiere de la que inspiró a los fundadores de la lógica combinatoria en que, en lugar de querer reducir el cálculo sentencial y cuantificacional a nociones combinatorias tomadas como primitivas, mi enfoque tiene en común con las teorías axiomáticas de conjuntos el partir de un cálculo cuantificacional dado añadiendo sólo un predicado diádico primitivo (en teoría de conjuntos ese predicado es la membría; en mi sistema será el converso: el abarcamiento). Mi sistema es cálculo lambda (libre) y no teoría de conjuntos en sentido corriente porque: 1º) reconoce a cada término -incluidas las variables- como fbf; 2º) expresando el abarcamiento mediante yuxtaposición, de izquierda a derecha, entroniza fbfs como "pq", para cualesquiera fbfs "p" y "q". Pero es teoría de conjuntos el cálculo aquí presentado en el sentido de que considera a cada ente como un conjunto -identifica a cada conjunto con su función característica y, como se verá, todo ente es una función característica así.

Ideas para un nuevo cálculo lambda clásico, dificultades

A lo largo de este trabajo, usamos convenciones notacionales "a lo Church": tanto la yuxtaposición -que expresa abarcamiento- como los functores diádicos son asociativos hacia la izquierda, sin que ninguno ligue más estrechamente que otro, interrumpiéndose la asociatividad hacia la izquierda por un punto reforzante, que hace las veces de un paréntesis izquierdo con su correspondiente paréntesis derecho lo más a la derecha posible. (Cada functor diádico toma, pues, como miembro izquierdo toda la parte de la fórmula desde el último paréntesis izquierdo -o punto reforzante- que haya; y como su miembro derecho a la fórmula más corta que lo siga). La yuxtaposición sí liga más estrechamente que cualquier functor diádico. Los functores monádicos lo mismo que los prefijos cuantificacionales, el descriptor y el abstractor, toman como su alcance la fórmula más corta que los siga. (Así pues, "$\hat{x}px$" equivale a "$(\hat{x}p)x$", no a "$\hat{x}(px)$").

El cálculo lambda que voy a diseñar en esta sección es un cálculo sin tipos (es un cálculo en cuyas reglas de formación no interviene ningún tipo, aunque sí habrá que acudir a tipos para formular un esquema axiomático) pero, a la vez, perfectamente ilativo -en el sentido de que reconoce sin restricciones la validez del modus ponens y esta versión del metateorema de la deducción: si $\Gamma, p \vdash q$ y si en esa inferencia no se usa ninguna regla de la forma $r \vdash \nu r$ donde ν es un operador tal que $\nu(s+s') \nvdash \nu s+\nu s'$, entonces $\Gamma \vdash pCq$(donde, claro está, 'C' es el entrañamiento y '+' es la disyunción).

Mi deseo inicial sería construir un sistema semejante que se pareciera lo más posible al sistema ML de Quine, pero naturalmente, tuviera fbfs que son imposibles en una teoría de conjuntos como ML. Quizá más exactamente lo que trataríamos de hacer sería encontrar un sistema que fuera al cálculo lambda con tipos lo que el sistema Ml es a la teoría russelliana de tipos, es decir, un cálculo en el que -dicho de manera aproximativa y a título de mera sugerencia heurística- pudiéramos probar todo lo que se puede probar en ese cálculo con tipos, asegurando la elementaridad de aquellas funciones cuya matriz característica fuera expresable en ese mismo cálculo. Sin embargo, esa opción no parece viable y deberá ser suplantada por otra más débil, como lo voy a indicar en seguida.

Con vistas a eso, empezamos por dividir a las funciones (y todo ente es una función) en elementos e inelementos, adoptando inicialmente un principio de abstracción del siguiente tenor: EzUx(zx≡.p|$\overline{(z)}$|.ĵx). O, quizá más perspicuamente, fomulamos así el principio *de separación* (pues el principio de abstracción es conyunción del principio de separación con un principio de comprensión o extensión de conjuntos), a saber: Ux(x̂px≡.pĵx).

La fórmula "ĵx" léese: x es un elemento. De momento no definimos de ninguna manera el símbolo 'ĵ', tomándolo antes bien como primitivo. Nuestro principio de extensionalidad nos dirá que "dos" funciones son idénticas ssi asignan el mismo valor a un mismo *elemento*, sea éste el que fuere, o sea: z=z≡Uu(ĵuC.xu=zu). Naturalmente, dado ese esquema axiomático, la identidad debe ser primitiva, no definida. Debemos añadir un axioma de elementaridad, similar al de ML; pero aquí tropezamos con dificultades, pues evidentemente la definición de *estratificación* debe ser diferente en ambos sistemas. Recordamos que habíamos querido poder aseverar la elementaridad de aquellas funciones que puedan ser significadas en un cálculo lambda con tipos. Mas esa opción sería excesivamente liberal y nos llevaría a la catástrofe, a la delicuescencia. En vez de dedicarnos, en este lugar, a un estudio meticuloso de por qué efectivamente esa opción parece inviable, en vez también de ir sopesando y barajando alternativas ligeramente más débiles, voy a optar por un debilitamiento considerable, pero mucho más seguro, consistente en reconocer la elementaridad de aquellas funciones significadas por locuciones cuya traducción a la teoría de conjuntos ML es un término que, demostrablemente, significa en ésta a un elemento. Para ello, introducimos dos tipos inicales: 0 y 1; el primero será el tipo de las oraciones, el segundo el de los individuos. Si s,s' son tipos, también es un tipo <s,s'>. Al tipo <1,0> lo abreviamos como 2; al tipo <2,0>, como 3; al tipo <3,0>, como 4, etc.; cada tipo i (con $i \geq 2$) es identificado con i^1; para $i \geq 2$, $<(i-1),i^n)>$ será i^{n+1} (para $n \geq 1$). Los (únicos) *tipos estratificados* son: 0,1 y, para cualquier j tal que $2 \leq j$ y cualquier n tal que $1 \leq n$, J^n. Diremos que cada variables es una *fórmula atómica* y que la concatenación de dos fórmulas atómicas es también una fórmula atómica y que nada más es una fórmula atómica. Las variables son *fórmulas atómicas mínimas* y las demás fórmulas atómicas son no mínimas. Tanto p como q están *engastadas* en pq; y, si r está engastada en s y s lo está en s', r está engastada en s'; no diciéndose en ningún otro caso que una fórmula está engastada en otra. Hay también que redefinir la noción de *ocurrencia libre*: una fórmula r tiene una ocurrencia libre en s ssi hay al menos una ocurrencia de r en s y hay al menos una variable r tal que al menos una ocurrencia en r de esa variable está libre en s.

Una fórmula "p" está estratificada ssi: 1º) cada variable que haya en "p" está engastada en una fórmula atómica no mínima; 2º) hay una asig nación uniforme de tipos estratificados a todas las fórmulas atómicas que figuren en "p", cumpliendo esa asignación, t, el requisito de que, si "rs" figura en "p", t(r)=<t(s), t(rs)> y 3º) ninguna fórmula no atómica está engastada en otra dentro de "p".

Introducimos, también de momento como primitivo, el operador 'j', con la única indicación de que valga el teorema Ux(jxCjx): todo ente, x, tal que sea verdad que jx es un elemento o ente clasificable. Como lectura de 'jx' brindamos: 'x es un elemento inmanente'. En la sección 6ª veremos qué entes son transcendentes, es decir, no son inmanentes. De momento contentémonos con la indicación de que la existencia, p. ej., no es un ente inmanente (la existencia es x̂x; su inclusión entre los entes inmanentes o la omisión de las cláusulas restrictivas en que figura el operador 'j' en el párrafo siguiente, engendraría aporías).

Sea "p" una fórmula. Entonces una *versión normalizada* de "p" es una fórmula resultante de ejecutar estos dos pasos: 1) reemplazar cada cuantificación "Uxr" que haya en "p" por "Ux($jr^1.jr^2. ... .jr^n$Cr)", donde r^1, ..., r^n son todas las fórmulas que tengan en "r" ocurrencias engastadas (en otras fórmulas) y en las cuales figure la variable "x"; 2) sea p' el resultado de efectuar el paso anterior, a partir de "p": entonces, si q^1, ..., q^n son todas las fórmulas que tengan en p' ocurrencias libres engastadas, reemplazamos p' por: $jq^1.jq^2. ... .jq^n$.p'; esta última fórmula conyuntiva es la versión normalizada de "p". Una fórmula es *normal* ssi es la versión normalizada de una fórmula estratificada.

Armados con estas nociones estipulamos que $j\hat{x}^1\hat{x}^2... \hat{x}^n p$ (o sea: que la relación $\hat{x}^1\hat{x}^2... \hat{x}^n p$ es un elemento) con tal de que haya alguna variable "y" tal que "$yx^1x^2... x^n$.p" sea demostrablemente equivalente a una fórmula normal.

Para completar nuestro sistema necesitamos algún axioma que nos permita deslindar los entes transcendentes de los inmanentes, a fin de que podamos tener asegurada la conclusión de que son inmanentes entes en torno a los cuales ansiamos poder demostrar ciertos teoremas matemáticos. Pero esa complicación la dejamos para la sección 6ª, cuando ya nos encontramos en otra fase de nuestra construcción.

Una dificultad que se nos presenta con el principio de separación es ésta: hémoslo formulado de manera que sea verdadero el valor que el argumento x le asigne la función x̂p ssi es verdad que, siendo x un elemento, p. Mas supongamos que "p" es una fórmula de la forma "x es hijo". En ese caso, x̂p, es la función de ser hijo, función que -es natural suponerlo así- asigna a cada ente el conjunto de sus progenitores. De ese modo x̂pxz querrá decir que x es hijo de z o, lo que es lo mismo, que z es progenitor de x. Sea x = Crisipo. ¿Es verdad que Crisipo es hijo? La respuesta de Frege sería que no: el ser Crisipo hijo, o la filialdad de Crisipo, es el conjunto de sus dos progenitores y eso no es la Verdad ni, por consiguiente, es Verdad. Pero entonces se nos plantea este problema: si el ser (un) hijo Crisipo no es ver dad, no lo será tampoco la conyunción entre la fórmula 'Crisipo es hijo' y otra, con lo que no será verdadero el miembro bicondicional derecho de la instancia correspondiente del principio de separación. Tampoco será entonces verdadero el miembro bicondicional izquiero, si es que el principio tiene vigencia. Pero esa no-verdad ¿es falsedad? Si no ¿cómo hemos de evaluar el bicondicional? Y ¿cómo hemos de entender la vigencia del principio de tercio excluso -sin incurrir en una argucia supervaluacional, cuyos inconvenientes he considerado en otros trabajos? Y, si sí es falsedad, entonces el principio de separación nos hace llegar a la conclusión de que el valor que a Cri sipo le asigna la función de no ser hijo es la verdad (o, si se quiere, es un hecho verdadero). Y similarmente con cualquier otra relación: Crisipo no sería ni hijo, ni padre, ni hermano, ni igual, ni desigual. Y eso que vale de Crisipo valdría de cualquier elemento, con lo cual tendríamos la conclusión -por el principio de extensionalidad- de que cualquier relación sería idéntica a la propiedad vacía. Y desde luego es ésa una conclusión que desea mos evitar a toda costa.

También nos presenta dificultades el esquema de extensionalidad. O, más exactamente, presentaría dificultades si no fuera porque tomamos el signo de identidad como primitivo. ¿Qué pasaría si tratáramos de definirlo de modo usual en teoría de conjuntos o en un cálculo lambda con tipos? En teoría de conjuntos no hay problema, puesto que términos y fórmulas son categorías (y, por tanto, géneros o grupos disjuntos). En un cálculo lambda con tipos definimos la identidad primero para fórmulas de tipo 2 (propiedades de individuos), del modo como se define en teoría de conjuntos; luego se define la identidad para fórmulas de tipo 2^2(relaciones diádicas entre individuos) diciendo que dos entes de ese tipo, x,z, son idénticos ssi asig nan el mismo valor a un mismo argumento (no hay circularidad porque el valor será una propiedad de individuos, y entre propiedades de individuos ya está definida la identidad); similarmente para fórmulas de tipo 2^3, 2^4, etc. Y para fórmulas de otros tipos se procede igual, recursivamente, pues se supo ne siempre definida la identidad entre entes que forman el campo en el que deben estar los valores de la función. De manera que en un cálculo lambda con tipos es viable una definición recursiva de la identidad que entronice el principio de extensionalidad (sólo que pagando el precio de identificar a dos relaciones siempre que cada ente pertenezca a los dominios de ambas si es que pertenece a uno de ellos).

No así en un cálculo sin tipos como el que estamos construyendo; porque aquí las fórmulas o locuciones no tienen tipo, y no hay, por lo tanto, modo de determinar que la definición inicial, el primer paso de la misma se aplique sólo a determinadas fórmulas. Desconocer esto nos llevaría a dificultades como aquella con la que nos topábamos líneas más arriba al dilucidar el principio de separación: identificaríamos diferentes funciones que intuitivamente consideramos diversas entre sí.

Estas consideraciones nos hace, pues, volver la vista a la dificultad ya estudiada con relación al principio de separación: ¿no es más natural decir que sí es verdad (algo verdadero, un hecho verdadero) que Crisipo es hijo, y que es alumno, y que es maestro, y que guarda muchas otras relaciones? En vez, pues, de considerar que el valor que a un individuo le asigna una función relacional es algo falso, consideraremos que es algo verdadero: como hemos identificado ese valor con la propiedad de ser un ente con el cual el individuo en cuestión guarda la relación de que se trate, deberemos considerar que esa propiedad es también algo verdadero. Ello no plantea dificultades, pues nuestro enfoque nos lleva a abolir barreras categoriales entre hechos -o estados de cosas- y entes o funciones: cada hecho es una función y cada función es un hecho.

Ahora bien, ¿en qué consistirá la verdad de una función? ¿Hay funciones falsas? Puédese demostrar, en un sistema como el que estamos delineando que la verdad de una función es un abarcamiento, o sea: $\hat{x}x=\hat{x}\hat{z}(xz)$; pues, por el principio de extensionalidad se prueba que cada ente es idéntico a la función de ser abarcado por ese ente ($x=\hat{z}(xz)$) y, de nuevo por una regla que se deriva a partir del principio de extensionalidad (a saber: $p=q \vdash \hat{x}p=\hat{x}q$), resulta el teorema apuntado: la verdad es el abarcamiento. Así pues, el que una función sea verdadera es que abarque. Claro que podría defenderse que no es lo mismo abarcar (a secas) que abarcar a algo; mas, por la línea de razonamiento que seguíamos pocas líneas más arriba, un ente que guarda una relación ssi la guarda *con algo*. De ahí se deriva, sin embargo, una consecuencia paradójica: la función o propiedad vacía será falsa. Sea '0' una constante falsa (o el resultado de prefijar a una taurotlogía el signo de negación): entonces $\hat{x}0$ será la propiedad vacía. Como no abarca, será una propiedad falsa; si es falsa, podremos escribir delante de la expresión con que se la denota el signo de negación, obteniendo un enunciado verdadero, a saber: $F\hat{x}0$ (donde 'F' es la negación. Esa conclusión es paradójica porque, si añadimos el plausible principio de que lo falso no es abarcado por nada ($Fp \vdash F(qp)$), entonces la propiedad vacía será un inelemento y no nos servirá para los fines a los que está usualmente destinada en teorías de conjuntos y otros cálculos lógicos. ¿Vale, entonces, la pena postular el principio de que lo falso no es abarcado? Aquí hay que introducir, para justificar ese principio (o, en nuestra formulación, esa regla) la tesis de que *ser verdadero es lo mismo que existir*. Un ente es un verdadero ente ssi es un ente real, es decir, existe. Sea '0' una constante sentencial falso o bien el resultado de prefijar el signo de negación, 'F', a una tautología; diremos que 0 no es un verdadero ente, no es real -o sea no existe. Y es un postulado básico de un sano realismo lo que podemos llamar 'principio de realidad': sólo lo real tiene propiedades (para ser esto o aquello hay que ser).

Si verdad es lo mismo que existencia y si es también lo mismo que abarcamiento, entonces existir es abarcar. Conclusión nada sorprendente desde el punto de vista del hombre de la calle, para quien existe una propiedad sólo si ésta abarca algo: existe la generosidad sólo si hay alguien generoso, y así sucesivamente. Sólo que desearíamos poder conservar una propiedad vacía, que no obstante sea efectivamente algo, que exista, pues.

Dejando sin zanjar de momento esa dificultad, vamos ahora a fijar nuestra atención en el destino que le está reservado, en el cálculo en cuya construcción hallámonos empeñados, al signo de identidad que hemos introducido como primitivo. Puesto que, en nuestro cálculo, cada término es una fórmula y viceversa, debemos en general establecer las condiciones de verdad de p=q, para dos fórmulas cualesquiera, "p" y "q", así como postular algunos esquemas axiomáticos que deban tener vigencia irrestricta. Una primera hipótesis sería la de que, si es lógicamente (demostrablemente) cierto que $p \equiv q$, entonces p=q. Pero no podemos aceptar eso, porque, si es verdadero p y si lo es q, entonces $p \equiv q$, aunque suceda que $p \neq q$. (P.ej., tendremos que si $x \neq z$, entonces serán verdaderas o existentes, pero diferentes entre sí, $\hat{u}(u=x)$ y $\ddot{u}(u=z)$). No obstante, algo parece razonable en esta idea: podríamos, en general, esperar que valgan las identidades reticulares siguientes: p.p=p (idempotencia), p.q+p=p (absorción), conmutatividad, asociatividad y distributividad, tanto para la conyunción'.' como para la disyunción'+'. Asimismo, para la negación, 'F', parece razonable postular principios identitarios correspondientes a un álgebra de Stone: si 0 es la Falsedad, definida como "q.Fq" (para un "q" cualquiera), 1 abreviará a F0, teniéndose: FFp.p=p, 1.p=p, 0.p=0, 0+p=p, 1+p=1, F(p+Fp)=0, FFFp=Fp. El problema que ahora se plantea es el de si, definiendo un functor de implicación estrica, 'DD', así: "pDDq" abrevia a "p.q=p", tenemos o no "pDDq+.pDDp". Claramente no. La implicación estricta no es conexa: si lo fuera, entonces, dados dos entes cualesquiera, tendríamos como una verdad afirmable que uno de ellos sería más verdadero (o existente) que el otro; pues, verosímilmente, p.q=p, o sea PDDq, significa que el hecho de que p es a lo sumo tan verdadero como el de que q, ya que la conyunción de ambos hechos es idéntica al primero de ellos: no se ve qué otro sentido intuitivo se podría dar a esa implicación estricta, que establece un orden de prelación cuyo mínimo (o pseudomínimo) es 0 y cuyo máximo es 1

Podría, sin embargo, parecer conveniente tener un functor de implicación no estricta, 'D', que sí fuera conexo en el sentido de que fuera teoremática la disyunción: "pDq+.qDp". Vamos a introducirlo así: en lugar de tomar como signo primitivo a la identidad, tomamos dos signos primitivos (además de la conyunción, '.', la disyunción, '+', y la negación clásica, 'F', con el condicional 'C' definido así: "pCq" abrevia a "Fp+q"); son éstos: un signo de equivalencia, 'I', y otro de afirmabilidad verdadera 'B'. Sentamos los siguientes axiomas y reglas (definiendo "pDq" como "p.qIp"): p.pIp, p+p p.q+pIp, p+q.pIp, p+qI.q+p, p.qI.q.p, p+q+rI.p+.q+r, p.q.rIp..q.r, p.q+rI.p +r..q+r, p+q.rI.p.r+q.r, p.q+rI.p+r..q+r, p+q.rI.p.r.+.q.r, pIqC.qIrI.rIp, F(p+q)I.Fp.Fq, F(p.q)I.Fp+Fq, pDq+.qDp, FpC.pDq, FFp.pIp, pIqC.qCp, B(pDq)C. BpDBq, B(pCq)C.BpCBq, Bp+BFBp, BpIp+FBp, p|— Bp.

La equivalencia estricta o identidad, 'II', es ahora definida así: "pIIq" abrevia a "B(pIq)". Claramente tenemos así un functor de equivalencia (no estricta) satisfactorio, pues es disyuntivamente conexo (o sea: aunque no forzosamente ha de tenerse que o bien "pDq" o bien "qDp" hayan de ser afirmables con verdad, sí habrá de ser afirmable con verdad la disyunción de ambas fórmulas). Tenemos, eso sí, que explicar el functor de afirmabilidad. Ese functor tiene propiedades similares a las del operador de necesidad en S5, con la salvedad de que la regla de Gödel es, en el caso de nuestro functor, no sistémica: p|- Bp es una regla irrestricta cuya validez se explica fácilmente: suponiendo la afirmabilidad verdadera de la premisa, resulta la de la conclusión, a saber: que la premisa es afirmable con verdad. (Pero no valdrá el esquema "pCBp", con lo cual falla el metateorema de la deducción. Sin embargo, el sistema es ilativo en el sentido definido más arriba ya que de "B(p+q)" no se sigue "Bp+Bq"). La introducción de este functor ha sido efectuada *ad hoc*, para, debilitando el functor de equivalencia estricta o identidad de manera que resultara un functor de equivalencia gracias al cual tuviéramos una conexidad implicacional, poder empero restablecer convenientemente, mediante prefijación del functor de afirmabilidad introducido, la equivalencia estricta o identidad (así como la implicación estricta también, claro está). Pero ese functor de afirmabilidad puédese justificar sobre otras bases: en lugar de sostener que en la realidad o bien un hecho es afirmable con verdad o bien lo ha de ser la negación del mismo, podemos contentarnos con sostener un principio más débil del tercio excluso: que es afirmable con verdad la disyunción del hecho con su negación. Eso tiene un aire de supervaluacionismo, pero se puede disipar ese aire o tufo, puesto que lo característico del supervaluacionismo es la tesis de que, aunque carezcan de valor de verdad "p" y "Fp", su disyunción deberá tener un valor de verdad verdadero; en cambio, lo que parece sugerido por la introducción de 'B' es que un hecho puede tener un valor de verdad que sin ser verdadero a secas (afirmable con verdad), no sea tampoco falso, y, en ese caso, si bien "p" -si ese hecho es el de que p- tendrá valor de verdad, no podrá ni afirmarse ni negarse con verdad, por lo cual "Bp" será una oración falsa, mientras que "FBp" será verdadera. La verifuncionalidad puede, pues, quedar asegurada. La introducción de 'B' la justificamos con una visión pluriaspectual de lo real: en la realidad hay *aspectos*, pudiendo algo ser verdadero en ciertos aspectos mas totalmente falso en otros. (Podemos concebir a esos aspectos como "mundos posibles" con tal de que veamos a la realidad misma como englobando a todos esos mundos, o sea: cada mundo está realizado, es un aspecto de la realidad -una faceta, un lado, una esfera de lo real- y sólo es verdadero en sentido fuerte, afirmable con verdad, lo verdadero en todos los mundos-posibles).

Pero, llegados a este punto, nos preguntamos: ¿es de veras clásico este cálculo lambda? Es una extensión conservativa y recia de la lógica clásica, ciertamente (extensión recia porque conserva todas las reglas de inferencia clásicas), pero obviamente ha introducido dos nuevos functores de cálculo sentencial, que son 'I' y 'B' cuyo tratamiento requiere una semántica diferente de la que se postula para la lógica clásica (las álgebras boolenas), un álgebra que resultará de un álgebra de Stone por el añadido de dos operadores, uno topológico, B, y otro equivalencial, I.

Recurso a un cálculo sentencial no clásico

Llévanos el hilo de las consideraciones con que ha concluido la sección precedente a abrazar un cálculo sentencial no clásico (por más que sea una extensión conservativa y recia del clásico) y a desarrollarlo en varios puntos.

Uno de los logros de la sección precedente ha sido el descubrimiento de grados de verdad, si bien tal descubrimiento nos ha venido como de rebote o de soslayo, al dilucidar las relaciones de equivalencia y de implicación. Otro logro de no menos significación ha sido el hallazgo de aspectos de verdad o de realidad. Combinando ambos hallazgos, diremos que a cada ente le corresponde un nivel veritativo o existencial constituido por una secuencia infinita de grados escalares de verdad y/o de carencias (totales) de verdad. Un mismo nivel veritativo puede, naturalmente, estar constituido por grados de verdad muy diversos y aun alejados, según los diferentes aspectos. Tampoco impondremos que para cada aspecto un nivel veritativo deba ser uniforme, o sea que, para cualquier "p", y cualquier aspecto, w, el suceder que p en w deba tener un nivel veritativo uniforme (un único componente escalar infinitamente repetido). Esos niveles veritativos los consideraremos como valores de verdad tensoriales.

Plantéase el problema de si los componentes escalares de esos tensores se dan en número finito o infinito. Si se dan en un número finito, n, entonces para *cualesquiera* n oraciones, p^1, ..., p^n, tendremos como tesis válida una fórmula disyuntiva con n disyuntos cada uno de los cuales será una conyunción de n-1 implicaciones cada una de las cuales tendrá como prótasis a una de esas *n* fórmulas, p^i, y como apósdosis a otra de esas fórmulas, p^j, donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$ pero $i \neq j$. ¿Es razonable suponer que deba forzosamente suceder así para cualesquiera n oraciones? No, porque eso significaría que, para cualquier propiedad dada, habría, en cada caso o aspecto, sólo n grados posibles de ejemplificación de la misma. De ahí se desprendería esto: definamos un functor '%' de sobreimplicación o inferioridad veritativa así: "p%q" abrevia a "pDq.F(qDp)". Tendríamos, entonces, para n+2 oraciones cualesquiera p^1, ..., p^n,q,r, lo siguiente: $p^1\%p^2$. ... $(p^{n-1}\%p^n)$C.Fp^1..qDp^n..p^1Dr. Con que, si hay sólo dos grados de verdad, aparte de la falsedad total, y si Leonardo es menos gordo que Froilán y éste menos que Matías, entonces Leonardo no es gordo en absoluto, Matías es tan gordo que ya más no cabría y, por lo tanto, cualquier cosa implica la gordura de Matías mientras que la gordura de Leonardo implica cualquier disparate.

Si tomamos en serio la empresa de reconocer grados de verdad en nuestro enfoque, será, pues, menester reconocer una infinidad de tales grados. El reconocimiento de esos grados sirve para tratar satisfactoriamente lo difuso, las propiedades y situaciones que, aun siendo reales, lo son sólo hasta cierto punto, no plenamente. Pero esas situaciones pueden darse en escalas aléticas infinitas y hasta innumerables: hay innumerables grados de ejemplificación de propiedades como el color rojo, el hallarse cerca del Polo Sur, la complejidad, el calor, la rapidez, la redondez, la fealdad. Optamos, pues, por articular un sistema cuya semántica característica contenga innumerables grados de verdad.

Otro punto en el que nos toca ahora reflexionar es que, a determinados grados de ejemplificación de una propiedad, correspóndenles sendos grados inversos de ejemplificación (de algún subconjunto) del complemento de la misma: a grados de salud, grados de enfermedad (si Ruperto está más sano que Braulio, éste está más enfermo que Ruperto); a grados de desgracia, grados de felicidad; a grados de severidad, grados de indulgencia; y así sucesivamente. Pues bien, todos los grados son, en el fondo, grados de verdad, grados de la verdad o existencia de la ejemplificación de una propiedad por un ente. Pero a los grados de verdad ¿qué grados inversos les corresponden? Está claro que han de ser grados de falsedad. Sin embargo, a todo lo largo de este trabajo, hasta el punto presente, veníamos suponiendo que la falsedad es siempre falsedad total, que no hay sino una negación, que es negación fuerte o escotiana (o sea, una negación '-' tal que p, -p ⊢q, para cualesquiera "p" y "q"). Si admitimos grados de falsedad, deberemos abandonar esa presuposición o ese prejuicio. Y es justamente dicho abandono lo que vamos a hacer ahora mismo.

Por dos razones. La primera es que parece conveniente poseer una negación involutiva, 'N', tal que, para cualquier "p", valga el teorema: pINNp. Esa negación permitirá la obtención de principios de contraposición implicacional como: pDNqI.qDNp. Para esta negación deberán valer las características del operador unario de un álgebra de Kleene: involutividad (ya vista); De Morgan (p+qIN(Np.Nq)); principio de Kleene (p.Np+q+NqI.q+Nq, o sea: p.NpD.q+Nq). Para los cuantificadores valdrá esta equivalencia: ExNpIN Uxp, siendo 'E' el prefijo del cuantificador existencial y 'U' el del universal. Conectamos las dos negaciones así: FpDNp (pues "Fp" es más fuerte que "Np": 'F' es un functor de negación fuerte o *super*negación, por lo cual la primera fórmula debe leerse en adelante: "Es del todo falso que p" o "No es verdad en absoluto que p", mientras que 'N' es el mero y simple 'no'); y de finimos un functor de superafirmación, 'H', así, "Hp" abrevia a "FNp", debiéndose leer "Hp" como "Es totalmente cierto (=verdadero) que p".

La segunda razón para prohijar esa negación no-fuerte, 'N', es que gracias a ella podemos resolver la aparentemente insalvable dificultad a que nos veíamos confrontados en la sección anterior a propósito de la existencia y el abarcamiento, si queríamos reconocer la realidad de la clase vacía. Si disponemos de dos negaciones, podemos hacer un distingo: no es que la clase vacía -o, sería más exacto decir en adelante, la más vacía de las clases- no abarque en absoluto a elemento alguno: es, sencillamente, que no (con un 'no' que es simple negación, no supernegación) abarca a ningún elemento, aunque también sea verdad en alguna medida que abarca a algún elemento. Esta negación simple es no escotiana; la afirmación de una contradicción en que esté involucrada sólo esta negación simple no tiene por qué acarrear consecuencias catastróficas como la delicuescencia del sistema (un sistema es *delicuescente* si la clase de sus teoremas es idéntica a la de sus fbfs). Sea a la más vacía de las clases. Lo que hemos de postular es que a está incluida en cualquier clase, o sea: Ux,z(axDzs). De esa tesis, que llamaremos *el principio de inclusión* (y que es un poco más que una definición) vamos a sacar dos importantes conclusiones.

La primera conclusión es que tiene que haber un grado ínfimo de verdad (diferente de la falsedad total). (A lo que posea ese grado lo llamaremos: *infinitesimalmente* verdadero; a lo que rebase ese grado lo llamaremos: *un tanto* verdadero). Si no, para cada grado u habrá otro u' tal que u'<u, lo cual es imposible si vale la fórmula implicacional recién escrita y si -como parece certero- suponemos que cada grado de verdad es el grado de ejemplificación de cierto ente por cierta propiedad. (Además, si no hubiera un grado ínfimo de verdad sólo podríamos reconocer la validez de un esquema como el principio de aplicación, "UxpDp|x/z|" sacrificando la introducibilidad de la regla ω -a saber, la que permite concluir "Uxp" de aquel conjunto de premisas que abarca todas las instancias sustitutivas de "Uxp", o sea: a cada resultado de reemplazar en "p" las ocurrencias libres de 'x' por sendas ocurrencias libres de cualquier variable, constante individual u otro término designador -; pues podría haber una fórmula "p" tal que cada resultado de sustituir en "p" las ocurrencias libres de 'x' por sendas ocurrencias de un término designador 'z' fuera una oración verdadera pero más verdadera que otra similarmente obyenida pero escribiendo en lugar de 'z' otro término diferente, y sin que esa secuencia o progresión descendent tuviera límite por encima de 0).

La segunda conclusión del principio de inclusión es lo que llamaremos el *principio de gradualidad*: cada ente ejemplifica, en uno u otro grado por pequeño que sea, todas las propiedades. Sabemos (por la tesis de que sólo existe una función o propiedad si abarca (algo), tesis que defendimos en la sección precedente y cuya postulación suscitaba la paradoja que ahora es tamos resolviendo con el distingo entre negación simple y supernegación) que la más vacía de las clases, a, abarca en alguna medida, siquiera infinitesimal, a algún elemento x. Esa tesis nos lleva al principio de gradualidad si, a la vez postulamos el *principio del declive*, a saber: si u,z son elementos y $\hat{x}p$ abarca a u más que a z, entonces es que es más verdad que $p|\overline{x/u}|$ que no que $p|\overline{x/z}|$. La más vacía de las clases, a, es idéntica a $\hat{x}Fx$ (la función de no existir en absoluto, o de ser totalmetne falso), así como a $\hat{x}F(xIx)$. Sabemos que hay algún elemento que es abarcado por $\hat{x}F(xIx)$. Sea z un elemento tal. Supongamos (como hipótesis) que otro elemento, u, no es abarcado en absoluto por a (es decir, por $\hat{x}F(xIx)$: entonces, en virtud del principio del declive, será verdad esto: $F(uIu)XF(zIz)$. Pero eso es absurdo, porque, siendo $F(zIz)$ una fórmula *absolutamente* falsa, no puede ser más verdadera que ninguna otra fórmula. Luego, por modus tollens, concluimos la falsedad (total) de la hipótesis, o sea: hemos demostrado que u es igual de abarcado por a que lo es z. Y eso para cualquier elemento u. Luego todo elemento u es tan abarcado por a como lo es z, ni más ni menos: todos sólo infinitesimalmente, ya que sólo el grado infinitesimal de realidad o verdad implica a cualquier otro grado de verdad.

¿Y los inelementos? En una teoría clásica, como el sistema ML de Quine, no son (en absoluto) miembros de ninguna clase. En nuestra teoría los inelementos no pertenecerán a ninguna clase ordinaria salvo infinitesimalmente, pero pertenecerán a todas ellas infinitesimalmente (luego veremos -en la sección 6ª- en qué consiste y -en la sección 7ª- a qué se debe esa restricción a las clases *ordinarias*). A este principio de gradualidad podemos también llamarlo 'principio de Anaxágoras'; y, a cualquier sistema en el que sea teoremático: *sistema anaxagórico*. Muchos otros motivos hay para optar por un sistema anaxagórico, pero en este trabajo me abstendré de entrar en ellos.

Para cerrar esta sección debe señalarse que el reconocimiento de un grado ínfimo de verdad nos obliga a introducir un nuevo functor, 'Y', que se lee 'Es infinitesimalmente verdad que'. Pero podemos hacerlo definicionalmente. Introduciremos como primitiva la constante 'a', que significa lo infinitesimalmente real o verdadero, aquello que es, en todos los aspectos, sólo infinitesimalmente existente (alternativamente sería posible definir esa constante así: 'a' abrevia 'Uxx'). "Yp" abrevia "pIa.p". Pero, además de esos símbolos, es menester -o, al menos, sumamente beneficioso- introducir otro functor primitivo: la sobreconyunción, ^, leyéndose "p^q" como "no sólo p, sino que además (o: también) q". Esta sobreconyunción no será idempotente, sino que, para cualesquiera hechos p,q, cuando el grado de existencia de p, /p/, es tal que 0</p/<1 y /q/ es tal que a</q/<Na, se tendrá que /p^q/< /p.q/. ¿Por qué? Porque esta función de sobreconyunción es más exigente que la mera conyunción: es una conyunción insistente, cuyo grado de verdad decrece por interacción de los grados de falsedad de los dos (sobre)-conyuntos.

Este functor nos será sumamente útil para elaborar nuestro sistema, pues con su ayuda se pueden definir otros functores de gran interés (entre otros un functor de aserción fuerte, 'X', que se leerá 'muy', tal que "Xp" abrevia "p^p": el ser muy verdadero algo es tanto más falso cuanto menos verdadero es ese algo, pero, salvo si el algo en cuestión es o totalmente o sólo infinitesimalmente falso, o bien infinitesimalmente verdadero no más, su ser muy verdadero es menos verdad que su ser verdadero a secas).

El cálculo cuantificacional Aq

En esta sección voy a presentar el cálculo cuantificacional *Aq*, sobre cuya base erigiremos en la sección siguiente el cálculo lambda *A*λ. El sistema *Aq* incorpora un cálculo sentencial que responde a los requerimientos que hemos ido perfilando y descubriendo y que posee las características puestas de manifiesto en la sección precedente.

El cálculo cuantificacional *Aq* es una *lógica transitiva*, por ser una lógica de las transiciones, de los estados transitorios o de transición. (Igualmente, el cálculo lambda *A*λ expuesto en als dos secciones siguientes es una *ontología (formal) transitiva*, una teoría de funciones transitiva, porque no sólo incorpora un tratamiento de las situaciones de transición, sino que además postula que en la realidad siempre hay trnsición entre dos situaciones opuestas -por el principio de gradualidad: todas las diferencias son de grado, ya que cada ente es abarcado por todas las propiedades en alguna medida-).

Vamos a utilizar las notaciones siguientes (en lo que sigue en esta explicación, entiéndase que donde escribimos una variable 'x', otra 'y', etc., queremos decir que eso vale para cualesquiere variables con tal de que se mantengan las diferencias exhibidas).

p|$\underline{x}$| hará las veces de una fórmula "p" que contenga al menos una ocurrencia libre de la variable 'x'.

p|$\underline{x/y}$| hace las veces de una fórmula resultante de reemplazar, en la fórmula "p", cuantasquiera ocurrencias libres que haya de la variable 'x' por sendas ocurrencias libres de la variable "y".

p|$\underline{(x)}$| hace las veces de una fórmula "p" en la que no figure ninguna ocurrencia libre de la variable 'x'.

Paso ahora a presentar el sistema transitivo de la lógica cuantificacional de primer orden *Aq*. El sistema *Aq* es el cuarteto ordenado <*Vq*,*Fq*,*Tq*,*Rq*> tal que: 1º) *Vq* es el conjunto de símbolos de *Aq*, es {x,y,z,u,v,...., U,(,),H,B,+,^,I} (Aclaraciones: 1ª) los puntos supensivos indican, en ese caso, que ahí deben figurar las infinitas variables formadas a partir de las cinco indicadas y superescribiéndoles ya una o más comillas, ya uno o más guarismos; 2ª) los paréntesis son símbolos de la notación "oficial" pero las más de las veces serán omitidos -o reemplazados por un punto reforzante- según la convención "a lo Church" expuesta más arriba). 2º) *Fq* es el conjunto de fórmulas de *Aq*, o sea el conjunto de ristras de símbolos de *Vq* (o sea: de miembros de *Fq*) que se generan a tenor de las dos reglas siguientes: i) la constante sentencial 'a' es una fórmula (un miembro de *Fq*); ii) Si "p" y "q" son fórmulas, también lo son entonces: "Uxp" (para *cualquier* variable que se coloque ahí en lugar de 'x'), "pIq", "p^q"; "p†q"; "Hp"; "Bp". 3º) *Tq* es el más pequeño conjunto que abarque a cada instancia de cada uno de los esquemas axiomáticos que figuran más abajo (del A01 al A07) y que esté cerrado con respecto a cada una de las reglas de inferencia de *Aq*, o sea: a cada miembro de *Rq* (a saber: las reglas de la rinf01 a la rinf05).

Antes de pasar a exponer los axiomas (más exactamente: los esquemas axiomáticos) y las reglas de inferencia, nos es menester presentar ciertas definiciones que son, en verdad, meras abreviaciones; (para decir que una fórmula la abreviamos de cierto modo escribimos, primero, entre barras el resultado de la abreviación luego escribimos el signo 'eq' ('equivale' o sea: *abrevia*) y luego, también entre barras, la fórmula que se trataba de abreviar):

/Np/ eq /p†p/   /p+q/ eq /N(p†q)   /p.q/ eq /Np†Nq/   /Fp/ eq /HNp/
/½/ eq /aIa/   /Lp/ eq /NFp/   /0/ eq /½Ia+F(½IN½)/   (Xp/ eq /p^p/
/1/ eq /N0/   /pCq/ eq /Fp+q/   /Sp/ eq /p.Np/   /np/ eq /p^Na/   /mp/ eq /NnNp/
/pDq/ eq /q.PIp/   /p≡q/ eq /pCq..qCp/   /Yp/ eq /pIa.p/   /fp/ eq /FYp.p/
/Kp/ eq /NXNp/   /pDDq/ eq /B(pDq)/   /pIIq/ eq /B(pIq)/ /p&q/ eq /Lp.q/
/p%q/ eq /pDq.F(qDp)/   /p‡q/ eq /F(pIIq)/   /¥p/ eq /np%p&fSp/   /Jp/ eq /FBFp/
/Exp/ eq /NUx(1^Np)/   /Ux,y,z,...,p/ eq /UxUyUz...p/   /Ex,y,z,...p/ eq /ExEyEz...p/

Esquemas axiomáticos

A01 p.qCp
A02 r.sIpC(p†qI.q†s+.q†r)..Bp+BFBLp..BpIp+FBp..pDDq&BoDBq
A03 pIqC(rIqI.pIr)..DXpIp..Yp+Yq+FY(p^q)..fSp.fSqC(p^q%p)..p.qC.p^q
A04 q.p+pIp..Hp.HqILH(p.q)..pIqC(Hp+Hr!H(q+r))..p^qDp..p^1Ip
A05 pINqI(NpIq)..pIpI½..p'.pIqC(q^r^sI.s^r^p..s^p'^r)..¥p.fNqCF¥N(p^mq)
A06 pIqC(qCp)..mpDmn+Hp..mpDnp≡(Yp+YNp)..qDnp+(pImq).Lp+.pDq
A07 Ex(Uxq^p)IUx(Exp^q)..Ux(p^q)D(Uxp^q)..Uxs%r|$\boxed{(x)}$|CEx(s%r)..Uxp.ExqDEx(p.q)
..UxFpDFExp..nr%rCEx(rDExpD.rDp)

Reglas de inferencia

rinf01 (modus ponens) p, pCq ⊢ q
rinf02 (regla de afirmabilidad) p ⊢ Bp
rinf03 (generalización universal) p⊢ q
(con tal de que "q" sea el resultado de prefijar a "p" un número fi-

nito de cuantificadore universales)

rinf04 (cambio de variables) p|- q
(con tal de que "q" resulte de "p" sin más que reemplazar uniformemente cada ocurrencia libre en "p" de cierta variable por una ocureencia libre de otra variable)

rinf05 (variación alfabética) p|- q
(con tal de que "q" resulte de reemplazar una cuantificación que haya en "p" por una variante alfabética de la misma).

El cálculo lambda libre Aλ

El cálculo *Aλ* es una extensión recia del sistema *Aq*. *Aλ* es un cuarteto <*Vq*,*Fλ*,*Tλ*,*Rq*>, donde: 1º) *Fλ* es como sigue: i) cada variable (x,y,z,u, v,x',...,x^1,...) es miembro de *Fλ*; ii) *Fq* está incluido en *F* ; iii) si "p" y "q" son miembros de *F* , también lo son entonces: "pq", "pIq", "p^q", "p+q", "Hp", "Bp" y "Uxp" (donde 'x' puede ser cualquier variable); 2º) *Tλ* es el más pequeño conjunto que, siendo la unión de *T* con el conjuntode aquellos axiomas que son instancias del esquema A08, expuesto más abajo, está cerrado con respecto a cada regla de inferencia perteneciente a *Rq*.

Definiciones ulteriores /qp/ eq /p+a/ /pGq/ eq /B(pCq)/

/ƀp/ eq /B(NpDa&p)/ /ƀ̸p/ eq /Fƀp/ /ƒp/ eq /Bƒp/ /pRq/ eq /ƒpCƒq/

/Xp/ eq /XNpDp&p/ /pçq/ eq /XpCXq/ /p:q/ eq /pçq...qçp/ /ɉ̂p/ eq /Bp&Jƒp.JYp/

/ĵp/ eq /Bp&Fɉ̂p/ /jp/ eq /ƀ̸p.ĵp/ /ɉp/ eq /Bp&Fjp/ /Ẍp/ eq /EuUxB(xIIu≡p|(u)| &u)

/X̂p/ eq /Ux,yEz(xǂyD(xzǂyz.jz)..xNpǂN(xp)Cƀ̸x..ƒxƀyRyx.Ev(p|(v)|G.vIp).. 1pIp..xyǂyx+Op+pOC(ƀ̸x+ƀy)..xDEz(jz.xz).xy.Uz(jz.xzçx+ɉx)&ÿUx(yxǂg(ĵx.p|(y)|) C.ĵx.ƀy+ƀx/

gp: Es cierto o punto menos que p.

xz: [Existe] el abarcamiento de z por x = x abarca a z = z ejemplifica (= pertenece a x = el valor que al argumento x le asigna la función z;

Xp: Es apreciablemente cierto (= verdadero) que p;

ƀp: El hecho de que p es un ente transcendente (= un ente infinito);

ƀ̸p: El hecho de que p es un ente inmanente (= ordinario = finito);

ĵp: El hecho de que p es un inelemento (= un ente inclasificable = un ente garbulloso);

jp: El hecho de que p es un elemento (= un ente clasificable);

ƒp: El hecho de que p es indesdeñablemente real;

Ẍp: [Existe] el [único]ente tal que p;

X̂p: [Existe] la clase de los entes, x, tales que p = la propiedad de ser un ente, x, tal que p = la función que a un argumento x, le asigna como valor el hecho de que p.

Para formular nuestro nuevo esquema axiomático definimos la noción de *fórmula normal* como en la secc. 3ª (con la salvedad de que *ahora* el functor 'j' y el functor 'ĵ' están bien definidos).

Esquemas axiomáticos

A08 ĵx̂(yDx&x)+ɉy.ĵx̂^{1}x̂^{2}...x̂^{n}s.x̂p..rp%rq+(pr%qr)C.p‡q (con tal de que haya una variable "v" tal que: "vx^1...x^n.s" sea demostrablemente equivalente a una fórmula normal).

Téngase en cuenta que, en la cláusula que restringe el esquema axiomático A08, 'es demostrablemente equivalente' se entiende ahora -a diferencia de como lo hacíamos al comienzo de la secc. 3ª- como referido al functor de equivalencia 'I', o sea: "p" es demostrablemente equivalente a "q" ssi la fórmula "pIq" es un teorema.

Algunos esquemas teoremáticos demostrables y reglas de inferencia derivables en Aλ

x̂p: Existe la propiedad de ser un ente tal que p. (Principio de comprensión)

x̌pIIžp|$\overline{x/z}$| (Extensionalidad del prefijo descriptor).

x̂pIIẑp|$\overline{x/z}$| (Extensionalidad del prefijo abstractor -ésta es la regla de conversión α de los cálculos lambda ordinarios).

Ux(xIIẑ(xz)) (Regla de conversión η de los cálculos lambda ordinarios

pIq |- x̌pIIx̌q (Regla de monotonía para la equivalencia en relación con el prefijo descriptor).

pIq |- x̂pIIx̂q (Esta regla, derivable de la anterior, es la regla ξ de los cálculos lambda ordinarios).

yxIzx |- yIIz (Una regla de extensionalidad, llamada regla ζ).

Uz(ƀz&(/bx̂p+ĵz)C.x̂pzIIg(ĵz&p|$\overline{x/z}$|)): Todo ente z es tal que: si, siendo z un ente finito, o lo es también la propiedad de ser tal que p o, si no, el propio z es un elemento, entonces esa propiedad abarca a z en la medida en que sea cierto o punto menos que, siendo z un elemento, p|$\overline{x/z}$|. (Este es el *principio de separación*, aunque, en un sentido más estricto, es su apódosis no más lo que se denominaría en rigurosa puridad 'principio de separación').

x̂FxIIa: La propiedad de ser totalmente inexistente es lo infinitesimalmente real.

UxY(ax): lo infinitesimalmente real abarca a cada ente infinitesimalmente no más.

pIIqC.prIIqr..rpIIrq: Si dos hechos son idénticos entre sí, también lo son sendos abarcamientos de ambos por un tercer hecho dado, sea el que fuere. (Principio de indiscernibilidad de los idénticos).

Ux,x(xz): Cada ente tiene todas las propiedades (Principio de gradualidad).

Ux,y(Uz(jzC.xzIIyz)C.xIIy): Si "dos" entes son tales que es afirmable con verdad de cada elemento inmanente que éste es abarcado por ambos en la misma medida, entonces esos "dos" entes son idénticos. (Principio de extensionalidad).

F(Op+pO): Lo absolutamente falso no abarca, en aboluto, a hecho alguno ni es abarcado, en absoluto, por hecho alguno.

p|$\underline{(v)}$|CEv(vIp): Si es verdad que p, entonces hay algún ente equivalente al hecho de que p.

Bp|$\underline{(v)}$|CEv(vIIp): Si es afirmable con verdad que p, entonces hay un ente idéntico al hecho de que p.

III$\hat{x}$x: Lo absolutamente real es la existencia.

Algunas consideraciones filosóficas

El rasgo principal de nuestro planteamiento es llevar a sus últimas consecuencias la demolición de barreras categoriales, asegurando así la univocidad del verbo 'existir' y superando las dificultades a que había conducido el sacrificio de esa univocidad (problemas de inefabilidad de la teoría en Aristóteles, Frege, Russell, Wittgenstein, Bergmann, Hochberg y otros autores: todos los (pluri)categorialistas). Mientras que en lógicas combinatorias y cálculos λ libres de cuño clásico surge el problema de que no se sabe dar una lectura a determinadas expresioes del sistema formal en cuestión, en nuestro enfoque siempre está al alcance de la mano la lecutra, en virtud de la identidad entre verdad y existencia y entre cada ente y su existir.

También nos permite este planteamiento brindar pautas interesantes para hallar representaciones de estructura profunda semánticamente motivadas de muchas construcciones del lenguaje corriente que han constituido quebraderos de cabeza para enfoques clásicos desniveladores (pluricategorialistas). Uno de esos casos es el de las oraciones y otras expresiones nominalizadas. Se dicen cosas como que Cándido tuvo que optar entre Anabela y montar en bicicleta, que los obstáculos que impiden el progreso del Togo son Eyadema y su aferramiento al poder, y muchas otras aserciones en las que se colocan sintácticamente en el mismo plano una locución nominal indiscutible y el resultado de nominalizar una oración o una locución de otro tipo. Un desnivelacionista o categorialista tendrá que acudir a artilugios para dar cuenta de eso; p.ej., a correlatos a lo Frege, que son artificiales y también erizados de dificultades propias.

En nuestro planteamiento no suscitan esos casos dificultad alguna, ya que cada ente es una función y cada función es un hecho, y cada hecho es una propiedad y también una relación diádica, triádica, tetrádica, etc. Hay que ver, no si un ente es una relación n-ádica, sino si está, en conexión con determinados entes y en determinada situación, jugando un papel de tal función o no (las diferencias categoriales son aquí reemplazadas por diferencias de papeles, pese a lo imposible que ello le parecería a Frege).

Así, frente a otros enfoques hoy en boga, como el de Montague, un tratamiento de la lengua natural basado en nuestro enfoque puede abrir cauces a la comprensión de fenómenos rebeldes y reacios a las delimitaciones categoriales (no sólo los indicados, sino también los bien conocidos problemas de verbos con adicidad variable, que tanto abundan en un idioma como el castellano, y que sólo artificialísimamente pueden ser tratados en un enfoque desnivelador clásico).

Cabe también señalar que, si en $A\lambda$ se permite que los entes garbullosos o inclasificables (inelementos) pertenezcan más que infinitesimalmente a clases que sean entes transcendentes, ello es porque, para cualquier ente, $z=\hat{x}xz$, o sea el abarcamiento de z por la existencia. De donde se sigue que, si z,u son inelementos y si los inelementos no pertencieran en medida suprainfinitesimal a clase alguna, entonces resultaría forzosamente que $z=u$, o sea: sólo habría un único inelemento; lo cual acarrearía aporías insalvables. Por la misma razón, en una extensión modal o temporal de $A\lambda$ en que se considere a los mundos posibles o a los lapsos temporales como conjuntos de cuanto en ellos suceda habrá que identificar a cada uno de esos mundos o lapsos con un ente transcendente, permitiendo que abarque suprainfinitesimalmente también a inelementos.

La identificación de verdad con existencia es una de las tesis más firme y convincentemente defendibles de las que forman este enfoque. Cuando es verdad que p, entonces es real el hecho de que p, o sea: existe algo, algún ente, (la existencia d) el cual es equivalente a ese hecho. En nuestra teoría las variables toman como campo de variación al formado por sólo los entes existentes en todos los aspectos (aquellos cuya existencia es afirmable con verdad), ya que son los únicos cuya existencia es realmente real, o verdaderamente real, es decir, afirmable con verdad. Por razones que sería largo de explicar -pero que se resumen en la necesidad de decir de un mismo ente que existe en dos aspectos diversos (lapsos, mundos o lo que sea) de lo real- cabe descartar alternativas imaginables como la de que el campo de variación varíe de aspecto (de lapso a lapso, o de mundo-posible a mundo-posible). Y tampoco conviene incluir en el campo de variación de las variables a entes que en algunos aspectos carezcan enteramente de existencia, pues se perdería el teorema, sin duda correcto, de que todo ente existe.

Un rasgo de nuestra teoría digno de ser realzado es que, a tenor de la misma, todo ente es una relación: $Ux(xII\hat{z}\hat{u}(xzu))$: es un teorema de fácil demostración. Ese teorema se explica como sigue en el marco de nuestro enfoque filosófico: dividimos a los hechos en *transeúntes* *intranseúntes:* los primeros son significados por oraciones con sujeto y verbo transitivo pero sin complemento directo (podemos incluir verbos intransitivos seguidos de preposición que indique rección, pero eliminando la locución nominal que vaya a constituir el régimen del verbo); los segundos son los demás hechos. Un hecho transeúnte, h, es el conjunto de las cosas sobre las que recae ese hecho, es decir, el conjunto de objetos significables con expresiones que cabe añadir a la oración que signifique a h como sendos complementos directos. A un hecho intraseúnte lo identificamos con un conjunto que se abarca a sí mismo. Supongamos que x es un conjunto usualmente considerado como no relacional :p. ej. la propiedad de ser ágil. Entonces x es la relación que un elemento ordinario cualquiera, z, guarda con el hecho de que z pertenece a x -en el caso considerado, la relación entre un elemento, pongamos Román, y la agilidad de Román.

Sucintas consideraciones comparativas

Pondré broche final a este ensayo con unas pocas puntualizaciones comparativas entre el presente tratamiento y otros enfoques y modelizaciones de cálculos lambda. Huelga decir que una divergencia radical estriba en que, a diferencia de los planteamientos corrientes en las investigaciones de cálculos lambda, el enfoque aquí propuesto es fuertemente no clásico, paraconsistente (tolera lógicamente la contradicción) e incluso positivamente contradictorial.

Con respecto a la teoría básica de la funcionalidad expuesta en (C:3), cap. 9º, las diferencias más salientes que cabe señalar son: en ese enfoque se mezclan los planos del sistema mismo y de la asignación epiteórica de tipos, por un procedimiento que viene a consistir en suplantar el modus ponens por una regla que sirve a la vez de regla de inferencia en el sistema y de regla de asignación de tipos, de tal manera que se deduzcan los tipos de las conclusiones a partir de tipos asignados a las premisas. Ciertos axiomas asignan tipos a los combinadores primitivos, viéndose asignado cada combinador una infinidad de tipos que comparten una misma estructura (ese sistema es una teoría *sintética* de combinadores equivalente a un cierto cálculo lambda: los combinadores equivalen, pues, a determinadas funciones cuya matriz es una fórmula atómica y cuyo prefijo abstractor es una ristra de variables con sendos acentos circunflejos encima). No hay ninguna regla de inferencia de la potencia general del modus ponens, aplicable a oraciones en general, sea cual fuere la estructura interna de las mismas. No vale ni siquiera la regla Eq que del par de premisas "p" y "p=q" permite concluir "q". Por último, la noción de estratificación es, en un sentido, más amplia que la aquí propuesta (son estratificadas, en el sentido de (C:3), cualesquiera fórmulas a las que se pueda asignar uno u otro tipo sin regresión al infinito, mientras que, en el sentido del presente trabajo, sólo son estratificadas aquellas fórmulas en las que se pueda asignar un tipo de los que, en términos fregeanos, cabría llamar no mixto -aquellas cuya traducción en una teoría de conjuntos como ML es estratificada, traduciéndose "$xu^1 \ldots u^n$" como "$\langle u^1, \ldots, u^n \rangle \epsilon x$"), mientras que, por otro lado, es más estrecha: se define en (C:3) la estratificación de una fórmula sobre la base de asignación de tipos a constantes que no sean combinadores (constantes extralógicas) y a variables, de suerte que para que una fórmula sea estratificada en términos de (C:3) a cada símbolo que en ella figure debe ahberle sido asignado un tipo -no habiendo, así, signos sincategoremáticos. De otro lado, esa noción de estratificación juega en la teoría funcional de (C:3) un papel diferente del que desempeña en mi enfoque: allí sirve sólo para probar ciertas conclusiones sobre la base de determinadas premisas, no para restringir, con cláusulas epiteóricas (o, si se quiere, metalingüísticas), un esquema axiomático.

Paso por alto las teorías restringidas de la funcionalidad que se estudian en el cap. 10º de (C:3). Muchos de los trabajos consagrados al cálculo lambda se sitúan en el mismo terreno que la teoría básica de la funcionalidad, compartiendo con ésta esa fusión o mezcla de planos que, en cambio, vienen diferenciados en el presente trabajo. No pocos de esos trabajos presentan enriquecimientos y variaciones sobre asignaciones de tipos (incluyendo las asignaciones no aplicacionales, o sea: las que asignan varios tipos a un mismo término). Pese al gran interés técnico de tales contribuciones, parecen éstas aportar poco a la construcción de una teoría que pueda responder a las motivaciones filosóficas consideradas en las secciones 1ª, 4ª y 8ª del presente ensayo. (Entre los refinamientos de la asignación de tipos figura la ideación de tipos intersectales, tal como se propone en (B:3): con la misma se puede proponer un modelo para ciertas teorías articuladas en un cálculo lambda).

Otro refinamiento interesante -que es en verdad una generalziación de la teoría básica de la funcionalidad- lo brinda (C:5), donde se postulan, además de los tipos básicos que se den, tipos de la forma <T,t>, donde t es un tipo y T un conjunto finito de tipos. Se asigna a cada término un conjunto de tipos. Las mejoras que se logran con esas medidas no alteran, sin embargo, el carácter de ese sistema, similar al ya citado de Curry y, por ende, igual de alejado que éste de $A\lambda$.

Por último, el sistema propuesto por G. Helman en (H:1) sacrifica lo más importante del género de tratamiento que constituyen a los cálculos lambda y teorías de conjuntos: introduce, en efecto, como primitivas, además de la aplicación, una función binaria que, de dos argumentos, x, z, forma el par <x,z>, así como una (función de) proyección derecha, R, y una proyección izquierda, L.

Hubiérame gustado explayarme en consideraciones filosóficas sobre las modelizaciones propuestas para el cálculo lambda por Dana Scott y otros autores, pues son reveladoras de divergencias profundas entre las motivaciones que animan tales construcciones y las que han dado lugar al presente enfoque. Pero eso habrá de quedarse para un estudio posterior.

REFERENCIAS

(B:1) BARENDREGT, H. "The Type Free Lambda Calculus", ap. *Mathematical Logic*, comp. por J. Barwise. Amsterdam: North Holland, 1977, pp. 1091-132.

(B:2) BARENDREGT, H. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Amsterdam: North Holland, 1978.

(B:3) BARENDREGT, H., M. Coppo & Dezani-Ciancaglini, "A Filter Lambda Model and the Completeness of Type Assignement", *Journal of Symbolic Logic* 48/4 (dic. 1983), pp. 931-40.

(C:1) CARNAP, R. *Introduction to Symbolic Logic*. Trad. H. Meyer & J. Wilkinson. Nueva York: Dover, 1958.

(C:2) CHURCH, A. *The Calculi of Lambda Conversion*. Princeton U.P., 1941.

(C:3) CURRY, H.B. & R. Feys, *Lógica combinatoria* (con la colaboración de W. Craig), trad. M. Sacristán. Madrid: Tecnos, 1967.

(C:4) CRESSWELL, M.J. *Logics and Languages*. Londres: Methuen, 1973.

(C:5) COPPO, M. & M. Denzani-Ciancaglini, "An Extension of the Basic Functionality Theory for the Lambda:Calculus", *Notre Dame J.F.L.* 21/4 (oct. 1980), pp. 685-93.

(C:6) CURRY, H.B. "Some Philospphical Aspects of Combinatory Logic". ap. *The Kleene Symposium*, comp. por J. Barwise *et al*. Amsterdam: Nort Holland, 1980.

(F:1) FITCH, F.B. "The Relation between Natural Languages and Formalized Languages", ap. *Philosophy of Logic*, comp. por Stephan Dörner. Oxford: Blackwell, 1976, pp. 183-90.

(F:2) FITCH, F. *Elements of Combinatory Logic*. New Haven: Yale U.P., 1974.

(H:1) HELMAN, G. "Completeness of the Normal Typed Fragment of the λ-Sistem U", *Journal of Philosophical Logic*, 6/1 (feb. 1977), pp. 33-46.

(H:2) HINDLEY, R. & J.P. Seldin (comps), *To H.B. Curry: Essays in Combinatory Logic, Lambda:CAlculus and Formalism*. N. York: Academic Press, 1980.

(M:1) McCAWLEY, *Everything that Linguists Have Always Wanted to Know about Logic*. Oxford: Blackwell, 1981.

(P:1) PEÑA, L. "Aporetic and Nonaporetic Paradoxes from the Viewpoint of an Axiomatized Contradictorial Fuzzy Set-Theory", *Proceedings of the 12th International Symposium on Multiple-Valued Logic*. (París: mayo de 1982) Los Angeles: IEEE Computer Society, 1982, pp. 171-77.

(P:2) PEÑA, L. "Transitive Set Theory", *Abstracts of 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Vol. 1*. Julio de 1983. Salzburgo: J. Huttegger, 1983, pp. 181-84.

(P:3) PEÑA, L. "*Verum et ens conuertuntur*: The Identity between Truth and Existence within the Framework of a Contradictorial Modal Set-Theory" ap. *Paraconsistent Logic*, comp. por G. Priest, R. Routley & J. Norman. Munich: Philosophia Verlag, 1984 (en prensa).

(P:4) PEÑA, L. "Identity, Fuzziness and Noncontradiction", *Noûs*, vol. XVIII, nº 2 (mayo de 1984), pp. 227-59.

(P:5) PEÑA, L. "Negación dialéctica y lógica transitiva", *Crítica*, nº 43, (abril de 1983), pp. 51-77.

(P:6) PEÑA, L. "Tres enfoques en lógica paraconsistente (I)", *Contextos*, nº 3 (1984).

(P:7) PEÑA, L. *Fundamentos de ontología dialéctica*. Madrid: Editora Nacional (en prensa).

(P:8) PEÑA, L. *El ente y su ser: Un estudio lógico-metafísico*. León: Ediciones de la Universidad (en prensa).

(P:9) PEÑA, L. "A Neo-Fregean (Onto)Logical Fuzzy Framework", ap. *Frege Conference 1984. Proceedings of the International Conference held at Schwerin (GDR)*. Sept. 10-14., 1984. Ed. por Gerd Wechsung. Berlín: Akademie-Verlag, 1984, pp. 253-62.

(P:10) POTTS, T.C. "The Crossest Confusión Possible? - Frege and Lambda Calculus", *Revue Internationale de Philosophie*, nº 130, 1979, pp. 761-85.

(R:1) RENNIE, M.K. "Some Uses of Type Theory in the Analysis of Language". Canberra: The Australian National University, Departement of Philosophy. Monograph Series nº 1, 1974.

(R:2) ROUTLEY, R. *Exploring Meinong's Jungle and Beyond*. Canberra: Australian National university, 1980.

(S:1) SANCHIS, L.E., "Types in Combinatory Logic". *Notre Dame J.F.L.*, vol. 5, 1984, pp. 161-180.

(S:2) SCOTT, D. "Lambda Calculus: Some Models, Some Philosophy", ap. *The Kleene Symposium* (vide supra; (C:6)), pp. 223-65.