Lorenzo Peña

Rudimentos de lógica matemática

- -

Madrid
Servicio de Publicaciones del CSIC

1991

- -

ISBN 84-000-7156-5
Pp. vi+324

TABLA DE MATERIAS

PRÓLOGO 1

INTRODUCCIÓN 5

§1.— **Naturaleza del saber lógico; noción de verdad lógica** 5

§2.— **Consideraciones sucintas sobre filosofía de la lógica** 6

§3.— **Razón y cometido de la notación simbólica** 9

§4.— **Lógica y lógicas** 10

§5.— **¿Se justifica el monopolio docente de la lógica clásica?** 12

§6.— **Motivaciones filosóficas del sistema aquí propuesto** 16

§7.— **Aclaración de algunas nociones** 18

SECCIÓN I

EL CÁLCULO SENTENCIAL Aj

Capítulo 1º.— SÍMBOLOS BÁSICOS DEL SISTEMA, Y LECTURAS DE LOS MISMOS 23

Capítulo 2º.— ESQUEMAS AXIOMÁTICOS Y REGLAS DE INFERENCIA 26

Capítulo 3º.— DESARROLLO DEL SISTEMA 27

Capítulo 4º.— DERIVACIÓN DE REGLAS DE INFERENCIA NO PRIMITIVAS 28

Capítulo 5º.— ALGUNOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES SOBRE LA EQUIVALENCIA 34

Capítulo 6º.— LECTURAS DE ESQUEMAS DEMOSTRADOS; CRÍTICA DEL ENFOQUE RELEVANTISTA 44

Capítulo 7º.— El FUNCTOR CONDICIONAL O DE ENTRAÑAMIENTO 46

Capítulo 8º.— METATEOREMA DE LA DEDUCCIÓN Y OTROS TEOREMAS CONDICIONALES 57

Capítulo 9º.— OTROS FUNCTORES 67

Capítulo 10º.— SUPERNEGACIÓN Y SOBREAFIRMACIÓN 70

Capítulo 11º.— LO TOTALMENTE VERDADERO Y LO TOTALMENTE FALSO 75

Capítulo 12º.— EL BICONDICIONAL 79

Capítulo 13º.— IMPLICACIÓN; EL METATEOREMA DE LA EQUIVALENCIA 83

Capítulo 14º.— EL PRINCIPIO DE HERÁCLITO 89

Capítulo 15º.— EL PRINCIPIO DE BOECIO; CRÍTICA DEL CONEXIVISMO 94

Capítulo 16º.— OTROS SISTEMAS EQUIVALENTES A *Aj* EN LOS CUALES NO ES AXIOMÁTICO EL PRINCIPIO DE HERÁCLITO 99

Capítulo 17º.— OTROS ESQUEMAS IMPLICACIONALES 101

Capítulo 18º.— LOS HECHOS MÁS BIEN VERDADEROS O REALES 105

Capítulo 19º.— LOS HECHOS BASTANTE VERDADEROS O REALES 111

Capítulo 20º.— EL FUNCTOR DE AFIRMACIÓN Y NEGACIÓN CONJUNTAS, 'S' 114

Capítulo 21º.— LA SUPERCONYUNCIÓN 116

Capítulo 22º.— VERDADERO Y MUY VERDADERO 121

Capítulo 23º.— LO INFINITESIMALMENTE REAL; GENERALIZACIÓN ULTERIOR DE LA SUSTITUIBILIDAD DE LOS EQUIVALENTES 125

Capítulo 24º.— LO VERDADERO EN TODOS LOS ASPECTOS 130

Capítulo 25º.— EL FUNCTOR 'B'; LA REGLA DE AFIRMABILIDAD 134

Capítulo 26º.— DIFERENTE COMPORTAMIENTO DE LA CONYUNCIÓN Y DE LA DISYUNCIÓN RESPECTO DEL FUNCTOR DE AFIRMABILIDAD 'B' 136

APÉNDICE DE LA SECCIÓN I: PERFIL DEL SISTEMA *Aj* ENTRE DIVERSOS SISTEMAS DE LÓGICA 139

Acápite 1º.— Caracterización de *Aj* como sistema contradictorial y proficuo a la vez 139

Acápite 2º.— Aclaración de nociones básicas de teoría de modelos 141

Acápite 3º.— Prueba del metateorema del englobamiento 143

Acápite 4º.— Relaciones de *Aj* con la lógica intuicionista y el sistema infinivalente de Gödel 146

Acápite 5º.— Comentarios y puntualizaciones sobre los resultados precedentes 148

SECCIÓN II

EL CÁLCULO CUANTIFICACIONAL Aq

Capítulo 0º.— ESCLARECIMIENTO DE LA NOCIÓN DE CÁLCULO CUANTIFICACIONAL Y CONTRASTE DEL MISMO CON EL VIEJO ENFOQUE SILOGÍSTICO 153

Capítulo 1º.— DILUCIDACIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIABLE Y DE LA RELACIÓN ENTRE VARIABLES Y CUANTIFICADORES 154

Capítulo 2º.— ACLARACIÓN DE LAS NOCIONES DE VARIABLE LIBRE Y VARIABLE LIGADA 155

Capítulo 3º.— OTRAS LECTURAS DE LOS CUANTIFICADORES Y RELACIONES ENTRE AMBOS 157

Capítulo 4º.— VARIACIÓN ALFABÉTICA 158

Capítulo 5º.— NOTACIONES ADICIONALES 160

Capítulo 6º.— EL SISTEMA DE CÁLCULO CUANTIFICACIONAL *Aq*. BASE DEL SISTEMA 161

Capítulo 7º.— RESULTADOS DEMOSTRATIVOS FUNDAMENTALES 163

Capítulo 8º.— ALCANCE DE LOS CUANTIFICADORES Y RELACIONES ENTRE LOS DOS CUANTIFICADORES 164

Capítulo 9º.— DISCUSIÓN CON EL INTUICIONISMO ACERCA DE LAS EQUIVALENCIAS PRECEDENTES 165

Capítulo 10º.— NUEVOS RESULTADOS SOBRE EL ALCANCE DE LOS CUANTIFICADORES 167

Capítulo 11º.— RELACIÓN ENTRE LOS CUANTIFICADORES Y OTROS FUNCTORES MONÁDICOS Y DIÁDICOS 170

Capítulo 12º.— RESULTADOS FINALES Y RECAPITULACIÓN DE LOS ANTERIORES SOBRE PRENEXACIÓN Y DESPRENEXACIÓN . . 174

Capítulo 13º.— LA SOBREIMPLICACIÓN Y LOS CUANTIFICADORES 178

Capítulo 14º.— SUPERCONYUNCIÓN Y CUANTIFICADORES 180

Capítulo 15º.— LOS FUNCTORES ‘f’, ‘Y’, ‘R’, ‘g’, ‘m’, ‘n’ y ‘b’ EN SU RELACIÓN CON LOS CUANTIFICADORES 182

Capítulo 16º.— LOS FUNCTORES ‘B’, ‘J’, ‘G’, ‘’, ‘=’ y ‘ ’ EN SU RELACIÓN CON LOS CUANTIFICADORES 186

Capítulo 17º.— ALGUNOS RESULTADOS GENERALIZADOS QUE SE OBTIENEN MEDIANTE INDUCCIÓN MATEMÁTICA 190

Capítulo 18º.— VARIOS CUANTIFICADORES A LA VEZ CON DIFERENTES VARIABLES 192

Capítulo 19º.— NUEVOS RESULTADOS GENERALIZADOS POR APLICACIÓN DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA 196

Capítulo 20º.— METATEOREMA DE LA DEDUCCIÓN PARA EL CÁLCULO CUANTIFICACIONAL *Aq* 199

SECCIÓN III

LA TEORÍA DE CÚMULOS CD

Capítulo 1º.— CONSIDERACIONES PRELIMINARES 207

Capítulo 2º.— LA TEORÍA DE TIPOS DE FREGE 208

Capítulo 3º.— EL FONDO CONSTRUCTIVISTA DE LA TEORÍA RUSSELLIANA 211

Capítulo 4º.— LA TEORÍA RAMIFICADA DE TIPOS 213

Capítulo 5º.— EL PRINCIPIO DE REDUCIBILIDAD 215

Capítulo 6º.— EL SINO DE LOS CUANTIFICADORES 217

Capítulo 7º.— CÓMO SE EVITA LA PARADOJA DE CANTOR EN LA TEORÍA RAMIFICADA 219

Capítulo 8º.— EL AXIOMA DE REDUCIBILIDAD Y LA EXISTENCIA DE SITUACIONES PRÓXIMAS A LA IMPREDICATIVIDAD EN SENTIDO FUERTE 222

Capítulo 9º.— LA TEORÍA RAMIFICADA Y LAS PARADOJAS SEMÁNTICAS Y EL TRATAMIENTO DE LAS DESCRIPCIONES DEFINIDAS 223

Capítulo 10º.— LA EXISTENCIA DE CLASES Y LA SEGUNDA EDICIÓN DE PP.MM. 225

Capítulo 11º.— LA ESCAPATORIA DE FREGE Y EL PLANTEAMIENTO DE QUINE 227

Capítulo 12º.— EL PRINCIPIO DE COMPRENSIÓN: ¿CATERVAS O CORRILLOS? 229

Capítulo 13º.— LOS ELEMENTOS Y LA CONDICIÓN DE ESTRATIFICACIÓN: NEW FOUNDATIONS 232

Capítulo 14º.— UNA ALTERNATIVA DIFUSA, PARACONSISTENTE Y COMBINATORIA 235

Capítulo 15º.— EL SISTEMA CD 239

§1.— La base del sistema CD 239

§2.— Algunos resultados teórico-conjuntuales conseguibles con el sistema CD 243

§3.— Introducción de la aritmética y otros campos matemáticos 246

§4.— Unas pocas puntualizaciones adicionales 253

SECCIÓN IV

CUESTIONES DE FILOSOFÍA DE LA LÓGICA

Capítulo 1º.— CÚMULOS DESFONDADOS 257

Capítulo 2º.— ACERCA DE LA EXISTENCIA DE VERDADES MUTUAMENTE CONTRADICTORIAS 259

Capítulo 3º.— UN ESTUDIO COMPARATIVO DE TRES ENFOQUES EN LÓGICA PARACONSISTENTE 267

Acápite 1º.— La regla de Cornubia 267

Acápite 2º.— Inclusión de las lecturas en la definición de una lógica: las diversas lógicas clásicas 269

Acápite 3º.— Cotejo de los tres enfoques paraconsistentes 271

Acápite 4º.— Convergencias y divergencias entre los enfoques relevantista y transitivista 272

Acápite 5º.— Las raíces de la discrepancia entre el enfoque de da Costa y el enfoque transitivista 276

Acápite 6º.— Ventajas e inconvenientes del enfoque relevantista 281

Acápite 7º.— Ventajas e inconvenientes del enfoque de da Costa 285

Acápite 8º.— Otras particularidades de la lógica transitiva 288

CONCLUSIÓN 293

Apéndice de la Sección III.— SUCINTA PRESENTACION DE LOS SISTEMAS DE DA COSTA Y DE ROUTLEY 294

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

ANEJO Nº 1.— LISTA DE TEOREMAS Y ESQUEMAS TEOREMÁTICOS DE *Aj* y *Aq* 296

ANEJO Nº 2.— LISTA DE REGLAS DE INFERENCIA DE *Aj y Aq* 312

ANEJO Nº 3.— LISTA DE ABREVIACIONES DE *Aj* Y *Aq* 314

BIBLIOGRAFÍA 315

ÍNDICE 319

PRÓLOGO

En 1980 escribí un texto poligrafiado (los *Apuntes introductorios a la lógica matemática elemental*) destinado a servir como texto para un curso unisemestral universitario de lógica matemática. Resultado de una considerable reelaboración y ampliación de dicho texto es el libro —en vías de publicación por la UNAM— titulado *Introducción a las lógicas no clásicas* [**INLONOCL**]. La experiencia ha corroborado la utilidad de ese texto, en el cual se presentan, desde el primer momento, diferentes sistemas de lógica sentencial —mediante un enfoque semántico—, las técnicas principales para construir tales sistemas, algunos de los criterios que parecen razonablemente defendibles para optar entre sistemas lógico-sentenciales alternativos —o, siquiera, para clasificarlos convenientemente—, las nociones básicas de teoría de modelos (para lógicas sentenciales) y, por último, ya con un enfoque sintáctico, el sistema de cálculo sentencial *At* —del cual es una extensión el sistema de lógica sentencial *Aj* propuesto en el presente libro. Un texto así se recomienda por la flexibilidad y multilateralidad del enfoque, para que el adiestramiento lógico-matemático de los jóvenes no se efectúe por modo de adoctrinamiento. Porque enseñar dogmáticamente un único sistema de lógica, presentándolo como «la» lógica —o limitarse, todo lo más, a adjuntar al cuerpo de lo que uno enseña, como apéndice o poco menos, alguna somera información sobre sistemas lógicos «divergentes»— es entregarse a un adoctrinamiento que tiene no poco de lavado de cerebro o de abuso de autoridad intelectual y lo que con ello se obtiene es, en lugar de estimular la capacidad argumentativa y crítica del estudiante, manteniendo e incrementando su juvenil flexibilidad intelectual, inculcarle a machamartillo y como incuestionable dogma de fe una determinada teoría lógica, y así heñir su pensamiento de manera que lo que resulte sea una mentalidad rígidamente acartonada, secando el torrente de su inquieta curiosidad (susceptible de llevarlo a explorar diversos caminos y hasta —en el caso de que se le brinden para ello idóneos instrumentos y técnicas— de formular brillantes conjeturas y adentrarse por nuevas sendas investigativas) y acostumbrándolo a caminar al paso, en correcta formación, con el pelotón de seguidores ciegos de un sistema consagrado por los años y la autoridad establecida.

Con todo, el texto al que he venido aludiendo es insuficiente porque no presenta en todo su desarrollo un determinado sistema de lógica. Ahora bien, una opción entre sistemas alternativos de lógica sólo llega a efectuarse de manera madura y altamente racional cuando quien la efectúa ha explorado suficientemente cada uno de los itinerarios entre los que opta, yendo suficientemente lejos en esa exploración, esto es: habiéndose adentrado lo bastante por cada uno de esos senderos como para hacerse una composición de lugar sobre cada uno de ellos, o sea como para saber cuán plausibles o implausibles resultan —para él, desde su propio horizonte de intelección, claro está— buena parte de los modos de argumentar que entroniza el sistema en cuestión. El exponer en un solo libro, de manera accesible a cualquier lector estudioso, aunque carezca de conocimientos previos sobre la materia, un determinado sistema axiomático en sus varios pisos y con demostración rigurosa de teoremas y derivación de reglas de inferencia siempre me pareció una tarea descollante y de las que más pueden aportar, tanto a un esclarecimiento de las cuestiones imbricadas en la discrepancia entre sistemas alternativos, como a la formación seria no sólo de jóvenes estudiantes sino también de postgraduados e investigadores que desean cimentar más firmemente su propia labor de estudio, de indagación y de enseñanza, ampliando y ahondando para ello sus conocimientos lógicos. Una brillante muestra de realización de una tarea así la constituye el libro de Quine *Lógica matemática (Mathematical Logic)*, que va exponiendo su propio sistema (que es la lógica clásica o frege-russelliana en el cálculo sentencial y cuantificacional, pero que es una teoría propia y original en el tercer piso lógico, el de teoría de conjuntos) y va revelando así con claridad las virtualidades y la fecundidad que caracterizan a ese sistema, sin apenas entrar en discusión con enfoques o sistemas alternativos.

Fruto de todas esas consideraciones ha sido la elaboración del presente libro, que pretende ser, ante todo, una exposición del sistema de lógica *transitiva* propuesto por el autor (y cabe hablar de *sistema*, en singular, aunque se haya plasmado en muchos sistemas —en plural— en el sentido en que se usa el vocablo en la jerga lógica, donde la menor variación en un axioma causa un cambio de sistema); un sistema que engloba los tres estadios del cálculo sentencial, *Aj*, el cálculo cuantificacional, *Aq*, y la teoría de conjuntos (o —según preferiré llamarla— de *cúmulos*), *CD*. Trátase de una exposición detallada pero que rehuye pormenores y ulteriores resultados más complejos, que parecían superfluos para una comprensión global del sistema propuesto, si bien (tal ha sido, al menos mi intención) accesible aun a quien carezca de preparación o de conocimientos previos de lógica. Mas, aunque no es menester ninguna capacidad o adiestramiento previos para enfrentarse con la lectura de este libro —y, de ese modo, estos *Rudimentos* pueden servir para un aprendizaje autodidáctico de la lógica matemática—, requiérese no obstante una actitud escrupulosa y exigente que, lejos de contentarse con un hojear relajadamente o a salto de mata, imponga una lectura atenta, línea por línea.

Por otro lado, en la redacción de este libro —como en mis demás obras— me he empeñado en presentar el sistema que propongo en contraste y discusión con enfoques alternativos. Sólo que, en lugar de presentar de entrada, a grandes rasgos o en sus fundamentos semánticos, esos sistemas alternativos, éstos van desfilando a medida que lo requiere la dilucidación y discusión de resultados teoremáticos que van siendo probados en el sistema axiomático propuesto; y, al entrar en escena uno de esos sistemas a propósito de un punto particular de divergencia entre el mismo y el sistema aquí propuesto, discútense los argumentos filosóficos que abonan o que pueden esgrimirse a favor o en contra de cada uno de ellos.

El presente libro ha dimanado tanto de años de experiencia docente universitaria como de la reiterada constatación de la falta de un libro así en la comunidad intelectual —no sólo hispanohablante, sino internacional; pues, desgraciadamente, los manuales hasta ahora disponibles de lógica matemática, así como todos los textos de esa disciplina destinados a la enseñanza, se acantonan en el consagrado terreno de la lógica clásica (salvo alguno que otro que condescendientemente aneja o coloca al final alguna somera exposición de ciertas lógicas no clásicas —por lo común de las descubiertas hace 50 ó 60 años), de manera acrítica y sin siquiera pretender brindar la menor justificación de su opción, como si ésta fuera patentemente correcta y sin vuelta de hoja —¡como si ni siquiera se tratara de una opción! Para enterarse del tenor de los abundantes sistemas no clásicos de lógica y percatarse de la pletórica frondosidad de senderos alternativos en la investigación lógica contemporánea hay que acudir, o bien a unos pocos libros que no tienen ni la pretensión de ser manuales accesibles al lector novicio ni tampoco la de constituir o presentar exposiciones detalladas y desarrolladas de ciertos sistemas no clásicos (y que ni siquiera presentan los resultados lógicamente más prometedores de la investigación lógico-matemática del último decenio), o bien a las publicaciones especializadas, únicamente asequibles al investigador profesional.

Otro punto que merece mención es el uso de las esquinas '⌜' y '⌝', que fue inaugurado por Quine. Los detalles técnicos de en qué consiste tal uso no parece necesario exponerlos aquí, pero baste señalar que se colocan entre esquinas expresiones que son utilizadas como esquemas, o sea: al encerrarse entre esquinas un símbolo, no se está citando exactamente el símbolo que figura entre las esquinas, sino que se está citado implícitamente una expresión **cualquiera** de cierto tipo. Informalmente pueden usarse las comillas dobles angulares (izquierdas y derechas) como esquinas, allí donde se usan palabras de la lengua natural: «p sólo si q» equivaldrá, pues, a $\ulcorner p\supset q \urcorner$. En cambio, las comillas simples se usan para citar la expresión que entre ellas aparece. En ocasiones, sin embargo, relajaremos el uso de comillas y podremos prescindir de ellas, sobreentendiéndolas si hace falta —a fin de no sobrecargar la exposición de ciertas consideraciones anejas a determinados esquemas teoremáticos.

He utilizado algunas abreviaturas en este libro cuyo significado es preciso aclarar. Hélas aquí:

'fbf' abrevia a: 'fórmula bien formada'; 'ssi' abrevia a: 'si, y sólo si'; 'e.d.' abrevia a: 'es decir'; 'e.e.' abrevia a: 'esto es'; 'R.C.' abrevia a: 'Rechazo de la Contradicción'.

He de decir aquí unas pocas palabras más sobre la relación entre el presente libro y la ya citada **INLONOCL**. En dicho opúsculo —a la hora de proponerlo al editor— incluí ciertos fragmentos inicialmente escritos para la presente obra. Por eso y por varias razones más, quien inicie la lectura del presente libro habiendo leído **previamente INLONOCL** abordará tal estudio mucho mejor equipado. Sin ser imprescindible ni mucho menos, la consulta previa de **INLONOCL** sí es, pues, recomendable. Aunque por otra parte también es cierto que un estudio del presente libro capacita mejor para un estudio más en profundidad de **INLONOCL**, que tiene algunos capítulos finales un poco difíciles (p.ej. sobre modelos algebraicos). En comparación con esos desarrollos, la mayor parte del texto aquí ofrecido es muy fácil.

He de recalcar lo muchísimo que se ha beneficiado el trabajo investigativo plasmado en estas páginas de la estimulante colaboración del Prof. Fernando Marcelo Vásconez Carrasco (de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador), quien no sólo detectó una serie de errores en la versión manuscrita, sino que además me sugirió un montón de mejoras en las pruebas de la Sección I (inventando atajos demostrativos). A él y a cuantos han ayudado a mi labor investigativa expreso mi afectuosa gratitud. Ante todo, he de mencionar entre ellos a Newton da Costa, de quien no sin motivos hondos me considero discípulo, ya que él inauguró el actual desarrollo de las lógicas paraconsistentes. Y —por sus observaciones a varios de mis estudios lógicos, de las cuales se ha beneficiado la reelaboración final del presente libro— a José Manuel Méndez (Universidad de Salamanca), Katalin Havas (de la Academia de Ciencias de Hungría), Francisco Miró Quesada (Universidad de Lima), Diderik Batens (Universidad de Gante), Henri Lauener (Universidad de Berna), Igor Urbas y Richard Sylvan (Universidad Nacional Australiana, en Canberra), Graham Priest (Universidad de Brisbane), Manuel Liz (Universidad de La Laguna), Raúl Orayen y Raymundo Morado (UNAM [Universidad Nacional Autónoma de México]) y Marcelo Dascal (Universidad de Tel Aviv). A W.V.O. Quine débole sus valiosos comentarios a un trabajo inédito mío —en el cual se perfilaban varios puntos que ahora aparecen reelaborados en la Sección IV de este libro— así como el intercambio de opiniones que tuvimos en Saint Louis (Missouri) en abril de 1988 —un intercambio muy esclarecedor para mí, y del cual han sacado ventaja algunas de las las argumentaciones contenidas en la Sección III. Quiero agradecer asimismo a Francisco Salto Alemany (Universidad de Salamanca) sus críticas a una versión anterior de parte del contenido de la Sección III de este libro.

La organización del presente libro es la siguiente. La Sección I expone el primer piso de la lógica: el cálculo sentencial; la Sección II, el cálculo cuantificacional; la Sección III, la teoría de conjuntos (a la que yo —por razones que se perfilarán en parte en dicha Sección III— prefiero llamar '*teoría de cúmulos*'); la Sección IV viene consagrada a unos pocos temas de filosofía de la lógica —y su inclusión en este libro se debe a que éste va destinado, principalmente, a lectores de vocación u orientación filosófica. Según se suelen concebir, construir y exponer, el tercero los tres niveles [abordados respectivamente en las tres primeras secciones] presupone al segundo y éste al primero. Aunque en la propia construcción que yo propongo no es eso exacto (en mi construcción combinatoria la teoría de cúmulos de la Sección III no presupone el cálculo sentencial ni el cuantificacional, sino que son éstos parte de aquélla), así y todo por motivos didácticos conviene atenerse al orden habitual.

Por razones editoriales ha habido que amputarle al libro muchos capítulos, sobre todo en la Sección I. (En vez de troncharlo, he preferido descuajar cuantas ramas me han parecido desgajables sin excesivo quebranto, a pesar de los huecos así resultantes.) Han venido suprimidas con ello grandes cadenas de esquemas, con sus demostraciones y sendas explicaciones en lengua natural. Como al final del libro figura un Anejo que es una lista de esquemas teoremáticos del sistema, al lector no le costará demasiado esfuerzo rehacer lo que ha venido cercenado, superando así los hiatos en el proceso demostrativo. Eso constituirá para él un ejercicio que le hará incluso tal vez más atractiva la lectura.

La Sección III es sólo un esbozo de una obra ulterior sobre el tema en ella abordado, obra que podría titularse *Teoría de cúmulos*, o *Teoría dialéctica de conjuntos*. Dicha Sección III es fruto de una reelaboración del artículo «Consideraciones filosóficas sobre la teoría de conjuntos» previamente publicado en la revista ***Contextos*** Nos 11 (pp. 33-62) y 12 (pp. 7-43) [Universidad de León, 1988]. Igualmente gran parte del último capítulo de la Sección IV proviene de reelaborar un trozo de otro artículo publicado en esa misma revista, ***Contextos*** (en los números 3 & 4 [1984], pp. 81-130 & 49-

72), a saber: «Tres enfoques en lógica paraconsistente». A la redacción de dicha revista expreso mi gratitud por autorizarme a reproducir aquí esos fragmentos.

Séame lícito terminar este Prólogo resaltando que el vigoroso desarrollo tanto de las lógicas paraconsistentes como de las lógicas de lo difuso —unas y otras florecientes sólo desde hace pocos lustros— nos hace avizorar que ha llegado, ¡por fin!, el momento de una revolución lógica sin precedentes, en la cual la lógica aristotélica, con su rechazo de la contradicción, y con su repudio de grados de falsedad y de verdad, está condenada a perder su supremacía, mientras que otros enfoques lógicos no aristotélicos adquirirán no sólo mayor número de partidarios, sino sobre todo el rango, en la comunidad intelectual, de sistemas por lo menos tan respetables, tan dignos de estudio y consideración, como las lógicas de cuño aristotélico.

Tres Cantos, 14 de abril de 1991

INTRODUCCIÓN

§1.— Naturaleza del saber lógico; noción de verdad lógica

Nada es tan discutido en lógica como la naturaleza misma de este saber. Podría escribirse un voluminoso tratado que examinara las diversas concepciones. Naturalmente ello cae fuera de los límites de este libro. La concepción que va a ser expuesta a renglón seguido, aunque fuertemente sustentable, no es, por consiguiente, la única que haya sido propuesta.

La lógica no es una disciplina que quepa definir como aquella que se ocupa de reglas de inferencia. Y ello por dos razones:

1) No todas las reglas de inferencia aceptables son objeto de la lógica. En efecto: la regla de inferencia que de 'Iraldo es un mamífero' permite inferir 'Iraldo es un vertebrado' es, sin duda alguna, aceptable y correcta (una regla de inferencia es correcta ssi es tal que, en el caso de que sus premisas sean —poco o mucho— afirmables con verdad, su conclusión lo es también en uno u otro grado). Y, sin embargo, el estudio de tal regla de inferencia no compete a la lógica, como es obvio.

2) La lógica no estudia sólo reglas de inferencia aplicables a saberes diversos (en tal caso no habría verdades lógicas). Hay un campo de enunciados u oraciones verdaderas que constituyen un saber propio de la lógica. P.ej., los siguientes enunciados son **verdades** de lógica: Enrique Gil Gilbert es autor de *Nuestro Pan* o Enrique Gil Gilbert no es autor de *Nuestro Pan*; Fidel Alomía escribió *La Banda Negra* a lo sumo en la misma medida en que Fidel Alomía escribió *La Banda Negra*; Pacho Villamar es danés ssi es cierto que Pacho Villamar es danés y que Pacho Villamar es danés; hay un ente que es razón de ser de todos los entes a lo sumo en la misma medida en que para cada ente hay un ente que es su razón de ser; es cierto que todo cuadrúpedo es ungulado o unguiculado, a lo sumo en la misma medida en que o bien todo cuadrúpedo es ungulado o bien hay entes que, de ser cuadrúpedos, son unguiculados.

Para determinar más de cerca el contenido del saber lógico (la naturaleza de las verdades lógicas), empezamos por definir qué es una **ocurrencia esencial** de una expresión en un enunciado verdadero.

1º.— ¿Qué es una **expresión**? Por **expresión** entendemos cualquier signo lingüístico, e.d. cualquier segmento de un mensaje (verbal o escrito) lingüísticamente acuñado que, o bien es **autosemántico** (e.d.: que tiene significado por sí mismo, lo que quiere decir que designa un ente, cualquiera que éste sea, lingüístico o extralingüístico), o bien es **sinsemático** (e.d., posee un papel semántico determinado, consistente en que su colocación en cierta[s] posicion[es] junto a signos que, por sí solos, designan algún ente da por resultado el surgimiento de un signo complejo que designa también algún ente). P.ej., 'Felipe II' es un signo autosemántico que designa a Felipe II; 'ambicioso' es un signo autosemántico que designa —así se puede al menos considerar— a la propiedad de ser ambicioso; pero 'es' no designa a ningún ente, siendo por ello un signo sinsemático: su papel consiste (simplificando adrede las cosas) en que su colocación entre un signo como ‘Felipe II’ y un signo como ‘ambicioso’ da por resultado otro signo —a saber: una oración— que designa algo, a saber: la ambición de Felipe II. En cambio, otros fragmentos de una expresión o mensaje no son expresiones, pues no son ni autosemánticos ni sinsemáticos; tal es el caso de la sílaba ‘ya’ en ‘guayaquileño’.

2º.— ¿Qué es una **ocurrencia**? Por **ocurrencia** de una expresión en otra (o, como caso límite y banal, en sí misma) entendemos simplemente la presencia de la primera en la segunda, como parte suya. Así, cabe decir que en la expresión ‘cielo raso’ hay una ocurrencia de la expresión ‘raso’, y otra de la expresión ‘cielo’. En la expresión ‘cada hombre detesta a un hombre’ hay dos ocurrencias de la expresión ‘hombre’. Ahora bien, la relación de parte a todo es transitiva: las partes de una parte de un todo son partes de este todo; así, p.ej., las partes de una provincia del Ecuador son partes del Ecuador. Por consiguiente, si de una expresión dada hay una ocurrencia en otra expresión, y, a su vez, hay una ocurrencia de esta última en una tercera expresión, habrá entonces una ocurrencia de la primera en la tercera. Sea, p.ej., la expresión ‘tierra caliente’; en ella hay una ocurrencia de ‘caliente’; a su vez hay una ocurrencia de ‘tierra caliente’ en ‘el café se produce sólo en tierra caliente’; y, por consiguiente, en esta última expresión (que es una oración) hay una ocurrencia de ‘caliente’.

3º.— Son esenciales las ocurrencias de determinada expresión en una oración verdadera (en uno u otro grado) ssi hay alguna otra expresión tal que, sustituyendo **uniformemente** cada ocurrencia de la expresión dada por una ocurrencia respectiva de esta otra expresión (con tal que dicho reemplazo se haga de conformidad con las reglas sintácticas y dé por resultado otra oración correctamente formada), obtenemos un enunciado totalmente falso. Así, p.ej., en la oración ‘Es considerablemente cierto que Atahualpa es rey’ la única ocurrencia de la expresión ‘Atahualpa’ es esencial; si la sustituimos, p.ej., por una ocurrencia de ‘Einstein’, el resultado es totalmente falso. En la oración ‘Atahualpa es rey o no lo es’, en cambio, la ocurrencia de ‘Atahualpa’ no es esencial, puesto que también es verdadero el enunciado ‘Einstein es rey o no lo es’; y también que ‘Bonn es rey o no lo es’; y también que ‘el Aconcagua es rey o no lo es’ (y así sucesivamente para cualquier expresión que pueda, en buena sintaxis, ocupar el puesto de sujeto de una oración).

Ciertas expresiones son atómicas y otras no; atómicas son aquellas que no contienen ocurrencias de ninguna otra expresión. Así, p.ej., ‘Nicaragua’ es una expresión atómica, mientras que ‘capital de Nicaragua’ no lo es. Pues bien, ciertas expresiones que parecen ser no atómicas deben considerarse, de hecho, como atómicas. Así, p.ej., ‘tal vez’ podría parecer no atómica; pero, cuando se reflexiona, se ve con evidencia que se trata de una expresión indescomponible: la expresión ‘tal vez’ no resulta de una composición de las expresiones ‘tal’ y ‘vez’, pues entonces tendría sentido pasar del ‘tal vez venga Romualdo’ a, p.ej., ‘tal cortina venga Romualdo’ y a ‘tanta vez venga Romualdo’. Del mismo modo, ‘sin embargo’ no es una expresión resultante de ‘sin’ y de ‘embargo’, puesto que ‘Cayo, sin embargo, no es buen estudiante’ es una oración sintácticamente correcta, no siéndolo, en cambio, ‘Cayo, con embargo, no es buen estudiante’.

Pues bien, por **verdades de lógica** entenderemos sólo todas aquellas en las que las únicas expresiones que tengan ocurrencias esenciales sean las siguientes: ‘y’; ‘no’; ‘totalmente’; ‘es cierto o punto menos que’; ‘en la misma medida en que’; ‘no sólo… sino también’; ‘es afirmable con verdad que’; ‘cada’; ‘es’ (en el sentido de: ‘posee la propiedad de’); ‘existe’; ‘cree que’ (en el sentido de: ‘está convencido de que’); ‘es obligatorio que’; ‘es necesariamente cierto que’; ‘antes de’, y alguna otra más (la lista no queda del todo cerrada).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§2.— Consideraciones sucintas sobre filosofía de la lógica

Ahora bien, ¿cuáles son las verdades en las que sólo esas expresiones figuran con ocurrencias esenciales? La mera **definición** de verdad lógica no nos lo dice, ni tampoco tiene por qué pretender decírnoslo. Todavía menos tiene la definición que contestar a la pregunta: 'Y ¿cómo sé yo —o sea: cómo puedo yo comprobar o corroborar— si una fórmula dada es o no una verdad en la que **sólo** tengan ocurrencias esenciales las expresiones que figuran en esta lista?' La zoología estudia el mundo animal, pero no estudia el estudio del mundo animal, no es epistemología de la zoología. Pero, además, una mera definición de las verdades zoológicas (como, p.ej., aquellas en las que tengan ocurrencias esenciales palabras como 'animal', 'célula', 'tejido' y otras) no es lo mismo que la zoología misma. La definición de 'verdad lógica' es sólo eso: una definición. Lo que nos dice es que, si alguien cree que una verdad dada (p.ej.: 'Llueve o no llueve') es tal que, en ella, sólo tienen ocurrencias esenciales expresiones de la lista, u otras definidas a partir de ellas, entonces el alguien en cuestión debe considerar a esa verdad como lógica; y, por supuesto, también a la inversa. Luego vienen las diversas teorías lógicas, cada una de las cuales propone un conjunto u otro de verdades lógicas; y luego vienen las teorías epistemológicas sobre el saber lógico, cada una de las cuales propone una concepción sobre cómo puede uno comprobar que una oración determinada es una verdad, y una verdad de lógica —o asegurarse (hasta cierto punto por lo menos) de que así es. En lo tocante al primer punto, están ahí los cientos de sistemas alternativos de lógica (o, si nos limitamos a aquellos que han sido propuestos por sus autores con la creencia de que son verdaderos en sentido propio, a lo mejor sólo unas decenas, pero, en cualquier caso, unos cuantos). En lo tocante al segundo punto, unos —los fundacionalistas— alegarán la existencia, p.ej., de un contacto **intuitivo**, directo, básico, exento por completo de mediación, entre la mente humana y esas verdades (entre ellos figuran: Brentano, Frege, Husserl, Russell —a lo menos durante una etapa—, los «intuicionistas» Brouwer, Heyting y Dummett —si bien el sentido que dan éstos últimos a la concepción de 'saber lógico', por ser idealista, se aparta de la aquí propuesta—, Reichenbach, Chisholm, Kripke, Plantinga); otros, los coherentistas de uno u otro sesgo, dirán que se corroboran —sólo hasta cierto punto y nunca de manera radical— las leyes lógicas en virtud de su fertilidad para elaborar un sistema global y coherente del saber, y que, por consiguiente, están tales leyes a la merced de los vaivenes de la experiencia y de la reelaboración de teorías que parezcan más plausibles en diversas áreas del saber humano; entre los coherentistas cabe citar a: Quine; cuantos se han empeñado en elaborar una lógica cuántica; seguramente Engels; Apostel; K. Lehrer; H. Putnam; y el autor de este libro. Fundacionalismo y coherentismo parecen ser posiciones conjuntamente exhaustivas y —a lo menos en sus versiones consecuentes— mutuamente exclusivas; caben, eso sí, otras formas de fundacionalismo diversas del intuitivismo —acaso el empirismo de Mill sea un fundacionalismo empírico, aunque, en general, las concepciones empiristas del saber lógico tienden más bien a una versión del coherentismo. Hay, empero, posiciones intermedias; y también posiciones matizadas dentro de cada uno de los dos campos. Y, fuera de esa alternativa, quedan las concepciones siguientes: 1ª, la que rechaza la existencia de saber lógico —escepticismo; 2ª, la que rechaza la existencia de justificación epistémica, o corroboración, aun parcial o relativa, en lo tocante a ese saber —posición que sólo se transforma en escepticismo si se exige, como condición para que haya saber, que éste sea no sólo una convicción u opinión verdadera, o sea reflejo de la realidad, sino, además, justificada o corroborada; 3ª, la que acepta el «saber» lógico pero tomando la palabra en un sentido en el cual no cabe hablar de saber lógico como de un conjunto de verdades sobre la realidad, que reflejen lo real; ahí entran diversos tipos de formalismo (Thomae, Hilbert), de convencionalismo (Carnap, Ayer, Nagel, y hasta Rescher). Mas también en este particular caben posiciones intermedias o eclécticas.

Por otro lado —y volviendo al problema de la naturaleza de las verdades lógicas, distinto de la cuestión de si se corroboran tales verdades (y, si sí, cómo)—, la mera definición brindada más arriba de 'verdad lógica' es neutral con respecto a saber si las verdades lógicas son verdades ontológicas, o verdades psicológicas, o verdades de otra índole. Si son verdades ontológicas, entonces son verdades sobre lo real; su ser verdaderas es su reflejar el mundo, la realidad —en algún sentido de 'reflejar' que valga también para decir que las verdades botánicas, p.ej., reflejan el mundo vegetal; la diferencia entre las verdades lógicas y las demás sería —dicho de modo que no pretende ser riguroso— que las verdades lógicas son más generales, que se extienden a todo lo real y no a una parcela: tal es la concepción de Ferdinand Gonseth (la lógica como física del objeto cualquiera) y de Russell (en una etapa, al menos), así como del primer Quine (a lo menos a tal conclusión parece abocado), así como la concepción defendida con ardor y tesón por el autor de este libro. Si las verdades lógicas son psicológicas, entonces son verdades sobre actos mentales; y por ese derrotero marchan: todo el psicologismo del siglo XIX (combatido por Frege —y luego también, aunque inconsecuentemente, por Husserl—), así como, en nuestros días, Gilbert Harman. (Y emparentadas con el psicologismo están todas las concepciones del saber lógico como saber sintáctico o metalingüístico, que proliferaron en la filosofía analítica de los años 20, 30 y 40 —con ramalazos actuales como el punto de vista de Ian Hacking—, así como la concepción escolástica del saber lógico como saber de *secundæ intentiones*.)

El autor de este libro se ha pronunciado, en diversos trabajos, contra el psicologismo y contra todas las concepciones con él emparentadas. Y no puede por menos de volver a suscribir el rechazo de tales posiciones. Pero no es éste el lugar de debatir el asunto: es éste un libro de lógica, no de filosofía de la lógica. Lo que, en todo caso, me permitiría indicar aquí al respecto es que da pábulo al psicologismo la concepción de la lógica que ve en ésta, no tanto un saber o acervo de verdades, como un instrumento o **panoplia de reglas** (de inferencia). Mas, frente a ese instrumentalismo, cabe argüir: ¿En qué se funda, o en qué estriba, la fiabilidad de una regla de inferencia? ¿Por qué ciertas reglas son útiles **para el saber**, y otras son catastróficas? Tomemos la regla de inferencia siguiente: $p \vdash p \wedge q$ (o sea: de una premisa $\ulcorner p \urcorner$, cualquiera que sea, cabe inferir «p y q», siendo $\ulcorner q \urcorner$ una oración cualquiera). Llamémosla **regla de añadimiento**. Según esa regla, de 'Praxiteles esculpió la Venus de Cnido' podríamos concluir: 'Praxiteles esculpió la Venus de Cnido y 2+2=7'. Pero eso es absurdo. Luego no vale esa malhadada regla. Si no vale la regla de añadimiento es porque no es preservadora de la verdad, o sea: porque no es cierto que, si la premisa **es afirmable con verdad**, también lo es la conclusión. Así, para justificar una regla de inferencia, hemos menester de acudir a la noción de verdad: una regla de inferencia es correcta o válida ssi es afirmable con verdad aquella oración condicional cuya prótasis es el resultado de prefijar a la conyunción de las premisas el functor 'Es afirmable con verdad que', y cuya apódosis es la conclusión. La lógica es un saber, no un mero utensilio, no una técnica operativa. Y, en cualquier saber, lo básico es la verdad.

Para concluir este acápite, expondré escuetamente una consideración a favor de la concepción de la lógica como ontología. Cabe preguntarse en qué estriban los desacuerdos entre sistemas alternativos de lógica. A mi modo de ver, la única respuesta clara y convincente es que tales desacuerdos son discrepancias sobre cómo es la realidad, sobre qué leyes la rigen, o dejan de regirla. (Eso se ve todavía mejor en el cálculo cuantificacional, pues en él cualquier divergencia entre dos sistemas de lógica versa acerca de si es o no verdad que no **existen** entes que cumplan determinada condición o característica; una lógica con tercio excluso sostendrá la tesis: «No existen entes tales que no sea de ellos verdad que o p o no p» —siendo $\ulcorner p \urcorner$ una oración cualquiera; y los intuicionistas rechazan tal afirmación, que es un enunciado existencial-negativo, al formular el cual se contrae un compromiso ontológico.)

Cierto es que no toda la ontología o metafísica se estudia en lógica, sino tan sólo aquella parte de la metafísica que ya ha podido ser axiomatizada rigurosamente. La lógica es, pues, la parte rigurosamente axiomatizada de la ontología.

Es más: cuando uno se pone a pensar en el género de consideraciones que pueden abonar a favor, o en contra, de uno u otro de entre los diversos sistemas alternativos de lógica, no puede por menos de percatarse de que esas consideraciones para preferir uno u otro sistema axiomático —y hasta para formular uno u otro criterio de elección entre tales sistemas— son consideraciones metafísicas —o, si no gusta la palabra, ontológicas— sobre la realidad; consideraciones que emanan de una perspectiva u horizonte de intelección, engendrado a partir, y en función, de una determinada formación, de unos u otros influjos, de unas u otras experiencias; horizonte en el que entran también, condicionando toda la visión del mundo en él contenida, preferencias valorativas, actitudes sobre cómo habérselas con problemas fundamentales, sobre qué soluciones son aceptables y cuáles no lo son. Y todo eso sucede así queramos que no, seamos o no conscientes. Sólo que, eso sí, vale más la lucidez, y la franqueza para consigo mismo y para con los demás.

Por último, y para cerrar aquí la plana con relación a este problema, vale la pena refutar, sumariamente, el argumento de que una misma lógica puede ser común a diversas ontologías, lo cual dizque probaría la presunta neutralidad ontológica de la lógica. No hay tal. Lo único que sucede es que varias ontologías pueden tener una parte común —la cual parte es también ontológica, es un conjunto de tesis ontológicas—, pudiendo ocurrir que esa parte esté rigurosamente axiomatizada y que, por consiguiente, la llamemos 'lógica'. Mas de ninguna manera sitúa tal circunstancia a la parte común en cuestión por encima de la ontología, pues habrá otras concepciones ontológicas, más allá de las que compartan esa parte común, que la rechacen. Y es que el argumento que critico sólo tendría una oportunidad de parecer acertado si una misma lógica fuera común a cualesquiera ontologías —y ni siquiera entonces sería concluyente, puesto que habría que ponerse de acuerdo en saber qué es una lógica.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§3.— Razón y cometido de la notación simbólica

Nuestra asignatura es la **lógica matemática**. Llámase también, a menudo, 'lógica simbólica', y, a veces, 'lógica formal', 'lógica teórica', o simplemente 'lógica'. Por otro lado, algunos autores llaman 'lógica formal' a un saber que abarcaría, no sólo a la lógica matemática, sino también a la lógica tradicional, aquella que fue desarrollada desde Aristóteles hasta Leibniz e incluso hasta algunos lógicos del siglo XIX. A veces se opone esa lógica a otras lógicas no formales, como sería la lógica dialéctica, p.ej. Tratemos de precisar todas esas nociones.

En primer lugar, la lógica es la disciplina que contiene como verdades aquellas en las que —como ya se ha apuntado— sólo figuran esencialmente ocurrencias de ciertas expresiones de uso general en todos los saberes. La lista que hemos dado puede —según los enfoques y según la mayor o menor amplitud concedida a la materia por cada autor— ser extendida o, por el contrario, acortada.

Hay, empero, otras actividades intelectuales que difieren de la lógica, y que, no obstante, son designadas por sus cultivadores con expresiones en las que figura la palabra 'lógica' seguida de un adjetivo —o de un sintagma que empieza con la preposición 'de': 'lógica transcendental', 'lógica de la historia', 'lógica del mundo viviente', etc. Cualquiera que sea el valor de esas actividades, no forman parte de la lógica; si tal o cual de ellas puede incorporarse a la lógica en una ulterior expansión de ésta última, es algo que, caso por caso, debería considerarse en posteriores investigaciones. Pero, mientras tanto, hay que considerar que la palabra 'lógica' en esas expresiones figura en un sentido netamente diverso del que tiene cuando se habla de lógica a secas.

Entendida como lo hemos hecho, la lógica es idéntica (estrictamente idéntica) a lo que se llama 'lógica formal' en el amplio sentido de la palabra. La silogística aristotélica es lógica, p.ej. Si se llama 'formal' es porque sólo se interesa por lo que se ha dado en llamar 'forma' de los enunciados, esto es: por la verdad de los enunciados en la medida en que tal verdad depende sólo de la presencia, como únicas expresiones que posean ocurrencias esenciales, de un corto número de expresiones que figuran en oraciones afirmadas en todas las ramas del saber, tanto del saber cotidiano como asimismo de los saberes refinados que constituyen los que normalmente llamamos 'las ciencias'. Y ese corto número de expresiones son, más o menos, las que hemos enumerado (o, en otros planteamientos más escuetos, sólo una parte de ellas).

¿Cuál es la diferencia entre la lógica formal, en general, y la lógica matemática o simbólica en particular? Simplemente ésta: la lógica formal puede ser escrita o bien utilizando simplemente la escritura alfabética normal, o bien utilizando alguna notación o escritura especial que facilite la captación visual tanto de la verdad **lógica** de un enunciado cuanto de la corrección lógica de la inferencia de un enunciado a partir de otro. En el caso concreto de que se escriba con alguna notación especial de esta índole se llama 'matemática' o 'simbólica': matemática, porque el resultado es un saber calculable, al igual que la matemática, de tal modo que, aun ignorando cuáles sean los significados de las palabras, alguien que domine las reglas del cálculo podría calcular correctamente, obteniendo así enunciados verdaderos a partir de otros previamente dados como verdaderos; simbólica, porque se trata de una escritura con símbolos, entendiendo por símbolo un elemento de una grafía o escritura que, en vez de pretender reproducir —de lejos o de cerca— los fonemas que forman las expresiones del lenguaje verbal, representa dichas expresiones de un modo sintético. (En tal sentido, cabría, en cierto modo por lo menos, equiparar una notación simbólica a una notación simplemente ideográfica.)

La escritura alfabética tiene sus ventajas, indiscutiblemente; pero, desde el punto de vista de la rápida captación visual de la verdad lógica de los enunciados, esa escritura alfabética es engorrosa. Lo mismo ocurre en matemáticas. La matemática no se identifica, ni muchísimo menos, con su notación simbólica; es desarrollable sin ella. Así, p.ej., la verdad de la fórmula para hallar las raíces de las ecuaciones de segundo grado no depende de su notación: podría estudiarse perfectamente el álgebra en general, y dicha fórmula en particular, sin usar ninguna escritura diferente de la escritura alfabética normal. Diríamos, así, que, en cualquier ecuación tal que identificara con el número cero la suma de un primer número conocido multiplicado por el cuadrado de la raíz que se trata de hallar, con un segundo número asimismo conocido multiplicado por la susodicha raíz, y con un tercer número conocido, la raíz en cuestión es igual al resultado de efectuar las siguientes operaciones: obtener el resultado de dividir por el duplo del primer número conocido el resultado de sumar o restar al producto del segundo número conocido por menos uno la raíz cuadrada del resultado de restar al cuadrado del segundo número conocido el cuádruplo del producto del primer número conocido por el tercer número conocido. Naturalmente, ello es tan sumamente engorroso que muy pocas personas tendrían empeño bastante para seguir estudiando el álgebra, si así fuera enseñada.

Y, sin embargo, lo que se ha dicho con esa tediosa parrafada no es ni más ni menos que lo que, de manera tan sencilla, y con toda facilidad, aprenden los adolescentes en una fórmula simbólica condensada, cómodamente retenible y aplicable. Pues bien, exactamente lo mismo ocurre con la lógica. La lógica matemática no es diferente de la lógica desarrollada en lengua natural y escrita en la escritura alfabética ordinaria de esa lengua; pero, aun siendo la misma lógica, está escrita con otra notación, una notación que ayuda inmensamente a la captación visual de la verdad de los enunciados y de sus vínculos inferenciales.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§4.— Lógica y lógicas

Al igual que sucede en cualquier otra disciplina filosófica, en la lógica nos encontramos con la existencia de numerosos sistemas alternativos, a favor de cada uno de los cuales cabe esgrimir argumentos más o menos convincentes, no sucediendo ni que alguno de tales sistemas sea, obvia e irrefragablemente, el verdadero, ni tampoco que alguno de ellos esté indiscutiblemente errado y se pueda rechazar de entrada, sin examen atento de los argumentos que militen en su favor.

Claro está, al igual que ningún expositor de una disciplina como la ética, p.ej., compendiará en un solo texto, o en un solo curso, todos los sistemas de filosofía moral, tampoco ningún autor de un texto de lógica, ni ningún profesor de lógica en un curso determinado, pretenderá examinar todos los sistemas lógicos alternativos. En cualquier exposición se limita uno a hacer una selección —en virtud de ciertos criterios, que nunca son incuestionables, y que dependen siempre de cuál sea el horizonte de intelección del seleccionante—, y se lleva a cabo la exposición de tal modo que se consideran, con mayor o menor detalle, los sistemas seleccionados, presentándose argumentos a favor y en contra de los mismos, o, por lo menos, presentándose la alternativa entre ellos como una lontananza abierta a la opción filosófica —no arbitraria.

Por supuesto, el tratamiento de una materia filosófica sistemática, escrito o verbal, ha de ser un tratamiento sistemático (un enfoque histórico pormenorizado de una disciplina filosófica sistemática puede ser muy provechoso —cuando se dispone de mucho tiempo—, como auxiliar del enfoque sistemático). Por ello, la exposición no puede entrar en los detalles de los diversos sistemas contemplados, sino que se debe centrar en unos cuantos, y quizá en uno en particular —acaso el propuesto por el autor—, aunque siempre de modo crítico, no dogmático, siempre en discusión argumentativa con posiciones alternativas, siempre examinando algunas dificultades de la posición que se esté defendiendo, o que se esté exponiendo de modo axial, y señalándose también argumentos que permitan, ya sea superar esas dificultades, ya sea considerarlas como secundarias.

Enseñar filosofía sistemática es enseñar a filosofar, a razonar en torno a diversas posiciones filosóficas. No puede considerarse a ningún sistema filosófico en particular como el básico, o el troncal, viéndose a los demás como refinamientos suyos. No puede enseñarse una materia filosófica sistemática mediante una exposición dogmática, acrítica, de una única posición, de un sistema particular, ni limitarse a epilogar una exposición semejante (hecha como si no existieran sistemas alternativos, como si no tuviera que hacerse cada paso del desarrollo de una posición sistemática dada en una discusión razonada, nunca interrumpida, con posiciones alternativas) con escuetas alusiones a la existencia de sistemas alternativos.

Sería adocenante el enseñar dogmáticamente un solo sistema de lógica, presentándolo como «la» lógica —o limitarse a, una vez que se ha moldeado las mentes de los estudiantes en un sistema particular, contentarse con una somera información ulterior sobre la existencia de otros sistemas. Tal manera de enseñar sólo desemboca, por regla general, en petrificaciones dogmáticas, en un encallecimiento que hace perder al estudiante su flexibilidad raciocinativa, sumiéndolo en una adusta cerrazón que ciegue su sensibilidad ante diversos modos de razonar, ante el peso —mayor o menor, pero nunca absolutamente inexistente— de motivos aducibles a favor de la validez de algunos de esos modos de razonar, o en contra de otros; en definitiva, tal modo de enseñar habitúa al estudiante a dar por sentado que las cosas son, incontrovertiblemente, de un modo determinado, estando de más (o siendo meros sofismas) las consideraciones que puedan alegarse a favor de otros modos de ver las cosas.

Ya en el plano de la lógica sentencial, es necesario acostumbrar a un estudiante, desde sus primeros contactos, a la existencia de diversos sistemas, con sus respectivos enfoques ontológicos. Si un sistema es bivalente es porque sustenta un principio ontológico de maximalidad, según el cual no existe en absoluto nada intermedio (todo ente es, o totalmente así, o no así en absoluto). Si un sistema es trivalente pero con sólo un valor designado es porque considera que hay indeterminación real, que está objetivamente, realmente, indeterminado el que algunas situaciones se den o dejen de darse. Si un sistema es multivalente, pero con todos los valores no nulos designados, es que admite la existencia de situaciones intermedias, las cuales, a la vez, son reales y son también —en uno u otro grado— irreales (no es que el mundo esté indeterminado, sino que la propia realidad contiene no-ser o irrealidad). No pueden omitirse por entero consideraciones como ésas si se quiere enseñar de veras, de modo raciocinativo y no dogmático, la lógica; porque sólo se aprende lógica si se aprenden lógicas, y si se aprende a contrastarlas y a tener criterios de opción entre ellas —criterios nunca establecidos dogmáticamente por decreto inapelable, siempre en función de consideraciones que gozan de plausibilidad, pero que también están sujetas a discusión y que son susceptibles de reexamen.

Las relaciones que se dan entre diversos sistemas de lógica son muy complejas. Es equivocado concebir a una lógica particular como «la» lógica por excelencia, o como el sistema básico, y ver a sistemas alternativos como desarrollos suyos o desvíos a partir de ella. Tales enfoques simplificadores fueron propugnados con ahínco desesperado por los adeptos recalcitrantes del carácter privilegiado de la lógica clásica. Estuvo de moda durante algún tiempo decir (como lo hizo Tarski) que cualquier sistema de lógica no-clásica es más débil que la lógica clásica. Aunque así fuera, ello no erigiría forzosamente a la lógica clásica en sistema axial o primordial, Pero es que, además, el aserto de Tarski es del todo equivocado, como lo demuestra la existencia de sistemas no-clásicos que son más fuertes que la lógica clásica (en el sentido de que, para determinadas traducciones, contienen todos los teoremas y todas las reglas de inferencia de la lógica clásica). También estuvo de moda decir que la metalógica en la que se expone o fundamenta a un sistema lógico no-clásico ha de ser clásica. Tal error fue refutado por Rescher al probar lo contrario, hace ya un cuarto de siglo. La lógica clásica **puede** ser metalógica en que se presenten o fundamenten sistemas lógicos no clásicos. Pero muchos sistemas no-clásicos pueden establecerse y fundarse en una metateoría articulada según patrones de sistemas no-clásicos (el mismo que se está fundando u otro, aunque no cualquier otro). Es más: la lógica clásica puede ser establecida y fundada por medio de metateorías articuladas según patrones de ciertas lógicas no-clásicas.

Si la lógica clásica no es teóricamente más fundamental ni más importante que otras lógicas, si no goza, con respecto a ellas, de ningún privilegio epistemológicamente legítimo, tampoco es cierto, por otra parte, que la lógica clásica sea más clara o más fácil de adquirir y que, por tal razón, deba ser enseñada antes de una toma de contacto con otros sistemas de lógica. ¡No! Porque, si bien la lógica clásica es más simple que ciertas lógicas no-clásicas —en algún sentido por lo menos—, tal simplicidad se logra a costa de una brutal uniformización a lo Procrusto, que conlleva el sacrificio de matices y que no puede por menos de chocar con la intelección espontánea de las cosas que tienen los estudiantes antes de que el trago amargo de la regimentación clásica los haya hecho insensibles a esos matices del más y del menos. Así, es o ilusoria o, en el mejor de los casos, relativa no más la supuesta ventaja pedagógica que tendría el iniciar a los estudiantes en lógica a través de una fase inicial en que sólo se viera lógica clásica ; si en algún aspecto se da, en otros aspectos, más decisivos, más importantes para la madurez intelectual del estudiante, es lo contrario lo que sucede.

Así pues, enseñar cálculo sentencial no es enseñar sólo un único sistema de cálculo sentencial (sea el clásico u otro cualquiera); y enseñar cálculo cuantificacional no es lo mismo que enseñar un único y particular sistema de cálculo cuantificacional. Enseñar una sola lógica no es enseñar lógica (o no es un modo satisfactorio de enseñar lógica).

Por todas esas razones, no cabe entender un curso de lógica como un adiestramiento o aprendizaje meramente técnico —algo así como el «hacerse la mano» en obras de ebanistería—, realizable apresuradamente, en un corto lapso, y que proporcione, unilateralmente, instrumentos incuestionables para un razonar que sólo después, y valiéndose de ellos, va a poder efectuarse. (La broma de Hegel sobre la fisiología que ayudaría a hacer la digestión no está del todo desplazada frente a enfoques de la lógica de tal simplicidad.) Los instrumentos lógicos son plurales, se agrupan en sistemas diversos y alternativos, debiendo la opción entre ellos ser razonada, y adoptada en función del propio horizonte de intelección, de la manera básica que se tenga de ver el mundo. Para adoptar una lógica hay que saber razonar (eso no impide que la propia reflexión sobre la lógica, sobre a qué compromete la adopción de una lógica en vez de la de otras, ayude a mejor razonar). Y hay que razonar de tal modo que se puedan alegar motivos a favor de la adopción en cuestión —motivos metafísicos, en última instancia.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§5.— ¿Se justifica el monopolio docente de la lógica clásica?

Por otro lado, y puestos a ceñirnos a la exposición de un único sistema de lógica, ¿por qué va a ser la lógica clásica? Tanto derecho, o, mejor dicho, mucho más derecho que ella a presentarse de modo exclusivo (como «la» lógica) tienen otros sistemas. Para justificar tal aserto, nos es menester entrar, sucintamente, en algunas consideraciones sobre las relaciones entre diversos sistemas de lógica.

Tomemos un sistema de lógica, S, y séanos dado otro sistema, S'. Pueden ocurrir las siguientes situaciones: 1ª) que cada teorema de S sea un teorema también de S', y cada regla de inferencia de S sea una regla de inferencia de S', pero no a la inversa (si ocurre también lo inverso, es que S y S' son el mismo sistema); 2ª) que S contenga teoremas, o reglas de inferencia, que S' no contiene, y viceversa; 3ª) la situación inversa de la primera. La diferencia entre la 1ª y la 3ª es secundaria (una inversión de los papeles de S y S'). En la primera situación, S' es una **extensión estricta** de S, mientras que, en la segunda situación, ninguno de los sistemas es una extensión del otro.

(El cuadro se complicaría si introdujéramos otros criterios y elementos de juicio, además de los teoremas —de los enunciados reconocidos como verdaderos— y de las reglas de inferencia —de las reglas entronizadas como preservadoras de la verdad; p.ej., si tuviéramos en cuenta qué **secuentes** aceptan los diversos sistemas, siendo un secuente una serie de inferencias, tales que, si todas salvo la última son válidas, también es válida la última. Pero más vale dejar aquí de lado esas complicaciones; he tratado en detalle esos problemas en otro lugar.) Diremos que dos sistemas que se encuentran en la situación 2ª son rivales, mientras que dos sistemas que se encuentran en la situación 1ª (o en la 3ª) el uno con respecto del otro son alternativos sin ser, exactamente, rivales.

La primera situación se da entre muchas lógicas no-clásicas, que ocupan el lugar de S, y la lógica clásica —que, en ese caso, ocupa el lugar de S'— la cual es más fuerte que ellas, en el sentido de que entroniza, además de todos los teoremas y reglas de inferencia de cada una de esas otras lógicas, otros teoremas y otras reglas que no son entronizados por esas otras lógicas. Podrían decir los adeptos de alguna de esas otras lógicas más débiles que la lógica que ellos defienden es **la** lógica por antonomasia, siendo, en cambio, la lógica clásica más discutible, más sujeta a controversia; porque —dirían— los teoremas que la lógica clásica entroniza y que no están entronizados por la lógica que ellos propugnan son hipótesis respetables pero carentes de evidencia, o incluso —dirían algunos— evidentemente incorrectas, en algunos casos o para algunas instancias o aplicaciones. No me adhiero yo a tal argumento, pero sí creo que quienes lo esgrimen pueden acogerse a motivos que no son desechables así de entrada, y sin cuidadosa discusión.

Ahora bien, la misma situación —la primera— es la que se da entre la lógica clásica, ocupando el lugar de S, y otras lógicas no clásicas (p.ej., la que vamos a desarrollar en estos *Rudimentos*), las cuales ocupan, en ese caso, el lugar de S'. Estas otras lógicas son más fuertes que la clásica, son extensiones estrictas de la lógica clásica. Mas, entonces, ¿dónde está la incompatibilidad o alternatividad entre esas lógicas y la lógica clásica? ¿No cabe ver a esas otras lógicas, después de todo, como la propia lógica clásica ampliada? Porque la lógica clásica puede ser ampliada; p.ej., hay extensiones, o ampliaciones de la lógica clásica, tales como lógicas modales (en las cuales entra como expresión lógica la palabra 'posiblemente'), doxásticas (en las que figura como expresión lógica la palabra 'opinar'), temporales, deónticas, etc. No se ve en qué sean esas lógicas alternativas a la lógica clásica, si toman como base a la lógica clásica y la amplían introduciendo, como expresiones lógicas, palabras que no figuran ni en el cálculo sentencial ni en el cuantificacional.

La diferencia entre ese tipo de extensiones de la lógica clásica y aquellas extensiones que, pese a ser tales, son alternativas con respecto a la lógica clásica es doble. Por un lado, en el caso de estas últimas lógicas, aunque se respetan todos los teoremas y reglas de inferencia de la lógica clásica en su notación simbólica no conservan la misma lectura que se venía dando —que venían dando **todos** los adeptos de la lógica clásica, **sin excepción**— de algunos de los signos que en ellas aparecen. P.ej., en un sistema como el desarrollado en estos *Rudimentos*, de la negación clásica se propone la lectura 'no… en absoluto', siendo tan sólo con la condición de leer así dicha negación como pueden mantener su validez, con respecto a ella, todos los teoremas de la lógica clásica en los que aparece una negación (en la lógica clásica tan sólo hay una única negación). Dicho de otro modo: tomemos cualquier teorema de lógica clásica en que figure el signo '∼' u otro que cumpla el mismo papel, cada uno de esos teoremas es también un teorema del sistema aquí presentado —sustituyendo el signo '∼' por el signo '¬'— pero —bajo la lectura que proponemos— sólo si tal signo se lee 'no es **en absoluto** verdad que' o 'es **de todo punto** falso que'. Y también surgen cambios de lectura en lo tocante a otros signos; así el condicional clásico '⊃', presente en nuestro sistema, para el cual proponen diferentes lecturas los diversos adeptos de la lógica clásica; unos proponen la lectura 'sólo si', que conservamos; otros, en cambio —o adicionalmente—, proponen la lectura 'implica', u otra similar, lectura que nosotros reservamos para el signo '→', que no tiene, ni de lejos, las mismas propiedades que el condicional clásico.

La segunda diferencia estriba en que algunos de los signos adicionales que un sistema como el aquí propuesto sobreañade a los signos que se reconocen como lógicos en el cálculo sentencial clásico son signos del cálculo sentencial, signos a los que sería artificial y hasta forzado considerar como ajenos al cálculo sentencial. P.ej., nuestro sistema, además de la negación clásica '¬', contiene un signo de negación débil (la negación simple o natural, que leemos como un mero 'no'), que escribimos 'N'; si no pertenece al cálculo sentencial ese signo —para el cual no valen todos los teoremas, ni todas las reglas de inferencia que la lógica clásica entroniza para su único functor de negación—, entonces ¿a qué cálculo pertenece? (Por 'cálculo sentencial' entendemos aquella parte de la lógica en la que se toma a las oraciones atómicas como elementos cuya estructura interna no interesa; como oraciones atómicas se toman cualesquiera oraciones suficientemente pequeñas o simples; en el cálculo sentencial clásico no hay más signos lógicos que el 'no' y el 'y' —o, alternativamente, el 'no' y el 'sólo si'; o el 'no' y el 'o'; o uno solo: el 'ni… ni', o el 'o no… o no', tomado como un signo enterizo; claro, cabe objetar que lo que debiera esa lógica tomar como uno de sus signos primitivos fuera, no el 'no', sino el 'no… en absoluto', que es muy distinto. Nuestro propio cálculo **sentencial** incluye, aparte de esos dos signos clásicos, cinco símbolos más: el functor monádico 'Es afirmable con verdad'; el mero 'no' —a diferencia del 'no… en absoluto'; el functor diádico de **super**conyunción 'no sólo… sino también'; el functor diádico de equivalencia 'equivale a'; el functor monádico 'Es cierto, o punto menos, que'. (La presentación del sistema propuesta en estos *Rudimentos*, un poco más económica, toma como únicos símbolos primitivos del cálculo sentencial los seis símbolos siguientes: la constante sentencial 'Existe lo infinitesimalmente real'; el functor diádico 'ni… ni'; el functor diádico 'No sólo… sino también'; el functor diádico 'equivale a'; el functor monádico 'Es totalmente verdad que'; y el signo monádico 'Es afirmable con verdad que'. Pero un mismo sistema puede recibir diversas presentaciones, tomándose en unas u otras de ellas diferentes signos como primitivos.)

Para resaltar más el perfil de esta segunda diferencia, conviene percatarse de cuán diverso resulta extender un cálculo sentencial con signos, y teoremas y reglas de inferencia, que caen fuera del ámbito del cálculo sentencial mismo, que extenderlo dentro de ese mismo ámbito (máxime si, por añadidura, se modifican las lecturas de algunos de los signos, pero incluso cuando así no ocurriera).

Pertrechados con las aclaraciones y puntualizaciones que preceden, volvamos a considerar si, puestos a presentar a los estudiantes de lógica matemática un único sistema, debe escogerse la lógica clásica u otra. Unos, por la senda del minimalismo, dirán que debe presentarse un sistema más débil que la lógica clásica, que deje abiertas diversas opciones, tanto la de extender el sistema según lo hace la lógica clásica como asimismo la de extenderlo según lo hacen sistemas que se hallan, con respecto a la lógica clásica, en la situación descrita más arriba como situación 2ª. El inconveniente de ese minimalismo es que no sabe uno dónde parar, cuándo se ha debilitado bastante, pues siempre hay algún sistema que dé todavía menos; en cualquier caso, ese subastar hacia abajo no parece satisfactorio. Si tenemos un sistema con tercio excluso, los intuicionistas o constructivistas protestarán; y lo mismo si el sistema tiene ley de doble negación; si tiene principio de no-contradicción, protestarán los adeptos de lógicas łukasiewiczianas y del principal cálculo sentencial de da Costa; si tiene principio de identidad, protestarán los adeptos de una lógica «schroedingeriana» —y eso que parecería que el principio de identidad fuera el único incontrovertible; si tiene *modus ponens*, protestarán el lógico G. Priest y otros; los relevantistas reducirán a un magro haber el acervo de verdades sobre el condicional, arrojando por la borda un montón de principios que los demás lógicos consideran correctos. Y, al final, no quedaría nada, no habría verdades lógicas ni reglas de inferencia lógicamente correctas. Claro, puede uno detenerse en medio de esa pendiente resbaladiza; mas un reparo fundamental puede oponerse al principio mismo de minimalidad, según el cual debe escogerse un (¿o el?) sistema mínimo: no hay sistema mínimo de lógica, no hay ningún sistema de lógica cuyos teoremas y cuyas reglas de inferencia sean comunes a todos los sistemas de lógica (ni siquiera a los que se quiera considerar como «razonables» en algún sentido un poco plausible de esa palabra). Para escoger un sistema de lógica, deben emplearse criterios más serios y fuertes que ése de la minimalidad. (Así y todo, nuestras consideraciones al respecto no pretenden zanjar el debate pronunciando una última palabra sobre esa cuestión).

Por otro lado, y desde la dirección opuesta, puede formularse, a favor de un sistema como el aquí presentado, que ese sistema, o un sistema así, es mejor que la lógica clásica, a la cual contiene, sin empero reducirse a ella; en un sistema como el nuestro son verdades todos los teoremas clásicos —bajo determinada lectura—, pero hay otros teoremas más, muchos, muchísimos más, y es que la lógica clásica no contempla más que situaciones extremas: **lo totalmente sí** y **lo totalmente no**, mientras que la realidad está hecha, en su mayor parte, de situaciones intermedias, de un **sí** hasta cierto punto, acompañado de un **no** también hasta cierto punto. La gradualidad es lo que resulta incomprensible e inadmisible si todo lo que hay que decir, en la lógica de oraciones o cálculo sentencial, es lo que dice la lógica clásica. Porque, de atenernos únicamente a la lógica clásica, no habría razonamientos lógicamente válidos en que aparecieran, p.ej., expresiones como ‘no’ (a menos que, perpetrando un abuso, violentemos el ‘no’, forzándolo a ostentar las características de la negación de la lógica clásica); ‘un tanto’; ‘bastante’; ‘enteramente’; ‘un sí es no’, etc. Así, la lógica sentencial no contemplaría situaciones en las que estén involucrados los **matices de verdad**, con lo cual resultaría inaplicable para la casi totalidad de los razonamientos usuales, tanto del habla cotidiana como de los saberes particulares. Reducir, pues, la lógica sentencial a la lógica clásica sería algo así como reducir toda la lógica sentencial a un fragmento, a una parcela de la misma; como decir, p.ej., que la única expresión que debe considerarse con ocurrencias esenciales en verdades de lógica sentencial es el functor condicional ‘sólo si’; en definitiva, sería un empobrecimiento.

Frente a críticas de uno y otro frente, pueden, sin duda, oponer resistencia los adeptos de la lógica clásica, o sea quienes sostienen que la lógica clásica contiene **el** cálculo sentencial, no debiendo considerarse como verdadero ni un cálculo sentencial más reducido o débil ni otro ampliado —ni menos uno rival, que se encuentre, respecto de la lógica clásica, en la situación 2ª. Pero, sea como fuere, no hay nada que haga sacrosanta a la lógica clásica y, si sus adeptos tienen motivos para aferrarse a ella, los partidarios de sistemas alternativos poseen también razones, algunas de ellas de lo más convincentes, para propugnar un sistema no clásico de lógica.

Por otro lado, el injustificable prejuicio de considerar, sin más y como sin necesidad de justificación o argumentación, a la lógica clásica como «la» lógica, prejuicio que tiene —como cualquier otro— sus causas, es de la misma índole que tantos otros prejuicios que han retrasado a lo largo de la historia de la investigación, ya nuevos descubrimientos, ya —aún más a menudo, tal vez— la difusión y admisión de los mismos. Durante siglos fueron la física aristotélica y la astronomía ptolemaica las que ejercieron un monopolio agresivo e intolerante. Hoy sabemos que una física no aristotélica y una astronomía no ptolemaica son, por lo menos, tan respetables, y probablemente más respetables. Luego, frente a las geometrías no euclídeas, se quiso mantener la indiscutibilidad de la geometría euclídea como la única que podría considerarse como candidato aceptable al título de verdadera —e.d., de reflejo de la realidad objetiva. Einstein arruinó ese prejuicio; pero desde luego, como sus teorías no son indiscutibles ni han logrado, ni siquiera con el transcurso de tantos decenios, la unanimidad de los investigadores de ese campo, siguen siendo defendibles diversas hipótesis sobre cuál sea la geometría verdadera.

En filosofía, durante mucho tiempo fue el sistema aristotélico el que ejerció un monopolio altivo e intransigente, y costó lo que costó el lograr que pudieran enseñarse en las universidades sistemas filosóficos **anti**aristotélicos. Muchas vidas académicas fueron quebrantadas, muchos filósofos ilustres apartados de la enseñanza universitaria por aquel oprobioso privilegio del aristotelismo. Y de eso no hace mil años.

En la enseñanza de la lógica, el monopolio sigue estando ocupado por una lógica a la que también cabe llamar '**aristotélica**'; son aristotélicos tanto la lógica griega y medieval —exceptuado el programa (de ahí no pasó) de Nicolás de Cusa— como el sistema de lógica matemática creado por Frege y canonizado por Russell en los *Principia Mathematica* —y que ha encontrado más agradables exposiciones en obras de otros autores, particularmente en la de Quine. Porque es **aristotélica** una lógica que contiene un solo símbolo de negación y que es tal que, de un par de premisas **cualesquiera** con tal que una de ellas sea (la) negación de la otra, permite inferir cualquier conclusión, por más absurda que sea (eso es lo que se llama **regla de Cornubia** —o, más comúnmente, 'regla de Escoto', por haberla formulado un autor medieval cuyo libro fue, equivocadamente, atribuido a Duns Escoto; sin embargo, al parecer el primero en enunciarla había sido Juan de Cornubia). Con otras palabras: una lógica es aristotélica si prohibe tajantemente la contradicción so pena de incoherencia total. Es respetable, y humanamente comprensible, la actitud de quienes siguen aferrados a la lógica clásica. Pero que quieran imponer el monopolio de su lógica sin siquiera tomarse la molestia de elaborar argumentos, como si ese monopolio cayera por su propio peso, eso es lo que parece poco atinado, y hasta puede ser mirado por los partidarios de otras lógicas como una alcaldada cometida al socaire de una posición de fuerza conquistada —en el mejor de los casos— en lucha desigual o, más bien, impuesta arbitrariamente desde arriba, digamos que por atavismo. Así, quienes profesan una lógica no clásica se ven frente a un muro, casi como aquellos a quienes, en otros tiempos, no muy lejanos, estábales prohibido —no ya por las autoridades, sino por los portavoces públicamente reconocidos de la comunidad «científica» o universitaria preponderante— enseñar en la cátedra, o mediante publicaciones, la circulación de la sangre, o el heliocentrismo o —poco ha— la evolución de las especies; aun sin las prohibiciones oficiales, podíanse yugular esas teorías: un investigador que entregaba, a una editorial, un libro en el cual sustentara una de ellas vería seguramente rechazada la publicación de su obra por los expertos asesores de la editorial; un concursante a oposiciones que manifestara opiniones favorables a una de esas teorías sería descartado.

Empeñarse hoy en enseñar lógica enfrascándose en una lógica aristotélica (lo cual sería un derecho, si se reconociera lealmente que con ello se adopta una opción que no es la única racionalmente defendible y que, además, debe tratar de justificarse con argumentos, y no darse por sentada como incuestionable) es, después del descubrimiento de lógicas no clásicas —un descubrimiento de hace ya sesenta y tantos años— como empeñarse en enseñar, hoy día, como geografía universal las concepciones de Estrabón; como agronomía, las de Columela; como medicina, las de Hipócrates (y encima dejar a los estudiantes, a lo menos durante toda la primera fase de su formación, en la ignorancia de que hay otras geografías, otras agronomías, etc.). Desde luego, sería interesante para la formación de los estudiantes de filosofía el recibir algún curso de historia de la lógica (como lo sería también para la formación de los estudiantes de agronomía recibir algún curso de historia de la agronomía); pero eso es muy distinto de impartir, y encima de manera dogmática, sin crítica ni justificación, un sistema determinado (que, a la luz de los descubrimientos de los últimos sesenta años, muchos consideramos obsoleto) como si fuera «la» lógica que hay que aprender, la indiscutible verdad, omitiendo o postergando cualquier otra.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§6.— Motivaciones filosóficas del sistema aquí propuesto

Conviene exponer, sumariamente, algunas de las motivaciones filosóficas subyacentes en la elección del sistema lógico aquí propuesto. Este sistema viene denominado aquí y en otros lugares '**lógica transitiva**', por ser, ante todo, una **lógica de las transiciones**, un tratamiento formalizado de las situaciones de paso o tránsito; en la misma línea de Leibniz, este enfoque considera a los casos (raros y extremos) de **todo o nada** como casos límite únicmente.

Así pues, el sistema aquí brindado, *Aq*, es una lógica **dialéctica**, entendiendo por tal una teoría que reconoce la contradictorialidad y la gradualidad de lo real, o sea: que existen grados de verdad o realidad y también, por consiguiente, de falsedad o irrealidad, y que cuanto es verdadero o real sólo hasta cierto punto —sólo en un grado de verdad no máximo— es también, en uno u otro grado, irreal o falso. Con otras palabras: verdad y falsedad se excluyen, pero no totalmente, sino que, por haber grados inferiores de verdad —que son también grados de falsedad no total—, hay hechos o situaciones que poseen, a la vez, ambas propiedades, en uno u otro grado. Eso sí: ninguna situación contradictoria es totalmente real o verdadera, puesto que contradicción sólo la hay en la medida en que hay gradualidad, de donde se infiere que lo contradictorio, por ser una conyunción de dos verdades una de las cuales es una negación (débil, o simple) de la otra, sólo puede darse en un grado no máximo (y, en verdad, sólo puede darse en una medida que sea, a lo sumo, tan verdadera como falsa, pero nunca más verdadera que falsa). Por eso es correcto decir que se excluyen lo verdadero y lo falso: nada puede ser verdad a la vez que su negación es también verdadera (o sea nada puede ser, a la vez, verdadero y falso) más que en una medida de, a lo sumo, un 50%. Pero, porque también hay (miles y millones de) contradicciones verdaderas en algún grado, por eso lo verdadero y lo falso no se excluyen **totalmente**, sino que en algún grado (en un grado nunca superior al 50%) son compatibles.

Lo contradictorio está, pues, ligado a lo difuso, siendo **difusa** una propiedad tal que hay algún ente cuyo poseer la propiedad en cuestión es un hecho real o verdadero en alguna medida y, a la vez, también falso e irreal en uno u otro grado. La existencia de una propiedad difusa acarrea la de hechos difusos, verdaderos y falsos a la vez; y, por ende, la de contradicciones. Y no hay contradicción verdadera más que en la medida en que resulta de la existencia de alguna propiedad difusa.

No es, pues, menester echar por la borda los principios de no contradicción y de tercio excluso para reconocer la existencia de propiedades difusas y de hechos que son, a la vez, verdaderos y falsos, o sea: tales que sus respectivas negaciones simples son también verdaderas en algún grado; porque lo único que tal existencia conlleva es que determinadas instancias de esos principios, aun siendo verdaderas, son, a la vez, falsas —falsas en algún grado, nunca superior al 50%; o sea: nunca más falsas que verdaderas, sino siempre al menos tan verdaderas como falsas.

Lo que sí hace falta para articular de manera rigurosa esa concepción dialéctica (esa ontología **gradualista contradictorial**) es distinguir la negación débil, simple o natural, el liso y llano 'no' (='es falso que') de la **super**negación o fuerte, del 'no es verdad **en absoluto** que' o 'es **de todo punto** falso que'. Se queda uno boquiabierto al percatarse del desconocimiento de tan elemental y obvio distingo por varias generaciones de adeptos de la lógica clásica, y por muchos filósofos de diversa laya.

Otra consecuencia del enfoque dialéctico que ha motivado la construcción del sistema lógico aquí propuesto es la regla de apencamiento (o regla de aceptación), a saber: la que, de una premisa como «Es, en uno u otro grado, verdad que p» permite inferir ⌜p⌝, a secas. Y es que lo que es verdadero en uno u otro grado es verdadero (a secas): lo es, justamente, en algún grado, no forzosamente en grado máximo. El maximalismo alético es la doctrina diametralmente opuesta a esa regla de apencamiento; los maximalistas aléticos sólo reconocen como verdadero lo totalmente verdadero, por lo cual valdría para ellos una regla rechazada por la dialéctica concepción que anima al enfoque aquí propuesto; esa regla es la regla de maximalización, a saber: de ⌜p⌝ cabe inferir «Es totalmente verdad que p». Pero, ¿cabe inferir de que Wolsey era hábil que Wolsey era totalmente hábil —y que, por consiguiente, no cabe ser más hábil que él? ¡No! ¡De ninguna manera! Luego el maximalismo alético es erróneo.

(Caben, cierto es, posiciones intermedias entre esa doctrina y la admisión de la regla de apencamiento, pero también están sujetas a reparos que he expuesto en muchos otros lugares).

Aunque el sistema lógico propuesto es neutral con respecto a cuán amplia sea la esfera de las propiedades difusas, no sería tan fuerte, tan acuciante, la necesidad de adoptar un sistema como el aquí propuesto si el ámbito de lo difuso fuera pequeño o pudiera confinarse a algún terreno particular de lo real. Pero es convicción de quien esto escribe que son difusas casi todas las propiedades de las cuales hablamos corrientemente tanto en el saber común como en los saberes elaborados a los que llamamos 'ciencias'. De ahí que las lógicas de lo difuso estén teniendo aplicaciones tan útiles y fructíferas en disciplinas como la geografía física, la medicina, la sociología, la economía, la biología, esperándose resultados importantes en áreas como la física. Y, cosa que pudiera asombrar a muchos, en la propia matemática se han encontrado aplicaciones interesantísimas, con aritméticas difusas, cálculo integral difuso, topología difusa, etc. Es también convicción del autor de este libro que hay graduaciones, y por ende contradicciones, en lo moral, valorativo y jurídico (de ahí los conflictos de valores y de deberes); en lo modal (posibilidad y necesidad), en lo temporal (simultaneidad, vs anterioridad); en lo doxástico y epistémico (hay grados de convicción y grados de saber, por lo cual hay cosas que sabemos sin saberlas), etc. Filosóficamente, la lógica de lo difuso tiene abierto un anchuroso camino y puede aportar soluciones a innumerables problemas —p.ej., al problema del movimiento, tal como se expresa en la paradoja zenoniana de la flecha.

Otra tesis de la ontología dialéctica que sustenta, y ha motivado, la construcción del sistema lógico aquí propuesto es la de que, si bien se dan infinitos grados de realidad o verdad, existe un grado ínfimo de realidad, que es lo que podemos llamar 'lo infinitesimalmente real o verdadero' o 'lo un sí es no verdadero o real'. Es menester reconocer su existencia por diversos motivos, algunos de los cuales aparecerán en estos *Rudimentos*: de no haber tal grado ínfimo, veríamonos abocados a una situación lógicamente inextricable, a saber: que, aunque cada cosa cumpliera, en uno u otro grado, cierta condición o característica, fuera, sin embargo, del todo falsa la afirmación de que todas las cosas cumplen esa condición o característica.

Otra tesis que viene articulada en el sistema de lógica aquí propuesto es la de que cada cosa es, a la vez, idéntica a sí misma y no idéntica a sí misma, pues, siendo la identidad una relación, supone —es más: contiene o envuelve— alguna alteridad o distinción, por lo cual, al no darse nunca, **entre una cosa y sí misma**, total alteridad, no puede darse tampoco una **total** identidad de la cosa consigo misma. (Débese a Platón y a Hegel esa concepción dialéctica de la identidad como involucrando alguna alteridad o distinción, y, por consiguiente, alguna falta de identidad —y, por lo tanto, como no siendo nunca **absolutamente** verdadera.) Por otro lado, sólo aceptando la tesis de que cada hecho es, a la vez y en la misma medida, equivalente y no equivalente a sí mismo (y, por lo tanto, idéntico y no idéntico consigo mismo) se pueden reconocer al functor de equivalencia propiedades sin las cuales el cálculo sentencial resultaría inadecuado, truncado.

Otro principio incorporado a mi sistema de lógica es que sólo puede ser afirmado con verdad lo que es real o verdadero en todos los aspectos de lo real, salvo cuando, implícitamente, se está pensando en algún aspecto particular, y, al decir de algo que es verdad, se sobreentiende (mediante elipsis comunicacionalmente lícita) que ese algo es verdadero en el aspecto en cuestión, e.d. que se da tal algo en dicho aspecto. El reconocimiento de infinitos aspectos de lo real nos permite ver lo real en su calidoscópica complejidad, y comprender cómo puede una cosa ser más real que otra en ciertos aspectos, siendo empero menos real que esa otra cosa entre otros aspectos.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§7.— Aclaración de algunas nociones

1.— Por **lógica clásica** entendemos la lógica bivalente verifuncional, LBV para abreviar. Trátase de cualquier lógica cuyo cálculo sentencial tenga como verdades todas, y sólo, las fórmulas que son válidas con respecto a una semántica de **dos valores de verdad** juntamente exhaustivos y mutuamente exclusivos. Dicho de otro modo: tómense dos valores de verdad, uno **designado** (lo Verdadero), y otro no designado (lo Falso); un valor de verdad es designado ssi es afirmable cualquier oración que tenga dicho valor de verdad. Estipúlese la verifuncionalidad de los functores ‘y’ y ‘no’, e.d. que, para cualesquiera oraciones ⌜p⌝ y ⌜q⌝, una vez determinados los valores de verdad de ⌜p⌝ y de ⌜q⌝, resultan: un valor de verdad determinado para ⌜p y q⌝; un valor de verdad determinado para ⌜q y p⌝ (el mismo); un valor de verdad determinado para ⌜no p⌝; y un valor de verdad determinado para ⌜no q⌝. Obviamente, lo que hay que estipular es que el valor de ⌜p y q⌝ es lo Verdadero ssi tanto el de ⌜p⌝ como el de ⌜q⌝ son lo Verdadero; en caso contrario, el valor de ⌜p y q⌝ es lo Falso; y que, para un enunciado cualquiera ⌜r⌝, si el valor de ⌜r⌝ es lo Verdadero, el de ⌜no-r⌝ es lo Falso, y viceversa. (Para ser exactos, y según nuestro propio enfoque, habría que decir que eso ‘no’ debería entenderse, no como el liso y llano ‘no’, sino como el ‘no… **en absoluto**’.) Supuesto lo cual, tomemos el cúmulo de todas las verdades en las que las únicas ocurrencias esenciales son de ‘y’ y/o de ‘no’ y que seguirían siendo tales, suponiendo que cada oración tuviera uno, pero sólo uno, de entre esos dos valores de verdad.

2.— Una teoría es un cúmulo de oraciones o fórmulas —las cuales son los teoremas **de la teoría**— que esté cerrado con respecto a alguna[s] regla[s] de inferencia. Lo cual se explica como sigue: tómese cierta regla de inferencia —que es una regla de inferencia **de la teoría**—, y tómese una aplicación de la regla $\Gamma \vdash p$ (donde Γ es un cúmulo de fórmulas y ⌜p⌝ una fórmula, significándose con ‘$\vdash$’ que la fórmula que está a la derecha de ese signo se infiere del cúmulo formado por las fórmulas que están a la izquierda o que pertenecen al cúmulo cuyo nombre se escribe a la izquierda). Supóngase que Γ sólo contiene teoremas de la teoría en cuestión; entonces ⌜p⌝ es también un teorema de dicha teoría.

Nótese que cada teoría ha de tener, además de teoremas y reglas de inferencia, reglas de formación, o sea ciertas reglas en virtud de las cuales determinadas inscripciones sean fórmulas sintácticamente bien formadas (de la teoría) y otras cosas no lo sean.

3.— Una teoría es **delicuescente** (o endeble, o deleznable) ssi cada una de las fórmulas sintácticamente bien formadas (de la teoría) es un teorema de la teoría.

Una teoría es **sólida** o **coherente** ssi no es delicuescente. En las teorías coherentes hay oraciones que no son afirmadas por la teoría, o sea: que no son teoremas de la teoría. Una teoría delicuescente lo afirma todo, por más absurdo que sea. Por ello, las teorías delicuescentes son absurdas e indefendibles.

4.— Por **contradicción** entenderemos aquí cualquier fórmula de la forma ⌜p y ~p⌝, siendo ‘~’ un **functor de negación**. Una contradicción simple (o sea: lisa y llana) es una fórmula de la forma ⌜p y no p⌝. Una **super**contradicción es una fórmula de la forma «p y no es verdad en absoluto que p», o sea: es la conyunción de dos oraciones una de las cuales es la **super**negación de la otra. (Toda supercontradicción es absurda; pero hay contradicciones razonables y —hasta cierto punto— verdaderas.)

Basten las aclaraciones que preceden para un adentramiento en el presente libro. El lector irá desentrañando otras por el contexto. Por rudimentarios que pretendan ser estos *Rudimentos*, han de dejar un margen a la imaginativa busca de aquellos a quienes va destinado.

SECCIÓN I

EL CÁLCULO SENTENCIAL

Capítulo 1º.— SÍMBOLOS BÁSICOS DEL SISTEMA, Y LECTURAS DE LOS MISMOS

Convendrá tener presente en cuanto sigue unas normas con respecto al modo de evitar ambigüedades de alcance de los functores: 1ª) cada vez que, en una fórmula total, aparezca una ocurrencia de un functor inmediatamente seguida de un punto, se entiende que ese functor tiene como su alcance derecho a toda la parte de la fórmula total que queda a la derecha de dicho punto; 2ª) cada fórmula encerrada entre paréntesis se comporta, con respecto al resto —con respecto a lo que está fuera de los paréntesis—, como una unidad indivisa, si bien, dentro de los paréntesis, operan las mismas normas —o sea: se trata a la fórmula encerrada entre paréntesis, en lo tocante a su escritura **interna**, como si fuera una fórmula total); 3ª) las ambigüedades restantes se evitan tomando a los functores como asociativos hacia la izquierda, lo que significa que, si ‘δ’ y ‘η’ son functores diádicos cualesquiera, una fórmula, o subfórmula, como ⌜pδqηr⌝, p.ej., debe entenderse como ⌜((pδq)ηr)⌝; 4ª) cada functor monádico tiene como su alcance la más corta fórmula que lo siga.

Pasemos ahora a exponer la base del sistema *Aj* y luego a desarrollar la demostración de teoremas.

REGLAS DE FORMACIÓN

1ª.— El símbolo ‘a’ es una fbf

2ª.— Si ⌜p⌝ y ⌜q⌝ son fbfs, también lo son ⌜Hp⌝, ⌜Bp⌝, ⌜p↓q⌝, ⌜p•q⌝ y ⌜pIq⌝.

Las lecturas de los seis símbolos primitivos son las siguientes:

‘a’ se lee: (Existe) lo infinitesimalmente real = (Existe lo infinitesimalmente verdadero = (Existe) el grado ínfimo de verdad (=de realidad) = (Existe) lo un sí es no verdadero o real.

⌜Hp⌝ se lee: Es totalmente (=enteramente = completamente = plenamente = de todo punto = ciento por ciento) verdad (=cierto) que p.

⌜Bp⌝ se lee: Es afirmable con verdad que p = Es realmente (=verdaderamente) cierto que p = Es un hecho genuinamente real que p.

⌜p•q⌝ se lee: No sólo p, sino que también q = p así como q.

⌜p↓q⌝ se lee: Ni p ni q.

⌜pIq⌝ se lee: Se da equivalencia entre el hecho de que p y el de que q = El hecho de que p equivale al hecho de que q = El hecho de que p y el hecho de que q se implican mutuamente = Es (exactamente) tan verdad que p como que q. Que sea verdad que p equivale a que sea verdad que q = que suceda que p equivale a que suceda que q = El ser verdad que p equivale al ser verdad que q, etc. (Por comodidad, léase: p equivale a q.)

DEFINICIONES (Recuérdese que una definición es una abreviación)

df01 ⌜0⌝ eq ⌜aIa↓aI.a↓a⌝	df02 ⌜Np⌝ eq ⌜p↓p⌝
df03 ⌜¬p⌝ eq ⌜HNp⌝	df04 ⌜p∨q⌝ eq ⌜N(p↓q)⌝
df05 ⌜p∧q⌝ eq ⌜Np↓Nq⌝	df06 ⌜p⊃q⌜ eq ⌜¬p∨q⌝
df07 ⌜p&q⌝ eq ⌜N(p⊃Nq)⌝	df08 ⌜1⌝ eq ⌜N0⌝
df09 ⌜Sp⌝ eq ⌜p∧Np⌝	df10 ⌜p≡q⌝ eq ⌜p⊃q∧.q⊃p⌝
df11 ⌜½⌝ eq ⌜aIa⌝	df12 ⌜Lp⌝ eq ⌜N¬p⌝
df13 ⌜Xp⌝ eq ⌜p•p⌝	df14 ⌜p→q⌝ eq ⌜p∧qIp⌝
df15 ⌜pZq⌝ eq ⌜Np∨q⌝	df16 ⌜gp⌝ eq ⌜p∨a⌝
df17 ⌜p\q⌝ eq ⌜p→q∧¬(q→p)⌝	df18 ⌜å⌝ eq ⌜Na⌝
df19 ⌜np⌝ eq ⌜p•å⌝	df20 ⌜mp⌝ eq ⌜NnNp⌝
df21 ⌜pGq⌝ eq ⌜B(p⊃q)⌝	df22 ⌜Kp⌝ eq ⌜NXNp⌝
df23 ⌜p↕q⌝ eq ⌜p→q∧.q⊃p⌝	df24 ⌜Yp⌝ eq ⌜pIa∧p⌝
df25 ⌜p=q⌝ eq ⌜b(pIq)⌝	df26 ⌜fp⌝ eq ⌜¬Yp∧p⌝
df27 ⌜p⇒q⌝ eq ⌜B(p→q)⌝	df28 ⌜Pp⌝ eq ⌜Np→p&p⌝
df29 ⌜pRq⌝ eq ⌜fp⊃fq⌝	df30 ⌜ƒp⌝ eq ⌜np\p&fSp⌝
df31 ⌜p╪q⌝ eq ⌜¬(p=q)⌝	df32 ⌜℘p⌝ eq ⌜Pp∧¬PNp⌝
df33 ⌜pQq⌝ eq ⌜Pp⊃Pq⌝	df34 ⌜bp⌝ eq ⌜Np→a&p⌝
df35 ⌜Jp⌝ eq ⌜¬B¬p⌝	df36 ⌜pMq⌝ eq ⌜Pp≡Pq⌝

En total, he introducido 36 definiciones. El lector no necesita memorizarlas todas desde ya, sino que se irá acostumbrando, con el manejo del libro, poco a poco, a ellas. Lo que deberá hacer, cada vez que encuentre por primera vez uno de esos símbolos definidos en lo que sigue, es volver a este lugar, y, entonces sí, tratar de memorizar la definición. De momento, bástele con memorizar aproximadamente las 20 primeras. Para ayudar a una lectura de los axiomas y teoremas, y también a una memorización de las definiciones, propongo ahora las siguientes lecturas para los símbolos definidos:

⌜0⌝ léase: (Existe) lo totalmente (=completamente = enteramente = ciento por ciento = de todo punto) falso o irreal = (Existe) lo absolutamente falso o irreal.

⌜Np⌝ léase: No es verdad que p = No es cierto que p = Es falso que p = Es verdad (= cierto) que no p = No sucede que p = No se da el caso de que p = Sucede que no p, etc.

⌜¬p⌝ léase: Es totalmente (=de todo punto =completamente = enteramente = ciento por ciento) falso que p = No es en absoluto cierto (= verdad) que p = No sucede en absoluto que p.

⌜p∨q⌝ léase: (o) p o q = p a menos que q.

⌜p⊃q⌝ léase: Si p, (entonces) q = p sólo si q = El hecho de que p entraña (=acarrea=conlleva) al hecho de que q = El ser verdad (=el suceder) que p entraña el ser verdad (el suceder) que q.

⌜p∧q⌝ léase: p y q

⌜p&q⌝ léase: Dándose el caso de que p, q = Siendo verdad (=sucediendo) que p, q = p y, sobre todo, q.

⌜1⌝ léase: (Existe) lo absolutamente real = (Existe) lo totalmente (=enteramente, etc.) real o verdadero = (Existe) la Verdad = (Existe) la Realidad.

⌜Sp⌝ léase: Es, y no es, verdad que p = p y no p = ni p ni no p = Ni es verdad, ni deja de serlo, que p = Es verdadero y falso a la vez que p.

⌜p≡q⌝ léase: p si, y sólo si, q (abreviadamente: p ssi q) = El hecho de (=el ser verdad) que p y el hecho de (=el ser verdad) que p se entrañan (=acarrean=conllevan) mutuamente.

⌜½⌝ léase: (Existe) lo que es (exactamente) tan verdadero como falso = (Existe) el punto de equidistancia entre verdad total y falsedad total.

⌜Lp⌝ léase: Es más o menos (=(por lo menos) hasta cierto punto = en uno u otro grado = en mayor o menor medida = (poco o mucho) verdad (=cierto) que p.

⌜Xp⌝ léase: Es muy cierto (=verdadero) que p = Es un hecho muy real que p = Es muy real el hecho de que p.

⌜p→q⌝ léase: El hecho de (=el suceder = el ser verdad) que p implica al hecho de (al suceder = al ser verdad) de que q = El hecho de que p es a lo sumo tan verdadero como el (hecho) de que q = El hecho de que q es por lo menos tan verdadero como el (hecho) de que p = Que sea verdad (=cierto) que p implica que sea verdad que q = Que suceda que p implica que suceda que q. (Por comodidad léase: p implica q).

⌜pZq⌝ léase: Es falso que p a menos que suceda que q.

⌜gp⌝ léase: Es verdad (=cierto), o punto menos, que p = Sucede que p, o punto menos.

⌜p\q⌝ léase: Es menos cierto (=verdadero) que p que (no) que q = Ess más verdadero (=cierto) que q que (no) que p = El hecho de (=el suceder = el ser verdad) que p es menos real que el (hecho de = el suceder = el ser verdad) que q = El hecho de (= el ser verdad) que q es más real que el hecho de =el ser verdad = el suceder) que p.

⌜å⌝ léase: (Existe) lo infinitesimalmente falso (=irreal) = (Existe) lo que es falso o irreal, pero sólo en el grado ínfimo = (Existe) lo un sí es no falso o irreal.

⌜np⌝ léase: Es supercierto que p.

⌜mp⌝ léase: Viene a ser verdad (=cierto) que p.

⌜pGq⌝ léase: Es afirmable con verdad (= es un hecho genuinamente real) que, si p, entonces q.

⌜Kp⌝ léase: Es (por lo menos) un poco cierto (=verdadero=real) (el hecho de) que p.

⌜Yp⌝ léase: Es infinitesimalmente (= un sí es no) verdadero (=cierto=real) (el hecho de) que p = Sucede que p (pero sólo) en el grado ínfimo.

⌜p=q⌝ léase: El hecho de (= el ser verdad = el suceder) que p equivale estrictamente al (hecho de) (=al ser verdad = al suceder) que q = Es afirmable con verdad que el hecho de que p y el de que q se equivalen mutuamente = El hecho de que p es, estricta y exactamente, tan verdadero (=real) como el de que q. (Por comodidad léase: p equivale estrictamente a q.)

⌜fp⌝ léase: Es más que infinitesimalmente real (=verdadero=cierto) (el hecho de) que p = Es un tanto cierto (=verdadero=real) (el hecho de) que p.

⌜p⇒q⌝ léase: El hecho de (= el ser verdad = el suceder) que p implica estrictamente al hecho de (= al ser verdad = al suceder) que q = Es afirmable con verdad que el suceder que p es a lo sumo tan real como el suceder que q, etc. (Por comodidad, léase: p implica estrictamente q).

⌜Pp⌝ léase: Es más bien cierto que p.

⌜pRq⌝ léase: el que sea un tanto cierto (=verdadero=real) (el hecho de) que p entraña (=conlleva) el que también lo sea (el hecho de) que q = Es un tanto cierto que p sólo si también lo es que q.

⌜p╪q⌝ léase: Difiere la verdad de (= el ser verdad) que p de la de (= el ser verdad) que q = El hecho de que p y el de que q son diversos (diferentes) = No se da en absoluto equivalencia estricta entre que suceda que p y que suceda que q. (Por comodidad léase: p difiere de q).

⌜℘p⌝ léase: Es bastante cierto (=verdadero=real) (el hecho de) que p.

⌜pQq⌝ léase: El que sea más bien cierto que p conlleva (=entraña) el que también lo sea que q = Es más bien cierto que p sólo si también lo es que q = El ser más bien real el hecho de que p conlleva el ser más bien real el hecho de que q.

⌜bp⌝ léase: Es infinitamente cierto (=verdadero=real) (el hecho de) que p.

⌜Jp⌝ léase: Es (a lo menos) relativamente verdad que p = El hecho de que p es (por lo menos) relativamente real = Es, de algún modo (por lo menos), verdad que p.

⌜pMq⌝ léase: El que sea más bien cierto que p y el que lo sea que q se entrañan mutuamente.

Se observará que no he propuesto lectura alguna ni para ‘↕’ ni para ‘*f*’. La lectura sería rebuscada. Es preferible no tratar de leer esos functores directamente, sino remitirse a las definiciones de los mismos y ver en ellos meras abreviaturas.

Un puntico que conviene tener presente es que, en esas y otras lecturas, ‘cierto’, en castellano, significa lo mismo que ‘verdadero’. Mientras que en griego se dice ἀληθέστατον y ἀληθέστερον y en latín se dice ‘uerissimum’ y ‘uerius’ (‘verdaderísimo’ y ‘más verdadero’), y en francés se dice ‘très vrai’ y ‘plus vrai’, y en inglés se dice ‘very true’ y ‘truer’, y en alemán se dice ‘sehr wahr’, ‘das Wahreste’ y ‘wahrer’ (‘muy verdadero’, ‘lo más verdadero’, y ‘más verdadero’), en español, en cambio, suele reemplazarse ‘verdadero’ por ‘cierto’, sobre todo cuando ‘verdadero’ va afectado por un modificador o «adverbio» de grado o va en comparativo. Así, es más corriente decir ‘Es cierto que la Luna es redonda’ que ‘Es verdad que la luna es redonda’ y, sobre todo, es mucho más corriente decir ‘Es sumamente cierto que sin agua no hay vida’ que no ‘Es sumamente verdadero que sin agua no hay vida’. ‘Cierto’, pues, en todos estos y muchos otros contextos, no significa ‘seguro’, sino que es un alomorfo (e.d. un sinónimo) de ‘verdadero’, con diferencia **meramente estilística**.

El lector hará bien en tratar de escribir por sí mismo, tomando como letras esquemáticas p, q, r, s, p’, q’, …, p”, q”, …, etc. y asignando a cada letra, como lectura, la oración que se le pase por las mientes, un gran número de fórmulas, usando functores tanto primitivos como definidos.

En la exposición de axiomas y teoremas (que serán, antes bien, **esquemas** axiomáticos y teoremáticos), emplearemos p, q, r, s, p’, etc. como letras esquemáticas, o sea: pseudosignos que pueden ser reemplazados por cualquier oración, pero uniformemente (o sea: dentro de una fórmula total, podemos reemplazar cada ocurrencia de p, p.ej., por una ocurrencia respectiva de determinada oración, pero siempre y cuando no sustituyamos dos ocurrencias diferentes de p en esa fórmula total por ocurrencias respectivas de dos oraciones diferentes).

Capítulo 2º.— ESQUEMAS AXIOMÁTICOS Y REGLAS DE INFERENCIA

ESQUEMAS AXIOMÁTICOS

A01 q∧p⊃q

A02 r∧sIp⊃(p↓qI.q↓s∨.q↓r)∧.Bp∨B¬BLp∧.Bp⊃(BpIp)∧.p⇒q⊃.Bp→Bq

A03 pIq⊃(rIqI.pIr)∧.KXpIp∧.p•q↕(p∧q)∧.Y(p•q)⊃(Yp∨Yq)∧.fSp∧fSq⊃p•q\p

A04 p∧q∨pIp∧.Hp∧HqILH(p∧q)∧.pIq⊃(Hp∨HrIH(q∨r))∧.p•1Ip∧.ƒp∧fNq⊃¬ƒN(p•mq)

A05 pINqI(NpIq)∧.pIpIN(pIp)∧.p’∧pIq⊃.q•r•sI.s•r•p∧.s•p’•r

A06 pIq⊃(q⊃p)∧.mp→mnp∨Hp∧.mp→np≡(Yp∨YNp)∧.q→np∨(pImq)∧Lp∨.p→q

Valdría la pena que el lector se ejercitara en tratar de leer esos esquemas axiomáticos (ya sea leyendo ‘p’, ‘q’ y ‘r’ como están escritas, recordando que son sólo letras esquemáticas o pseudosignos [como, por decirlo así, puntos suspensivos de diversos colores, a ser —cada uno según su color— uniformemente sustituidos, en cada fórmula total, por una oración determinada], ya sea sustituyéndolos por cualesquiera oraciones arbitrariamente escogidas, pero variándolas de una lectura a otra); y, así, tratar de captar la plausibilidad de muchos de ellos. Algunos de esos esquemas axiomáticos no aparecen tan claramente plausibles a primera vista a la mirada de quien no está acostumbrado a trabajar con el sistema; la plausibilidad de los mismos debe justificarse con motivos filosóficos, **ontológicos**, o, alternativamente, debe ir apareciendo en función de que esos axiomas son los que permiten probar, a partir de una base axiomática reducida, los teoremas que se desea obtener para el cálculo sentencial en general, e.d. conclusiones que parecen ser verdaderas para oraciones cualesquiera y en las cuales las únicas ocurrencias que se toman como esenciales son las de los seis signos primitivos que nos hemos dado —o de cualesquiera signos definidos a partir de ellos. (Sobre la noción de ‘ocurrencia esencial’, véase lo dicho en la Introducción de este libro.)

De todos modos, el lector que lo desee puede prescindir de ejercitarse en la lectura de los axiomas, de momento, pues ya se irá ejercitando en ella a medida que vayamos presentando las pruebas de teoremas; y, entonces, poco a poco, irán entrando en escena los diversos axiomas, según vaya conviniendo. Y lo que así va a ser indispensable es que el lector se vaya ejercitando en la lectura y comprensión de los teoremas.

REGLAS DE INFERENCIA

Las dos únicas reglas de inferencia que nos damos son el *modus ponens* y la **regla de afirmabilidad**; a la primera la llamamos ‘rinf01’ y a la segunda ‘rinf02’:

rinf01 p , p⊃q ⊦ q

rinf02 p ⊦ Bp

Voy a explicar la regla rinf01: supongamos que afirmamos el enunciado ⌜p⌝; supongamos, además, que también afirmamos «p sólo si q»; entonces es correcto (lícito, legítimo) que también afirmemos ⌜q⌝. Dicho de otro modo: de la afirmación de que ⌜p⊃q⌝ (e.d. de que, si sucede que p, también sucede que q) cabe inferir que q. Expresado aún de otra manera: Suponiendo afirmables con verdad tanto a lo dicho por el enunciado ⌜p⌝ como a lo dicho por el enunciado ⌜p⊃q⌝, resultará afirmable con verdad asimismo lo dicho por el enunciado ⌜q⌝.

Obsérvese que la regla podría expresarse sin alteración alguna así: p⊃q , p ⊦ q

Y es que el orden de las premisas no altera la validez de la inferencia. Eso es así para esta regla y para cualquier otra regla de inferencia, primitiva o derivada. Si de un par de premisas se infiere o deduce correctamente una conclusión, nada importa cuál de las dos premisas haya sido proferida primero.

Expliquemos ahora la regla de afirmabilidad, rinf02. Esta regla nos permite inferir, de una premisa ⌜p⌝, la conclusión «Es afirmable con verdad que p» —permaneciendo ⌜p⌝ inalterable de la premisa a la conclusión, por supuesto. La regla se justifica por lo siguiente: supongamos que la premisa ⌜p⌝ es verdadera, verdadera en el sentido propio y fuerte de ser afirmable con verdad (o sea: verdadera en todos los aspectos). Entonces es verdad que es afirmable con verdad lo dicho por esa premisa, e.d. el hecho de que p; y eso es lo que dice la conclusión: que es afirmable con verdad que p. Supongamos, en cambio, ahora que sea del todo falsa la conclusión, a saber: que es afirmable con verdad que p; entonces es del todo injustificado afirmar o sentar la premisa, al no ser verdad **en absoluto** que sea afirmable con verdad lo dicho por la premisa, e.d. el hecho de que p.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 3º.— DESARROLLO DEL SISTEMA

La base de un sistema deductivo, como *Aj*, está constituida por sus axiomas y sus reglas de inferencia primitivas. Se desarrolla el sistema demostrando teoremas no axiomáticos (pues, si todos los axiomas son teoremas, no todos los teoremas son axiomas, ni de lejos) y derivando reglas de inferencia no primitivas.

En esos procesos de demostración y derivación seguiré las normas que se indican a continuación:

1º.— Cada prueba o derivación consta de varias líneas. A la izquierda de cada fórmula expuesta en una línea —y, separado de ella— figura, encerrado entre paréntesis, un número entero positivo que se considerará como un **nombre de la fórmula** en cuestión. (En esos números sólo figurarán los guarismos del 2 al 9 por las razones abajo indicadas —en el punto 4º.)

2º.— En cada línea, a la derecha de la fórmula que en ella se asevera —y separados de ella—, figuran los nombres de los teoremas, reglas de inferencia y/o fórmulas previamente probadas —éstas últimas, probadas dentro de la misma prueba o derivación— (y, asimismo, de las hipótesis de que se parte, en el caso de que se trate, no de una prueba de un teorema, sino de una derivación de una regla de inferencia) que justifican la aserción de la fórmula expuesta en esa línea.

3º.— Si al nombre de una fórmula expuesta en una línea (o sea: al número entero positivo encerrado entre paréntesis que figura en la línea, a la izquierda de la fórmula en cuestión) se le quita el par de paréntesis, el resultado es una **abreviación** de la fórmula por él nombrada. (Una abreviación de una fórmula es algo diferente del nombre de la fórmula.) En cambio, los nombres de teoremas (cada uno de los cuales consta de una 'A' seguida de un número entero positivo) se utilizarán también como abreviaciones de los teoremas que ellos nombran —para mayor simplicidad. Todas esas abreviaciones —tanto las de líneas previamente probadas o deducidas dentro de la misma prueba o derivación, como las de teoremas previamente probados en el desarrollo del sistema— podrán aparecer en líneas ulteriores, como subfórmulas de la fórmula total que figure en tal línea ulterior. (Pero las abreviaciones de líneas de una prueba sólo podrán ser utilizadas en líneas ulteriores de la misma prueba.)

4º.— Como '1' y '0' son dos signos del sistema *Aj* (dos constantes sentenciales definidas), se ha preferido —para evitar confusiones— que esos dos guarismos no figuren en ninguna abreviación de fórmula alguna expuesta en una línea de una prueba o derivación, ni, por consiguiente, tampoco en el nombre de la misma.

5º.— Presento separadamente la derivación de reglas de inferencia no primitivas y la demostración de teoremas. Ahora bien, en la derivación de muchas reglas de inferencia no primitivas se presuponen, como **ya** demostrados, ciertos teoremas; y en la demostración de muchos teoremas se presuponen, como **ya** derivadas, ciertas reglas de inferencia no primitivas. Pero el lector podrá observar cuidadosamente, al toparse —en la derivación de una regla de inferencia— con una referencia justificatoria a un teorema que no sea un axioma, que la regla de inferencia que se está derivando no ha sido utilizada **ni** en la prueba del aludido teorema, **ni** tampoco —¡claro está!— en la prueba de ningún otro teorema anterior al mismo; y podrá asimismo comprobar, al toparse —en la prueba de un teorema— con una referencia jusitificatoria a una regla de inferencia no primitiva, que **ni** en la derivación de la misma **ni** en la de ninguna otra regla de inferencia anterior se ha aducido el teorema que se está demostrando. (Si se hubiera hecho alguna de esas dos cosas, se hubiera incurrido en una viciosa circularidad, que invalidaría la prueba o derivación.)

6º.— Cada fórmula es, o bien una fórmula atómica, o bien una fórmula que comienza por una ocurrencia de un functor monádico, o bien una fórmula que tiene como functor principal una ocurrencia de un functor diádico; en este último caso, la fórmula tendrá un miembro derecho y otro izquierdo. Sea un número cualquiera, ‘3’, p.ej., una abreviación de tal fórmula; entonces ‘σ3’ será una abreviación de su miembro izquierdo; y ‘δ3’ una abreviación de su miembro derecho. (El uso de la sigma se hace por referencia a la palabra griega ‘σκαιόν’, mientras que el de la delta alude a la palabra griega ‘δεξιόν’.) También podrá escribirse ‘σσ3’, ‘σδ3’, ‘δσ3’, ‘σσδ3’, y así sucesivamente, con significados claros y obvios.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 4º.— DERIVACIÓN DE REGLAS DE INFERENCIA NO PRIMITIVAS

rinf11 $pIq \vdash qIp$

Derivación:

hip	pIq	
(2)	pIq⊃.qIp	A108
	qIp	rinf01, hip, (2)

rinf12 $pIq \vdash p \supset q$

Derivación:

hip	pIq	
(2)	qIp	hip,rinf11
(3)	qIp⊃.p⊃q	A103
	p⊃q	(2),(3),rinf01

rinf13 p, $pIq \vdash q$ (Derivación: rinf12, rinf01)

rinf14 p , $qIp \vdash q$ (Derivación: rinf11, rinf13) rinf15 pIq, qIr ⊢ pIr

Derivación:

hip2ª	qIr	
hip1ª	pIq	
(2)	rIqI.pIr	hip1ª, A101, rinf01
(3)	rIq⊃.pIr	(2), rinf12
(4)	rIq	hip2ª, rinf11
	pIr	(4), (3), rinf01

rinf16 pIq ⊢ q↓rI.r↓p

Derivación:

hip	pIq	
(2)	p∧pIq	A119, hip, rinf15
(3)	q↓rI.r↓p∨.r↓p	(2), A120, rinf01
(4)	r↓p∨(r↓p)I.r↓p	A118
	q↓rI.r↓p	(3), (4), rinf15

rinf16bis pIq ⊢ p∨rI.q∨r

Derivación:

hip	pIq	
(2)	q↓rI.r↓p	hip, rinf16
(3)	r↓pI.p↓r	A121
(4)	q↓rI.p↓r	(2), (3), rinf15
(5)	p↓rI.q↓r	(4), rinf11
(6)	N(p↓r)IN(q↓r)	(5), A114,rinf01
	p∨rI.q∨r	(6), df04

rinf17 pIq ⊢ p∧rI.q∧r

Derivación:

hip	pIq	
(2)	NpINq	hip, A114, rinf01
(3)	Nq↓NrI.Nr↓Np	(2), rinf16
(4)	Nr↓NpI.Np↓Nr	A121
(5)	Nq↓NrI.Np↓Nr	(3), (4), rinf15
(6)	q∧rI.p∧r	(5), df05
	p∧rI.q∧r	(6), rinf11

rinf18 pIq ⊢ q∧rI.p∧r

Derivación: rinf17, rinf11

rinf19 pIq ⊢ q∨rI.p∨r

Derivación: rinf16bis, rinf11

rinf20 pIq ⊢ r∧pI.r∧q

Derivación:

hip	pIq	
(2)	p∧rI.q∧r	hip, rinf17
(3)	q∧rI.p∧r	hip, rinf18
(4)	q∧rI.r∧q	A122
(5)	r∧pI.p∧r	A122
(6)	r∧pI.q∧r	(5), (2), rinf15
	r∧pI.r∧q	(6), (4), rinf15

rinf21 pIq ⊢ r∨pI.r∨q

Derivación:

hip	pIq	

rinf22 p∧q ⊢ q

Derivación:

hip	p∧q	
(2)	p∧qI.q∧p	A122

(2) p∨rI.q∨r hip, rinf16bis
(3) q∨rI.r∨q A123
(4) p∨rI.r∨q (2), (3), rinf15
(5) r∨pI.p∨r A123
r∨pI.r∨q (5), (4), rinf15

rinf24 p , p⊃q , q⊃r ├ r
Derivación:
hip1ª p
hip2ª p⊃q
hip3ª q⊃r
(2) q hip1ª, hip2ª, rinf01
r (2), hip3ª, rinf01

rinf25bis pIq ├ ¬pI¬q
Derivación:
hip pIq
(2) NpINq hip, A114, rinf01
(3) HNpIHNq (2), rinf25
¬pI¬q (3), df03

(3) q∧p hip, (2), rinf13
q (3), A01, rinf01

rinf23 p∧q ├ p
Derivación:
hip p∧q
(2) p∧q⊃p A01
p hip, A01, rinf01

rinf25 pIq ├ HpIHq
Derivación:
hip pIq
(2) Hp∨HqIH(q∨q) hip, A150/1, rinf0
(3) H(q∨q)IHq A150/3
(4) Hp∨HqIHq (2), (3), rinf15
(5) qIp hip, rinf11
(6) Hq∨HpIHp (de (5), como (4) de hip)
(7) HpI.Hq∨Hp (6), rinf11
(8) Hq∨HpI.Hp∨Hq A123
(9) HpI.Hp∨Hq (7), (8), rinf15
HpIHq (9), (4), rinf15

rinf26 pIq , pIr ├ qIr
Derivación:
hip1ª pIq
hip2ª pIr
(2) qIp hip1ª, rinf11
qIr (2), hip2ª, rinf15

rinf27 qIp , rIp ├ qIr
Derivación:
hip1ª qIp
hip2ª rIp
(2) pIr hip2ª, rinf11
qIr hip1ª, (2), rinf15

rinf27bis pIq ├ p↓rI.q↓r
Derivación:
hip pIq
(2) qIp hip, rinf11

rinf28 p , q ├ p∧q
Derivación:
hip1ª p
hip2ª q

(3)	$p{\downarrow}rI.r{\downarrow}q$	(2), rinf16
(4)	$r{\downarrow}qI.q{\downarrow}r$	A121
	$p{\downarrow}rI.q{\downarrow}r$	(4), (3), rinf15

(2)	$q\supset.p\wedge q$	hip1ª, A150/9, rinf01
	$p\wedge q$	hip2ª, (2), rinf01

rinf29 $p{\to}q$, $q{\to}p$ $\vdash$ pIq

Derivación:

hip1ª	$p{\to}q$	
hip2ª	$q{\to}p$	
(2)	$p\wedge qIp$	hip1ª, df14
(3)	$q\wedge pIq$	hip2ª, df14
(4)	$pI.q\wedge p$	(2), A122, rinf20
	pIq	(4), (3), rinf15

rinf30 pIq $\vdash$ $p\supset rI.q\supset r$

Derivación:

hip	pIq	
(2)	$\neg pI\neg q$	hip, rinf25bis
(3)	$\neg p\vee rI.\neg q\vee r$	(2), rinf16bis
	$p\supset rI.q\supset r$	(3), df06

rinf31 pIp' , $p'Ip''$, $p''Ip'''$, …, $p^{n-1}Ip^n$ $\vdash$ pIp^n

Derivación:

hip1ª	pIp'	
hip2ª	$p'Ip''$	
hip3ª	$p''Ip'''$	
.		
.		
hipnª	$p^{n-1}Ip^n$	
(2)	pIp''	hip1ª, hip2ª, rinf15
(3)	pIp'''	(2), hip3ª, rinf15
.		
(n)	pIp^n	(n-1), hipnª, rinf15

rinf32 pIq $\vdash$ rIr' (si ⌜r⌝ es una fórmula en la que ⌜p⌝ figura afectado sólo por ocurrencias de ‘I’, ‘H’, ‘↓’, mientras que ⌜r’⌝ sólo difiere de ⌜r⌝ por el reemplazamiento de un número finito cualquiera de ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜r⌝ por otras tantas ocurrencias respectivas de ⌜q⌝)

Efectúase la derivación por **inducción matemática**. La inducción matemática es un procedimiento que se funda en el principio siguiente (principio de inducción matemática). Supongamos que se quiere probar que un teorema vale para un número cualquiera de entes que satisfagan determinada condición. Para probarlo basta demostrar:

1º) que para al menos un ente que satisfaga la condición en cuestión el teorema es correcto;

2º) que, si es correcto para un número n —cualquiera que sea n— de entes que satisfagan la condición, también valdrá para n+1.

Ahora bien, derivar una regla de inferencia es probar un teorema sintáctico —o, si se quiere, metalingüístico— que dice: si una o varias fórmulas de tal y/o cual tipo son dadas como premisas, entonces otra fórmula de determinado tipo es obtenida como conclusión.

La regla rinf32 nos dice: si una fórmula del tipo ⌜pIq⌝ es una premisa, entonces una fórmula del tipo ⌜rIr’⌝ es obtenible de ella como conclusión válida (siempre y cuando ⌜r⌝ y ⌜r’⌝ sean como se indica en la explicación añadida a la regla).

Voy a probar, en primer lugar, que la regla vale para el caso en que ⌜r’⌝ sólo difiera de ⌜r⌝ en la sustitución de una sola ocurrencia de ⌜p⌝ por otra de ⌜q⌝; y luego que, si la regla vale para n sustituciones, entonces vale también para n+1 sustituciones.

Por supuesto, al valer la regla para ocurrencias afectadas por los functores ‘I’, ‘H’ y ‘↓’, vale también para ocurrencias afectadas por cualesquiera functores definidos sólo a partir de esos tres. Por todo lo cual vale la regla para cualesquiera contextos en que una de las dos fórmulas cuya equivalencia se supone en la premisa esté afectada por alguno de los siguientes functores: ¬, ∨, ∧, ⊃, &, N, S, ≡, →, L, Z, \, P, ℘, Q, M. (Luego demostraré que vale la regla también para functores definidos a partir de ‘a’ y de ‘•’; pero no es eso lo que ahora se prueba.)

Voy a derivar la regla por partes. Primero la probaré para el caso de que ⌜r’⌝ sólo difiera de ⌜r⌝ por el reemplazamiento de **una** sola ocurrencia de ⌜p⌝ en ⌜r⌝ por una ocurrencia respectiva de ⌜q⌝.

Pero también aquí iré por partes, y acudiré a una inducción matemática particular incrustada dentro de la inducción matemática general en que consiste toda la derivación.

Esta inducción matemática **particular** estriba en lo siguiente: Se prueba, primero, que la regla vale para el caso de que ⌜p⌝ esté afectada en ⌜r⌝ por una sola ocurrencia de uno de los tres functores primitivos. (Una fórmula, ⌜p⌝, está afectada por una ocurrencia de un functor ‘☼’ ssi ⌜p⌝ es miembro —derecho o izquierdo— de un miembro —derecho o izquierdo— de un miembro —derecho o izquierdo— … de la mencionada ocurrencia de ‘☼’ —o sea: de una fórmula cuyo functor principal es dicha ocurrencia de ‘☼’; y diremos que una fórmula cualquiera precedida inmediatamente por una ocurrencia de un functor monádico es miembro derecho de tal ocurrencia.)

En segundo lugar, pruébase que, si la regla de inferencia restringida a una sola sustitución de ⌜p⌝ por ⌜q⌝ vale para el caso de que ⌜p⌝ esté afectado en ⌜r⌝ por n ocurrencias de cualesquiera de los tres functores primitivos, entonces también vale para el caso de que ⌜p⌝ esté afectado en ⌜r⌝ por n+1 ocurrencias de cualesquiera de esos tres functores primitivos.

Así pues, empecemos haciendo la derivación para el primer caso del primer caso:

hip	pIq	
(2)	p↓rI.q↓r	hip, rinf27bis
(3)	HpIHq	hip, A160, rinf01
(4)	rIqI.pIr	hip, A101, rinf01
(5)	pIrI.rIq	(4), rinf11
(6)	rIqI.qIr	A107
(7)	pIrI.qIr	(5), (6), rinf15
(8)	pIrI.rIp	A107
(9)	rIqI.rIp	(4), (8), rinf15
(22)	rIpI.rIq	(9), rinf11
(23)	q↓rI.r↓q	A121
(24)	r↓pI.p↓r	A121

(25) r↓pI.q↓r (24), (2), rinf15

(26) r↓pI.r↓q (25), (23), rinf15

Así pues, he demostrado que de la premisa ⌜pIq⌝ se desprenden las conclusiones: ⌜p↓rI.q↓r⌝ (2); ⌜r↓pI.r↓q⌝ (26); ⌜pIrI.qIr⌝ (7); ⌜rIpI.rIq⌝ (22); ⌜HpIHq⌝ (3). Ahora bien, esas cinco fórmulas son **todas** las fórmulas del tipo ⌜rIr'⌝ en las que ⌜r⌝ difiere de ⌜r'⌝ por la sustitución de una sola ocurrencia de ⌜p⌝ por una sola ocurrencia de ⌜q⌝, y estando en cada caso afectado ⌜p⌝, en ⌜r⌝, sólo por los functores '↓', 'I' y 'H', ya sea como miembro derecho ya sea también —en los casos de '↓' y 'I'— como miembro izquierdo. Por tanto, para una sola ocurrencia de ⌜p⌝ en ⌜r⌝, y para el caso de que ⌜p⌝ esté afectado en ⌜r⌝ por una sola ocurrencia de alguno de esos tres functores, la regla de inferencia es válida.

Veamos ahora cómo se generaliza, suponiendo siempre que la sustitución se efectúa sobre una sola ocurrencia de ⌜p⌝ en ⌜r⌝. Lo que ahora hay que probar es que, si la regla vale —siempre para una sola sustitución de ⌜p⌝ por ⌜q⌝— cuando ⌜r⌝ contiene n ocurrencias de cualesquiera de esos tres functores que estén afectando a ⌜p⌝, también vale entonces para cuando ⌜r⌝ contiene, **además**, una ocurrencia suplementaria de 'H', '↓' o 'I'.

Supongamos, pues, que se ha probado ya que la regla es válida para n ocurrencias de cada uno de esos functores, o sea que, de la hipótesis, se ha deducido (27), a saber:

(27) rIr'

(siendo ⌜r'⌝ el resultado de reemplazar una ocurrencia de ⌜p⌝ por otra de ⌜q⌝, y estando afectado ⌜p⌝ en ⌜r⌝ por n ocurrencias de cualesquiera de esos tres functores).

(28) sIs'

(siendo ⌜s⌝ una de estas fórmulas: ⌜Hr⌝, ⌜p'↓r⌝, ⌜r↓p'⌝, ⌜p'Ir⌝, ⌜rIp'⌝; y siendo ⌜s'⌝ el resultado de reemplazar ⌜r⌝ por ⌜r'⌝ en ⌜s⌝ —o sea: el resultado de reemplazar **una** ocurrencia de ⌜p⌝ en ⌜s⌝ por una ocurrencia de ⌜q⌝).

Pues bien, se pasa de (27) a (28) del mismo modo que de la hipótesis originaria se pasaba a (3), (26), (2), (22) y (7).

Así pues, de la premisa ⌜pIq⌝ he deducido (suponiendo que la fórmula ⌜r'⌝ difiere de ⌜r⌝ tan sólo por la sustitución de una ocurrencia de ⌜p⌝ en ⌜r⌝ por otra de ⌜q⌝) que:

1º) Si ⌜p⌝ está afectado en ⌜r⌝ por una sola ocurrencia de cualquiera de esos tres functores, podemos concluir ⌜rIr'⌝;

2º) Si concluir ⌜rIr'⌝ está justificado cuando ⌜p⌝ está afectado en ⌜r⌝ por n ocurrencias de cualesquiera de esos tres functores, entonces el concluir ⌜rIr'⌝ estará también justificado cuando ⌜p⌝ esté afectado en ⌜r⌝ por n+1 ocurrencias de cualesquiera de esos tres functores.

Por consiguiente —y en virtud del principio ya explicado de inducción matemática—, el tránsito de la premisa ⌜pIq⌝ a la conclusión ⌜rIr'⌝ está siempre justificado, siendo ⌜r⌝ una fórmula cualquiera en la cual no esté afectado ⌜p⌝ sino por functores definidos a partir de 'H', '↓' y/o 'I' —incluyendo esos tres functores mismos—, con tal que ⌜r'⌝ sólo difiera de ⌜r⌝ por la sustitución de **una** ocurrencia de ⌜p⌝ en ⌜r⌝ por una ocurrencia respectiva de ⌜q⌝.

Nos falta ahora probar el segundo paso de la inducción matemática general en que consiste nuestra derivación. Supongo el antecedente (y sigo suponiendo la hipótesis originaria, o sea: la premisa ⌜pIq⌝); ese antecedente será (29)):

(29) rIr'

(siendo ⌜r⌝ una fórmula cualquiera, y difiriendo ⌜r'⌝ de ⌜r⌝ por la sustitución de n ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜r⌝ por n ocurrencias respectivas de ⌜q⌝, y no estando afectado ⌜p⌝ en ⌜r⌝ más que por ocurrencias de los tres functores considerados).

Queremos probar que también será válida la regla:

pIq ⊦ sIs'

(O sea: queremos deducir ⌜sIs'⌝, ya que seguimos estando suponiendo la hipótesis ⌜pIq⌝). La fórmula ⌜s'⌝ diferirá de ⌜s⌝ por la sustitución de n+1 ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜s⌝ por otras tantas ocurrencias respectivas de ⌜q⌝.

Sea ⌜s''⌝ resultado de sustituir n ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜s⌝ por n ocurrencias respectivas de ⌜q⌝. Ya sabemos (en virtud de (29) que:

(32) sIs''

Pero ⌜s⌝ sólo difiere de ⌜s''⌝ por la sustitución de **una** ocurrencia de ⌜p⌝ por una ocurrencia respectiva de ⌜q⌝. Luego —en virtud de la hipótesis originaria (⌜pIq⌝) y del primer paso, ya demostrado, de toda la derivación:

(33) s''Is'

(34) sIs' (32), (33), rinf15

Por consiguiente, de (29) se infiere (34); o sea: si la regla vale para el caso de que ⌜r'⌝ sólo difiera de ⌜r⌝ por la sustitución de n ocurrencias de ⌜p⌝ por n ocurrencias respectivas de ⌜q⌝, entonces también vale para el caso de que ⌜r'⌝ difiera de ⌜r⌝ por la sustitución de n+1 ocurrencias de ⌜p⌝ por n+1 ocurrencias respectivas de ⌜q⌝. Y con ello ha quedado demostrado el segundo paso de la inducción matemática general.

Con lo cual queda concluida la inducción matemática general que habíamos abordado. Es decir, queda derivada la regla rinf32.

rinf33 p⊃q , q⊃r ⊦ p⊃r

Derivación:

hip1ª p⊃q

hip2ª q⊃r

(2)	p⊃q⊃.q⊃r⊃.p⊃r	A172
(3)	q⊃r⊃.p⊃r	(2), hip1ª, rinf01
	p⊃r	(3), hip2ª, rinf01

rinf34 p⊃p' , p'⊃p'' , … p^{n-1}⊃p^{n} ⊦ p⊃p^{n}

Derivación:

hip1ª p⊃p'

hip2ª p'⊃p''

.

.

.

hipnª p^{n-1}⊃p^{n}

(2)	p⊃p''	hip1ª, hip2ª, rinf33

.

.

.

(n-1) $p\supset p^{n-1}$ hip(n-1)ª, (n-2), rinf33

$p\supset p^{n}$ (n-1), hipnª, rinf33

rinf35 $p\supset.q\supset r$, $r\supset r'$, $r'\supset r''$, …, $r^{n-1}\supset r^{n}$ $\vdash$ $p\supset.q\supset r^{n}$

Derivación:

hip1ª $p\supset.q\supset r$

hip2ª $r\supset r'$

hip3ª $r'\supset r''$

.

.

hip(n+1)ª $r^{n-1}\supset r^{n}$

(2) $r\supset r^{n}$ hip2ª… hip(n+1)ª, rinf34

(3) $q\supset r\supset.q\supset r^{n}$ A173, (2), rinf01

(4) $p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.q\supset r^{n}$ (3), A173, rinf01

$p\supset.q\supset r^{n}$ (4), hip1ª, rinf01

rinf36 $r\supset r'$, $r'\supset r''$, …, $r^{n-1}\supset r^{n}$, $p\supset.q\supset.q'\supset r$ $\vdash$ $p\supset.q\supset.q'\supset r^{n}$

Derivación: A181, rinf34

rinf37 $r\supset r'$, $r'\supset r''$, …, $r^{n-1}\supset r^{n}$, $p\supset.q\supset.q'\supset.q''\supset r$ $\vdash$ $p\supset.q\supset.q'\supset.q''\supset r^{n}$

Derivación: A182, rinf34

rinf38 p , $\neg p$ $\vdash$ q (Derivación: rinf28, A207, rinf01)

rinf39 p $\vdash$ $p\vee q$ (Derivación: A162, rinf01)

rinf40 $p\vee q$, $\neg p$ $\vdash$ q (Derivación: A128, rinf13, rinf01, A207)

rinf41 $p\supset r$, $q\supset s$, $p\vee q$ $\vdash$ $r\vee s$ (Derivación: A221, rinf28, rinf01)

rinf41/1 $p\supset r$, $p\vee q$ $\vdash$ $r\vee q$ (Derivación: rinf41, A116)

rinf42 $p\supset r$, $q\supset r$, $p\vee q$ $\vdash$ r (Derivación: A221/2, rinf28, rinf01)

rinf43 p $\vdash$ Lp (Derivación: A194, rinf01)

rinf44 Lp $\vdash$ p (Derivación: A200, rinf01)

rinf45 $p\supset q$, $\neg q$ $\vdash$ $\neg p$ (Derivación: A214, rinf01)

rinf46 p $\vdash$ $q\supset p$ (Derivación: A164, rinf01)

rinf47 $p\rightarrow q$ $\vdash$ $p\supset q$ (Derivación: A218, rinf01) rinf48 Si ⌜r⌝ es una fórmula en la cual figura una ocurrencia de ⌜Lp⌝ afectada sólo por functores (definidos a partir de '↓', 'H' y/o 'I', se puede reemplazar tal ocurrencia de ⌜Lp⌝ por una ocurrencia) de ⌜HLp⌝. Derivación: A151, rinf32

rinf49 Como rinf 48, sólo que, en lugar de hablarse de una sola ocurrencia de ⌜Lp⌝ se habla de cualquier número de las mismas; y, en vez de hablarse de ocurrencias respectivas de ⌜HLp⌝ se habla de ocurrencias respectivas de ⌜H…HLp⌝, o sea: del resultado de prefijar a ⌜Lp⌝ cualquier número de ocurrencias del functor 'H'. Se deriva de rinf47 por inducción matemática.

rinf50 Como rinf48 invirtiendo 'H' y 'L'. (Derivación a partir de A254 y rinf32)

rinf51 Como rinf49, invirtiendo 'H' y 'L' (Derivación a partir de rinf50 por inducción matemática.)

rinf52 q ├ pIp'∧(rIr')⊃s

(donde ⌜s⌝ no difiere de ⌜q⌝ más que por el reemplazamiento de n ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜q⌝ por ocurrencias respectivas de ⌜p'⌝, y de m ocurrencias de ⌜r⌝ en ⌜q⌝ por ocurrencias respectivas de ⌜r'⌝ y no estando afectadas esas ocurrencias de ⌜q⌝ y de ⌜r⌝ por otros functores que '↓', 'H', 'I' y los definidos a partir de esos tres). Derivación: A242, rinf01

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 5º.— ALGUNOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES SOBRE LA EQUIVALENCIA

A101 pIq⊃.rIqI.pIr

Prueba:

(2)	pIq⊃(rIqI.pIr)∧s⊃.pIq⊃.rIqI.pIr	A01
(3)	A03⊃.pIq⊃.rIqI.pIr	(2)
	A101	A03, (3), rinf01

A102 p∧q∨pIp

Prueba:

(2)	p∧q∨pIp∧r⊃.p∧q∨pIq	A01
(3)	A04⊃.p∧q∨pIp	(2)
	p∧q∨pIp	(3), A04, rinf01

A103 pIq⊃.q⊃p

Prueba:

(2)	pIq⊃(q⊃p)∧r⊃.pIq⊃.q⊃p	A01
(3)	A06⊃.pIq⊃.q⊃p	(2)
	pIq⊃.q⊃p	A06, (3), rinf01

A104 pIp

Prueba:

(2)	$p\land q\lor pIp\supset.pIpI.p\land q\lor pIp$	A101
(3)	$pIpI.p\land q\lor pIp$	A102, (2), rinf01
(4)	$3\supset.p\land q\lor pIp\supset.pIp$	A103
(5)	$p\land q\lor pIp\supset.pIp$	(3), (4), rinf01
	pIp	A102, (5), rinf01

A105 pINqI.NpIq

Prueba:

(2)	$pINqI(NpIq)\land r\supset.pINqI.NpIq$	A01
(3)	$A05\supset.pINqI.NpIq$	(2)
	pINqI.NpIq	A05, (3), rinf01

A106 pINNp

Prueba:

(2)	pINNpI.NpINp	A105
(3)	$2\supset.NpINp\supset.pINNp$	A103
(4)	$NpINp\supset.pINNp$	(2), (3), rinf01
(5)	NpINp	A104
	pINNp	(5), (4), rinf01

Voy a hacer aquí un alto para explicar, con todo detalle, cómo operan las pruebas que acabo de exponer y, en particular, cómo se efectúa la sustitución de una letra esquemática por una fórmula o un esquema, a fin de que el lector se familiarice con la técnica, y pueda, en adelante, aplicarla él mismo o seguir las demostraciones con facilidad —y sin muletas adicionales.

Recuérdese, en primer lugar, que las letras ‘p’, ‘q’, ‘r’, ‘s’ etc. son usadas aquí como letras esquemáticas, lo cual significa que, al enunciar (o, mejor, pseudoenunciar) un esquema, como A01, se están enunciando implícitamente cualesquiera resultados de reemplazar —uniformemente, eso sí— cada una de esas letras por una oración. Por eso, cabe reemplazar cada letra esquemática (de un esquema, pseudoenunciado), por un esquema; y el resultado de ese reemplazamiento será otro esquema, también pseudoenunciado: al pseudoenunciarlo, lo que estamos haciendo es enunciar, **implícitamente**, cada una de las instancias sustitutivas del mismo, e.d. cada una de las oraciones resultantes de reemplazar, uniformemente, en el nuevo esquema, cada letra esquemática por una oración. Es lícito el reemplazamiento de una letra esquemática, en un esquema dado, por un esquema porque, si es verdadera cada instancia sustitutiva del esquema dado, entonces también lo es cada instancia sustitutiva del esquema resultante del reemplazamiento, toda vez que cada instancia sustitutiva de este último esquema resulta ser también una instancia sustitutiva del esquema dado. Al resultado de reemplazar, uniformemente, en un esquema dado, una o varias letras esquemáticas por respectivos esquemas lo llamaré: ‘una instancia reemplazativa’ —o también ‘una aplicación’— del esquema dado.

Así, tomemos el esquema A01, a saber: $\ulcorner q\land p\supset q\urcorner$. Sustituyendo letras esquemáticas por esquemas, tenemos, como aplicaciones válidas de A01: $\ulcorner r\lor s\land.(p\land p')\supset.r\lor s\urcorner$, donde la letra ‘q’ del esquema dado (de A01) ha sido reemplazada por el esquema $\ulcorner r\lor s\urcorner$; y donde la letra ‘p’ ha sido reemplazada por el esquema $\ulcorner p\land p'\urcorner$. Como caso particular de reemplazamiento de una letra esquemática por un esquema tenemos el reemplazamiento de una letra esquemática por otra, tanto si ésta otra figura en el esquema dado como si no: todo lo que se pide es que el reemplazamiento sea uniforme. Así, son aplicaciones de A01 las siguientes: $\ulcorner q\land(r\supset s)\supset q\urcorner$ (donde ‘q’ ha sido reemplazada por ‘q’ —que es como decir que no ha habido, con respecto a ‘q’, reemplazamiento alguno—, siendo ‘p’ reemplazada por el esquema

⌜r⊃s⌝); ⌜p∧(s∨r)⊃p⌝ (donde ‘q’ ha sido reemplazada por ‘p’, siendo, en cambio, ‘p’ reemplazado por ⌜s∨r⌝); ⌜p∧q⊃p⌝ (donde ‘p’ ha sido reemplazado por ‘q’, siendo, en cambio, ‘q’ reemplazado por ‘p’).

Apliquemos tales consideraciones a la prueba de A101. Como esquema resultante de A01, mediante reemplazamiento de letras por esquemas, tomamos el siguiente:

pIq⊃(rIqI.pIr)∧s⊃.pIq⊃.rIqI.pIr

donde el esquema ⌜pIq⊃(rIqI.pIr)⌝ ha reemplazado, en A01, a la letra ‘q’, mientras que la letra ‘s’ ha reemplazado, también en A01, a la letra ‘p’. La línea (2) de la prueba de A101 nos dice, pues, que tal reemplazamiento es legítimo. Luego, para pasar de (2) a (3) de la prueba de A101, reemplazamos ‘s’ por el miembro conyuntivo derecho de A03 (en una conyunción cualquiera ⌜p∧q⌝, ⌜p⌝ es el miembro conyuntivo izquierdo, y ⌜q⌝ el miembro conyuntivo derecho —otro tanto vale para la disyunción y los miembros disyuntivos); el resultado del reemplazamiento es, exactamente, un esquema condicional cuya prótasis es A03 y cuya apódosis es el miembro conyuntivo izquierdo de A03 (el miembro conyuntivo derecho de A03 es ⌜KXpIp∧.p•q↕(p∧q)∧.Y(p•q)⊃(Yp∨Yq)∧.fSp∧fSq⊃.p•q\p⌝). Así, reemplazando, en (2), la letra ‘s’ por ese largo miembro conyuntivo derecho de A03 tenemos una instancia reemplazativa o aplicación válida de (2), o sea: un esquema resultante del esquema (2) por reemplazamiento de letras esquemáticas por esquemas. Aplicando el *modus ponens*, o sea rinf01, tenemos: A03 y (3) (que es de la forma ⌜p⊃q⌝, donde ‘p’ es reemplazada por A03, y donde ‘q’ es reemplazada por A101); de donde inferimos A101 (ése es el tránsito de (3) a la conclusión, o sea: a la aserción de A101).

En la prueba de A102 tomamos (línea (2)) como instancia reemplazativa de A01 un esquema resultante de A01 por el reemplazamiento de la ‘q’ de A01 por el esquema ⌜p∧q∨pIp⌝ y de la ‘p’ de A01 por la letra esquemática ‘r’ (una letra esquemática es un esquema, de la forma más simple). Luego, para pasar de (2) a (3), reemplazamos la ‘r’ de (2) por el miembro conyuntivo derecho de A04. El resultado es una instancia reemplazativa de (2), a saber (3), el cual es un esquema condicional cuya prótasis es exactamente A04 y cuya apódosis es A102. Luego, como tenemos A04 y (3), aplicando rinf01 inferimos A102; o sea. como aplicación de rinf01, reemplazamos, en la primera premisa de rinf01, que es ⌜p⌝ (una oración cualquiera) por A04; en la segunda premisa de rinf01, reemplazamos, de nuevo (puesto que el reemplazamiento ha de ser uniforme en todas las premisas de una regla de inferencia), ⌜p⌝ por A04; y reemplazamos, a la vez, en esa segunda premisa, ⌜q⌝ por A102. Y, en la conclusión, reemplazamos, de nuevo (como en la segunda premisa) ⌜q⌝ por A102.

Pasemos a la prueba de A103. Tomamos de nuevo, como línea (2) de la prueba, una instancia reemplazativa de A01, resultante de A01 mediante el reemplazamiento de la ‘q’ de A01 por el esquema ⌜pIq⊃.q⊃p⌝, y de la ‘p’ de A01 por la letra esquemática ‘r’. Luego, para pasar de (2) a (3), obtenemos una instancia reemplazativa de (2) mediante el reemplazamiento de la ‘r’ de (2) por el miembro conyuntivo derecho de A06 (a saber: ⌜mp→mnp∨Hp∧.mp→np≡(Yp∨YNp)∧.q→np∨(pImq)∧Lp∨.p→q)⌝. El resultado, o sea (3), es un esquema condicional en el cual la prótasis es A06, siendo la apódosis A103. Luego, aplicando rinf01 al par de premisas A06 y (3), inferimos A103.

Pasemos a la prueba de A104. Tomamos como línea (2) de la prueba de A104 una instancia reemplazativa de A101, a saber: aquella en que reemplazamos: 1º) la ‘p’ de A101 por el esquema ⌜p∧q∨p⌝; 2º) la ‘q’ de A101 por la letra esquemática ‘p’; 3º) la ‘r’ de A101 por ‘p’. El resultado, (2), es un esquema condicional cuya prótasis resulta ser exactamente el esquema A102, ya demostrado. Luego, aplicando rinf01 a A102 y (2), obtenemos como conclusión la línea (3), que es el esquema: ⌜pIpI.p∧q∨pIp⌝. Luego, como línea (4), tomamos una instancia reemplazativa de A103, en la cual hemos reemplazado: la ‘p’ de A103, por el esquema ⌜pIp⌝; y la letra ‘q’ de A103, por el esquema ⌜p∧q∨pIp⌝. El resultado del reemplazamiento es: ⌜pIpI(p∧q∨pIp)⊃.p∧q∨pIp⊃.pIp⌝. Ese esquema, que es la línea (4) escrita con toda explicitud, es un esquema condicional, cuya prótasis resulta ser exactamente (3), siendo la apódosis el esquema ⌜p∧q∨pIp⊃.pIp⌝. Tal esquema es la línea (5), la cual se infiere, por rinf01, del par de premisas (3) y (4). Luego, para pasar de (5) a la conclusión (o sea: a A104), se usa de nuevo rinf01, puesto que (5) es un esquema condicional cuya prótasis es exactamente A102, siendo su apódosis A104; lo que nos permite aplicar rinf01 como sigue: en la primera premisa de rinf01, reemplazamos ‘p’ por A102; en la segunda premisa de rinf01, reemplazamos ‘p’ por A102 (como ya no podíamos por menos de hacer, dado el reemplazamiento operado con respecto a la primera premisa), y ‘q’ por A104; así, la premisa segunda resulta ser, exactamente, la línea (5). En la conclusión, por consiguiente, reemplazamos ‘q’ por A104, o sea, por: ⌜pIp⌝.

Veamos, por último (en lo restante del libro el lector ya podrá, en este particular, volar con sus propias alas), la prueba de A105. La línea (2) es, de nuevo, una instancia reemplazativa de A01, la cual resulta de A01 al reemplazar: la ‘q’ de A01 por el esquema ⌜pINqI(NpIq)⌝; y la ‘p’ de A01 por la letra esquemática ‘r’. Pasamos de (2) a (3) reemplazando, en (2), ‘r’ por el largo miembro conyuntivo derecho de A05, siendo el resultado de tal reemplazamiento la propia línea (3), que es un esquema condicional cuya prótasis resulta ser, exactamente, A05, resultando, además, su apódosis ser exactamente A105. Luego, aplicando rinf01 al par de premisas formado por A05 y (3), obtendremos la deseada conclusión: A105.

Prosigamos, pues, la tarea de demostrar nuevos esquemas teoremáticos.

A107 pIqI.qIp

Prueba:

(2)	qIq⊃.pIqI.qIp	A101
(3)	qIp	A104
	pIqI.qIp	(3), (2), rinf01

A108 pIq⊃.qIp

Prueba:

(2)	qIpI.pIq	A107
(3)	qIpI(pIq)⊃.pIq⊃.qIp	A103
	pIq⊃.qIp	(2), (3), rinf01

A109 pIqI.NNqIp

Prueba:

(2)	qINNq	A106
(3)	NNqIq	(2), rinf11
(4)	NNqIq⊃.pIqI.NNqIp	A101
	pIqI.NNqIp	(3), (4), rinf01

A110 pIqI.pINNq

Prueba:

(2)	NNqIpI.pINNq	A107
	A110	A109. (2), rinf15

A111 pINNqI.pIq (Prueba: A110, rinf11)

A112 NpINqI.pIq

Prueba:

(2)	pINNqI(pIq)⊃.NpINqI(pIq)I.pINNqI.NpINq	A101
(3)	δ2	A111, (2), rinf01
(4)	pINNqI(NpINq)	A105
(5)	3⊃.4⊃.NpINqI.pIq	A103
(6)	4⊃.NpINqI.pIq	(3), (5), rinf01
	A112	(4), (6), rinf01

A113 pIqI.NpINq (Prueba: A112, rinf11)

A114 pIq⊃.NpINq (Prueba: A113, rinf12)

A115 NpINq⊃.pIq

Prueba:

(2)	A113⊃A115	A103
	A115	A113, (2), rinf01

A116 p⊃q (Prueba: A104, rinf12)

A117 ¬p∨p (Prueba: A116, df06)

A118 p∨pIp

Prueba:

(2)	pINNp	A106
(3)	pIN(p↓p)	(2), df02
(4)	pI.p∨p	(3), df04
	p∨pIp	(4), rinf11

A119 p∧pIp

Prueba:

(2)	Np∨NpINp	A118
(3)	N(Np↓Np)INp	(2), df04
(4)	Np↓NpIp	(3), A115, rinf01
	p∧pIp	(4), df05

A120 r∧sIp⊃.p↓qI.q↓s∨.q↓r (Prueba: A02, A01, rinf01)

A121 p↓qI.q↓p

Prueba:

(2)	p∧pIp⊃.p↓qI.q↓p∨.q↓p	A120
(3)	δ2	(2), A119, rinf01
(4)	q↓p∨(q↓p)I.q↓p	A118
	p↓qI.q↓p	(3), (4), rinf15

A122 p∧qI.q∧p

Prueba:

(2)	Np↓NqI.Nq↓Np	A121
	p∧qI.q∧p	(2), df05

A123 p∨qI.q∨p

(2)	N(p↓q)IN(q↓p)	A121, A114, rinf01
	p∨qI.q∨p	(2), df04

A124 Nq∧NpI.q↓p

Prueba:

(2)	pINNp	A106
(3)	NNp↓qI.q↓p	(2), rinf16
(4)	qINNq	A106
(5)	NNq↓NNpI.NNp↓q	(4), rinf16
(6)	NNq↓NNpI.q↓p	(5), (3), rinf15
	Nq∧NpI.q↓p	(6), df05

A124/1 p↓p↓pISp

Prueba:

(2)	p∧NpISp	A104, df09
(3)	NNp∧NpI.p∧Np	A106, rinf18
(4)	NNp∧NpISp	(3), (2), rinf15
(5)	Np↓pISp	A124, rinf11, (4), rinf15
	p↓p↓pISp	(5), df02

A124/2 $Np\land qI.q\downarrow q\downarrow p$

Prueba:

(2)	$Np\land qI.Np\land NNq$	A106, rinf20
(3)	$Np\land NNqI.p\downarrow Nq$	A124
(4)	$p\downarrow NqI.Nq\downarrow p$	A121
(5)	$\sigma 2I\delta 3$	(2), (3), rinf15
(6)	$\sigma 2I\delta 4$	(5), (4), rinf15
	A124/2	(6), df02

A125 $N(Np\land Nq)I.p\lor q$

Prueba:

(2)	$Np\land NqI.p\downarrow q$	A124
(3)	$N(Np\land Nq)IN(p\downarrow q)$	(2), A114, rinf01
	$N(Np\land Nq)I.p\lor q$	(3), df04

A126 $N(Np\lor Nq)I.p\land q$

Prueba:

(2)	$N(Np\lor Nq)INN(Np\downarrow Nq)$	A104, df04
(3)	$N(Np\lor Nq)I.Np\downarrow Nq$	(2), A110, rinf14
	$N(Np\lor Nq)I.p\land q$	(3), df05

A127 $Np\land NqIN(p\lor q)$

Prueba:

(2)	$Np\land NqIN(p\lor q)I.N(Np\land Nq)I.p\lor q$	A105
(3)	$\delta 2\supset\sigma 2$	(2), A103, rinf01
	$\sigma 2$	(3), A125, rinf01

A127/1 $p\downarrow qIN(p\lor q)$ (Prueba: A124, rinf11, A127, rinf15)

A128 $p\lor qIN(Np\land Nq)$ (Pr.: A125, rinf11)

A129 $Np\lor NqIN(p\land q)$ (Pr.: A126,A105,A103,rinf01)

A130 $p\land qIN(Np\lor Nq)$ (Prueba: A126, rinf11)

A131 $p\lor q\land pIp$

Prueba:

(2)	$Np\land Nq\lor NpI.N(p\lor q)\lor Np$	A127,rinf16bis
(3)	$N\sigma 2IN\delta 2$	(2), A114, rinf01
(4)	$N\delta 2I.p\lor q\land p$	A126
(5)	$\sigma 2INp$	A102
(6)	$N\sigma 2Ip$	(5), A105, rinf13
(7)	$pIN\sigma 2$	(6), rinf11
(8)	$pIN\delta 2$	(7), (3), rinf15
(9)	$pI.p\lor q\land p$	(8), (4), rinf15
	$p\lor q\land pIp$	(9), rinf11

A132 $q\land p\lor pIp$

Prueba:

(2)	$q\land p\lor pI.p\land q\lor p$	A122, rinf19
	$q\land p\lor pIp$	(2), A102, rinf15

A133 $p\lor(p\land q)Ip$ (Prueba: A102, A123, rinf15)

A134 $p\lor(q\land p)Ip$ (Prueba: A123, A132, rinf15)

A135 $q\lor p\land pIp$
(Prueba: A131, A123, rinf18, rinf15)

A136 $p\land(p\lor q)Ip$ (Prueba: A131, A122, rinf15)

A137 $p\land(q\lor p)Ip$ (Prueba: A122, A135, rinf15)

A138 p∨q∧rI.r∧p∨.r∧q

Prueba:

(2)	Np∧NqIN(p∨q)	A127
(3)	N(p∨q)↓NrI.Nr↓Nq∨.Nr↓Np	A120,(2),rinf01
(4)	p∨q∧rI.r∧q∨.r∧p	(3), df05
(5)	δ4I.r∧p∨.r∧q	(4), (5), rinf15

A139 p∧q∨rI.r∨p∧.r∨q

Prueba:

(2)	q∧pI.p∧q	A122
(3)	p∧q↓rI.r↓p∨.r↓q	(2), A120, rinf01
(4)	Nσ3INδ3	(3), A113, rinf13
(5)	p∧q∨rINδ3	(4), df04
(6)	Nδ3I.N(r↓p)∧N(r↓q)	A127, rinf11
(7)	Nδ3I.r∨p∧.r∨q	(6), df04
	p∧q∨rI.r∨p∧.r∨q	(5), (7), rinf15

A140 p∧(q∨r)I.p∧q∨.p∧r

Prueba:

(2)	p∧(q∨r)I.q∨r∧p	A122
(3)	δ2I.p∧q∨.p∧r	A138
	σ2Iδ3	(2), (3), rinf15

A141 p∨(q∧r)I.p∨q∧.p∨r

Prueba:

(2)	p∨(q∧r)I.q∧r∨p	A123
(3)	δ2I.p∨q∧.p∨r	A139
	σ2Iδ3	(2), (3), rinf15

A142 p∧q∨rI.p∨r∧.q∨r

Prueba:

(2)	r∨p∧(r∨q)I.r∨p∧.q∨r	A123, rinf20
(3)	r∨p∧(q∨r)I.p∨r∧.q∨r	A123, rinf19
(4)	σ2Iδ3	(2), (3), rinf15
	p∧q∨rIδ3	A139, (4), rinf15

A143 p∨q∧rI.p∧r∨.q∧r

Prueba:

(2)	r∧p∨(r∧q)I.r∧p∨.q∧r	A122, rinf21
(3)	r∧p∨(q∧r)I.p∧r∨.q∧r	A122, rinf16bis
(4)	σ2Iδ3	(2), (3), rinf15
	p∨q∧rIδ3	A138, (4), rinf15

A144 p∧q∧pI.p∧q

Prueba:

(2)	p∨q∧pI.p∧p∨.p∧q	A138
(3)	pIσ2	A131, rinf11
(4)	pIδ2	(3), (2), rinf15
(5)	p∧(p∧q)I.δ2∧.p∧q	(4), rinf17
(6)	δ2∧(p∧q)I.p∧q	A135
(7)	p∧q∧pI.p∧.p∧q	A122
(8)	p∧q∧pI.δ2∧.p∧q	(7), (5), rinf15
	p∧q∧pI.p∧q	(8), (6), rinf15

A145 p∧q∧qI.p∧q

Prueba:

(2)	q∧p∧qI.q∧p	A144
(3)	q∧pI.p∧q	A122
(4)	q∧p∧qI.p∧q	(2), (3), rinf15

(5) p∧q∧qI.q∧p∧q   A122, rinf17

p∧q∧qI.p∧q   (5), (4), rinf15

A146 p∨q∨pI.p∨q

Prueba:

(2) N(p∨q)I.Np∧Nq   A127,rinf11

(3) N(p∨q)∧NpI.Np∧Nq∧Np   (2), rinf17

(4) Np∧Nq∧NpI.Np∧Nq   A144

(5) p∨q∨pINσ3   A125,rinf11

(6) Nσ3INδ3   (3),A114,rinf01

(7) Nδ3INδ4   (4),A114,rinf01

(8) Nσ3INδ4   (6),(7),rinf15

(9) Nδ4I.p∨q   A125

(22) Nσ3I.p∨q   (8),(9),rinf15

p∨q∨pI.p∨q   (5),(22),rinf15

A147 p∨q∨qI.p∨q

Prueba:

(2) q∨p∨qI.q∨p   A146

(3) δ2I.p∨q   A123

(4) σ2I.p∨q   (2), (3), rinf15

(5) p∨q∨qI.q∨p∨q   A123, rinf16bis

p∨q∨qI.p∨q   (5), (4), rinf15

A148 p∨q∨rI.p∨r∨q

Prueba:

(2) p∨q∨r∧qI.q∧(p∨q)∨.q∧r   A138

(3) δ2I.q∨.q∧r   A137, rinf16bis

(4) δ3Iq   A133

(5) δ2Iq   (3), (4), rinf15

(6) p∨q∨r∧qIp   (2), (5), rinf15

(7) p∨q∨r∨(p∨q∨r∧q)I.p∨q∨r   A133

(8) p∨q∨r∨qIσ7   (6), rinf21, rinf11

(9) p∨q∨r∨qI.p∨q∨r   (8), (7), rinf15

(22) p∨rI.p∨q∧p∨r   A131, rinf19

(23) δ22I.p∨q∨r∧.p∨r   A142

(24) p∨rI.p∨q∨r∧.p∨r   (22), (23), rinf15

(25) p∨r∨qI.δ24∨q   (24), rinf16bis

(26) δ24∨qI.p∨q∨r∨q∧.p∨r∨q   A142

(27) p∨r∨qIδ26   (25), (26), rinf15

(28) δ26I.p∨q∨r∧.p∨r∨q   (9), rinf17

(29) p∨r∨qI.p∨q∨r∧.p∨r∨q   (27), (28), rinf15

(32) p∨q∨rI.p∨r∨q∧.p∨q∨r   al igual que (29)

(33)	δ32I.p∨q∨r∧.p∨r∨q	A122
(34)	p∨q∨rIδ33	(32), (33), rinf15
(35)	δ33I.p∨r∨q	(29), rinf11
	p∨q∨rI.p∨r∨q	(34), (35), rinf15

A149 p∨q∨rI.p∨.q∨r

Prueba:

(2)	q∨r∨pI.q∨p∨r	A148
(3)	q∨p∨rI.p∨q∨r	A123, rinf19
(4)	p∨(q∨r)Iσ2	A123
(5)	p∨(q∨r)Iδ2	(4), (2), rinf15
(6)	p∨(q∨r)I.p∨q∨r	(5), (3), rinf15
	p∨q∨rI.p∨.q∨r	(6), rinf11

A149/2 p∨(q∨r)I.p∨q∨r (Prueba: A149, rinf11)

A149/1 p∧q∧rI.p∧.q∧r

Prueba:

(2)	Np∨Nq∨NrI.Np∨.Nq∨Nr	A149
(3)	N(p∧q)∨NrIσ2	A129, rinf19
(4)	σ3Iδ2	(3), (2), rinf15
(5)	δ2I.Np∨N(q∧r)	A129, rinf21
(6)	σ3Iδ5	(4), (5), rinf15
(7)	Nσ3INδ5	(6), A113, rinf13
(8)	p∧q∧rNσ3	A130
(9)	p∧q∧rINδ5	(8), (7), rinf15
(22)	Nδ5I.p∧.q∧r	A126
	p∧q∧rI.p∧.q∧r	(9), (22), rinf15

A150 Hp∧HqILH(p∧q)

Prueba:

(2)	δA04	A04, rinf22
	Hp∧HqILH(p∧q)	(2), rinf23

A150/1 pIq⊃.Hp∨HrIH(q∨r)

Prueba:

(2)	δA04	A04, rinf22
(3)	δδA04	(2), rinf22
	A150/1	(3), rinf23

A150/2 Hp∨HqIH(p∨q) (Prueba: A150/1, A104, rinf01)

A150/3 H(p∨p)IHp (Prueba: A150/2, A118, rinf11, rinf15)

A150/4 H(p∧q)IHp (Prueba: A119, rinf25)

A150/5 HpILHp

Prueba:

(2)	Hp∧HpILH(p∧p)	A150
(3)	HpILH(p∧p)	A119, rinf11, (2), rinf15
(4)	NH(p∧p)INHp	A150/4, A114, rinf01
(5)	HNH(p∧p)IHNHp	(4), rinf25
(6)	¬H(p∧p)I¬Hp	(5), df03
(7)	N¬H(p∧p)IN¬Hp	(6), A114, rinf01
(8)	LH(p∧p)ILHp	(7), df12

	HpILHp	(3), (8), rinf15

A150/6 Hp∧HqIH(p∧q)

Prueba:

(2)	LH(p∧q)IH(p∧q)	A150/5, rinf11
	Hp∧HqIH(p∧q)	A150, (2), rinf15

A150/7 ¬p∧¬qI¬(p∨q)

Prueba:

(2)	HNp∧HNqIH(Np∧Nq)	A150/6
(3)	H(Np∧Nq)IHN(p∨q)	A127, rinf25
(4)	σ2Iδ3	(2), (3), rinf15
	¬p∧¬qI¬(p∨q)	(4), df03

A150/8 ¬p∨¬qIF(p∧q)

Prueba:

(2)	HNp∨HNqIH(Np∨Nq)	A150/2
(3)	H(Np∨Nq)IHN(p∧q)	A129, rinf25
(4)	σ2Iδ3	(2), (3), rinf15
	¬p∨¬qI¬(p∧q)	(4), df03

A150/9 p⊃.q⊃.p∧q

Prueba:

(2)	¬(p∧q)∨.p∧q	A117
(3)	¬(p∧q)I.¬p∨¬q	A150/8, rinf11
(4)	2I.¬p∨¬q∨.p∧q	(3), rinf16bis
(5)	¬p∨¬q∨.p∧q	(4), (2), rinf13
(6)	5I.¬p∨.¬q∨.p∧q	A149
(7)	¬p∨.¬q∨.p∧q	(5), (6), rinf13
	p⊃.q⊃.p∧q	(7), df06

A150/10 p⊃(q∧r)I.p⊃q∧.p⊃r

Prueba:

(2)	¬p∨(q∧r)I.¬p∨q∧.¬p∨r	A141
	p⊃(q∧r)I.p⊃q∧.p⊃r	(2), df06

A150/11 p∧1Ip

Prueba:

(2)	δA04	A04, rinf22
(3)	δδA04	(2), rinf22
(4)	δδδA04	(3), rinf22
(5)	p•1Ip	(4), rinf23
(6)	δA03	A03, rinf22
(7)	δδA03	(6), rinf22
(8)	p•q↕.p∧q	(7), rinf23
(9)	p•q→(p∧q)∧.p∧q⊃.p•q	(8), df23
(22)	p•q→.p∧q	(9), rinf23
(23)	p•1→.p∧1	(22)
(24)	p•1∧(p∧1)I.p•1	(23), df14

A150/12 0IN1

Prueba:

(2)	0INN0	A106
	0IN1	(2), df08

A150/13 p∨0Ip

Prueba:

(2)	Np∧1INp	A150/11
(3)	Np∧N0INp	(2), df08
(4)	N(Np∧N0)INNp	(3), A114, rinf01
(5)	σ4Ip	A106,rinf11,(4),rinf15
(6)	p∨0Iσ4	A128
	p∨0Ip	(6), (5), rinf15

(25)	p∧(p∧1)Iσ24	(5), rinf18
(26)	p∧1∧pIσ25	A122
(27)	p∧1I.p∧1∧p	A144, rinf11
(28)	p∧1Iσ25	(27), (26), rinf15
(29)	p∧1Iσ24	(28), (25), rinf15
(32)	p∧1I.p•1	(29), (24), rinf15
	p∧1Ip	(32), (5), rinf15

A150/14 p∧0I0

Prueba:

(2)	p∧0I.p∨0∧0	A150/13, rinf18
(3)	p∨0∧0I0	A135
	p∧0I0	(2), (3), rinf15

A150/15 p∨1I1

Prueba:

(2)	p∨1I.p∧1∨1	A150/11, rinf19
(3)	p∧1∨1I1	A132
	p∨1I1	(2), (3), rinf15

A150/16 0→p (Prueba: A150/14, df14)

A150/17 p→1(Prueba:A150/11, df14)

A151 LpIHLp

Prueba:

(2)	HNpILHNp	A150/5
(3)	HNpINHNHNp	(2), df12, df03
(4)	NHNpHNHNp	A105, (3), rinf13
(5)	N¬pIHN¬p	(4), df03
	LpIHLp	(5), df12

A151/1 N¬pI¬¬p

Prueba:

(2)	N¬pIHLp	A151, df12
(3)	N¬pIHN¬p	(2), df12
	N¬pI¬¬p	(3), df03

A152 LpI¬¬p (Prueba: A151/1, df12)

A153 ¬p⊃.p→q

Prueba:

(2)	δA06	A06, rinf22
(3)	δδA06	(2), rinf22
(4)	δδδA06	(3), rinf22
(5)	q→np∨(pImq)∨(p→q)∧.Lp∨.p→q	(4), A142, rinf13
(6)	Lp∨.p→q	(5), rinf22
(7)	6I.¬¬p∨.p→q	A152, rinf16bis
(8)	¬¬p∨.p→q	(6), (7), rinf13
	¬p⊃.p→q	(8), df06

A154 $\neg(p\land\neg p)$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\lor\neg p$	A117
(3)	$\neg p\lor\neg\neg p$	A123, (2), rinf13
(4)	$3I\neg(p\land\neg p)$	A150/8
	$\neg(p\land\neg p)$	(3), (4), rinf13

A155 $p\land\neg p\to q$

Prueba:

(2)	$\neg(p\land\neg p)\supset.p\land\neg p\to q$	A153
	$p\land\neg p\to q$	(2), A154, rinf01

A156 $p\land\neg pI0$

Prueba:

(2)	$p\land\neg p\to 0$	A155
(3)	$p\land\neg p\land 0I.p\land\neg p$	(2), df14
(4)	$p\land\neg p\land 0I0$	A150/14
	$p\land\neg pI0$	(3), (4), rinf26

A156/1 $Np\land HpI0$

Prueba:

(2)	$HpIHNNp$	A106, rinf25
(3)	$HpI\neg Np$	(2), df03
(4)	$Np\land HpI.Np\land\neg Np$	(3), rinf20
	$Np\land HpI0$	(4), A156, rinf15

A156/2 $Hp\downarrow Hp\downarrow pI0$ (Prueba: A156/1, A124/2)

El esquema A156/2 es de suma importancia, porque nos dice que ‘lo absolutamente irreal’, e.d. ‘0’, equivale a una fórmula que se obtiene, a partir de una oración **cualquiera** $\ulcorner p\urcorner$ (sea $\ulcorner p\urcorner$ la oración que fuere), con ayuda de los dos functores primitivos ‘$\downarrow$’ y ‘H’. Ahora bien, como iremos viendo a lo largo de esta Sección I, cuando tenemos un teorema equivalencial, e.d. un teorema o esquema teoremático de la forma $\ulcorner pIq\urcorner$, entonces podemos sustituir **en cualquier contexto**, sin excepción, $\ulcorner p\urcorner$ por $\ulcorner q\urcorner$ y viceversa. Pudiera ello suscitar la sospecha de que hubiéramos podido **definir** ‘0’, en vez de como lo hemos hecho en df01, como el miembro izquierdo de A156/2, dejando ‘p’ como una letra esquemática (con lo cual, ciertamente, se trataría de un esquema definicional, como tantos otros que figuran como definiciones en el capítulo 1º, pero que, hablando con rigor, son esquemas definicionales). El inconveniente de ese procedimiento es que, definiendo ‘0’ de esa manera, desaparecería en el *definiendum* una letra esquemática que está en el *definiens*, la ‘p’, con lo cual se tendría, **de entrada**, lo siguiente: supongamos que hemos definido $\ulcorner 0\urcorner$ (escribimos ahora esquinas porque, con tal definición, ‘0’ sería un esquema, no una constante) como: $\ulcorner Hp\downarrow Hp\downarrow p\urcorner$. Llamemos ‘df0’ a semejante definición. Entonces se demuestra inmediatamente:

(2)	$Hp\downarrow Hp\downarrow pI0$	A104, df0
(3)	$0I.Hq\downarrow Hq\downarrow q$	A104, df0
(4)	$Hp\downarrow Hp\downarrow pI.Hq\downarrow Hq\downarrow q$	(2), (3), rinf15

Ahora bien, el camino que conduce a esa conclusión (4) es demasiado fácil, taimadamente fácil. Y es que constituye una artimaña el escamotear en el definiendum una letra esquemática del definiens mientras no se ha probado aún que, efectivamente, en esa combinación de signos que es el definiens carece de importancia cuál sea la letra esquemática que se tome. Veámoslo con otro ejemplo: supongamos que abreviamos $\ulcorner p\land Np\urcorner$ —siendo ‘p’ una letra esquemática— como ‘©’. Entonces, de manera similar a aquella en la que hemos probado (4), podemos probar:

(5) $p\land NpI.q\land Nq$

Pero (5) es inaceptable, porque no es verdad en absoluto que cualquier contradicción equivalga a cualquier otra contradicción: hay contradicciones totalmente falsas, otras verdaderas en algún grado; y, dentro de éstas últimas, las hay verdaderas en medida de 50%, y otras en medidas inferiores; en verdad hay infinitos grados diversos en los cuales se dan contradicciones verdaderas, unas menos que otras.

Cierto es que la conclusión (4) es correcta. Pero el camino acertado para probar que lo es no puede consistir en escamotear, definicionalmente, las letras esquemáticas, sino que ha de ser un camino como el que nos llevará a probar, más adelante (en el capítulo 9º, págª 68), el esquema teoremático A231.

A157 ¬0

Prueba:

(2)	¬(p∧¬p)I¬0	A156, rinf25bis
	¬0	(2), A154, rinf13

A158 H1 (Prueba: A157, df03, df08)

A158/2 HpI¬Np

Prueba:

(2)	pINNp	A106
(3)	HpIHNNp	(2), rinf25
	HpI¬Np	(3), df03

A159 qIp⊃.r∨pI.q∨r

Prueba:

(2)	p∧pIq⊃.q↓rI.r↓p∨.r↓p	A120
(3)	¬(p∧pIq)∨.q↓rI.r↓p∨.r↓p	(2), df06
(4)	qIpI.p∧pIq	A101, A119, rinf01
(5)	σ3I¬(qIp)	(4), rinf11, rinf25bis
(6)	3I.¬(qIp)∨δ3	(5), rinf16bis
(7)	¬(qIp)∨δ3	(3), (6), rinf13
(8)	r↓pI.r↓p∨.r↓p	A118, rinf11
(9)	δ3I.r↓pI.q↓r	(8), A101, rinf01
(22)	7I.¬(qIp)∨.r↓pI.q↓r	(9), rinf21
(23)	δ22	(22), (7), rinf13
(24)	r↓pI(q↓r)I.N(r↓p)IN(q↓r)	A113
(25)	23I.¬(qIp)∨δ24	(24), rinf21
(26)	δ25	(23), (25), rinf13
(27)	¬(qIp)∨.r∨pI.q∨r	(26), df04
	qIp⊃.r∨pI.q∨r	(27), df06

A159/1 pIq⊃.p∨rI.q∨r

Prueba:

(2)	pIq⊃.r∨qI.p∨r	A159

A159/2 pIq⊃.r∨pI.r∨q

Prueba:

(2)	pIq⊃.r∨qI.p∨r	A159

(3)	¬(pIq)∨.r∨qI.p∨r	(2), df06
(4)	r∨qI.q∨r	A123
(5)	p∨rI(q∨r)I.r∨qI.p∨r	(4), A101, rinf01
(6)	3I.¬(pIq)∨σ5	(5), rinf11, rinf21
(7)	¬(pIq)∨δ5	(3), (6), rinf13
	pIq⊃.p∨rI.q∨r	(7), df06

(3)	¬(pIq)∨.r∨qI.p∨r	(2), df06
(4)	r∨pI.p∨r	A123
(5)	δ3I.r∨pI.r∨q	A101, (4), rinf01
(6)	3I.σ3∨δ5	(5), rinf21
(7)	δ6	(3), (6), rinf13
	pIq⊃.r∨pI.r∨q	(7), df06

A159/3 qIp⊃.q∨r∨sI.p∨.r∨s

Prueba:

(2)	pIq⊃.p∨(r∨s)I.q∨.r∨s	A159/1
(3)	¬(pIq)∨δ2	(2), df06
(4)	q∨r∨sI.q∨.r∨s	A149
(5)	δ2I.q∨r∨sI.p∨.r∨s	(4), A101, rinf01
(6)	3I.¬(pIq)∨δ5	(5), rinf21
(7)	δ6	(3), (6), rinf13
(8)	¬(pIq)I¬(qIp)	A107, rinf25bis
(9)	δ6I.¬(qIp)∨δ5	(8), rinf16bis
(22)	δ9	(7), (9), rinf13
	qIp⊃.q∨r∨sI.p∨.r∨s	(22), df06

A159/4 pIq⊃.p∧rI.q∧r

Prueba:

(2)	NpINq⊃.Np∨NrI.Nq∨Nr	A159/1
(3)	¬(NpINq)∨.Np∨NrI.Nq∨Nr	(2), df06
(4)	¬(pIq)I¬(NpINq)	A113, rinf25bis
(5)	3I.¬(pIq)∨δ3	(4), rinf19
(6)	δ5	(3), (5), rinf13
(7)	δ3I.N(Np∨Nr)IN(Nq∨Nr)	A113
(8)	q∧rIδδ7	A130
(9)	N(Np∨Nr)IN(Nq∨Nr)I.q∧rIN(Np∨Nr)	(8),A101, rinf01
(22)	δ3Iδ9	(7), (9), rinf15
(23)	p∧rIN(Np∨Nr)	A130
(24)	δ9I.p∧rI.q∧r	(23), A101, rinf01
(25)	δ3I.p∧rI.q∧r	(22), (24), rinf15
(26)	6I.¬(pIq)∨δ25	(25), rinf21

(27)	δ26	(6), (26), rinf13
	A159/4	(27), df06

A159/5 pIq⊃.r∧pI.r∧q

Prueba:

(2)	¬(pIq)∨.p∧rI.q∧r	A159/4, df06
(3)	r∧qI.q∧r	A122
(4)	δ2I.r∧qI.p∧r	(3), A101, rinf01
(5)	r∧pI.p∧r	A122
(6)	δ4I.r∧pI.r∧q	(5), A101, rinf01
(7)	δ2Iδ6	(4), (6), rinf15
(8)	2I.¬(pIq)∨δ6	(7), rinf21
(9)	δ8	(2), (8), rinf13
	A159/5	(9), df06

A160 pIq⊃.HpIHq

Prueba:

(2)	pIq⊃.Hp∨H0IH(q∨0)	A150/1
(3)	¬(pIq)∨δ2	(2), df06
(4)	Hp∨H0IH(p∨0)	A150/2
(5)	H(p∨0)IHp	A150/13, rinf25
(6)	HpI.Hp∨H0	(5),rinf11,(4),rinf27
(7)	HqIH(q∨0)	A150/13, rinf25, rinf11
(8)	δ2I.HqI.Hp∨H0	(7), A101, rinf01
(9)	δ8I.HpIHq	(6), A101, rinf01
(22)	δ2I.HpIHq	(8), (9), rinf15
(23)	3I.¬(pIq)∨.HpIHq	(22), rinf21
	A160	df06, (23), (3), rinf13

A160/1 pIq⊃.r⊃pI.r⊃q

Prueba:

(2)	pIq⊃.¬r∨pI.¬r∨q	A159/2
	A160/1	(2), df06

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 6º.— LECTURAS DE ESQUEMAS DEMOSTRADOS; CRÍTICA DEL ENFOQUE RELEVANTISTA

Algunos de los esquemas que he demostrado en el capítulo anterior no son equivalenciales, pero valía la pena probarlos, con vistas a la ulterior utilización de los mismos en otras pruebas. Así, p.ej., A116 es el principio de autoentrañamiento (llamado para algunos ‘principio de identidad’, si bien tal denominación conviene reservarla para A104 y para principios que se estudiarán en las Secciones II y III de este libro): Si algo es verdad, es verdad. A117 es el principio fuerte de tercio excluso: un hecho cualquiera, o es del todo falso, o es verdadero. El principio puede parecer obvio, pero no es baladí: él, junto con otros principios —esos sí, sumamente obvios— entraña el principio de apencamiento que expondré en A200, a saber que el que algo sea más o menos verdadero entraña que tal algo es verdadero a secas. A la aceptación de A200 se oponen quienes exigen, para considerar a algo afirmable, que tal algo tenga, no cualquier grado de verdad, sino un grado «suficiente» de verdad. Pero tal exigencia parece arbitraria e injustificada donde se discute esta cuestión en un plano técnico.

Un corolario del principio fuerte de tercio excluso es A163, que voy a exponer en seguida. Conviene notar que el principio fuerte de tercio excluso no es lo mismo que el principio de exclusión de situaciones intermedias, el cual se enuncia así: un hecho cualquiera es, o totalmente falso o totalmente verdadero, o sea: $\neg p \lor Hp$. Tal principio es enteramente falso (hay instancias sustitutivas del mismo absolutamente falsas), y no es ningún esquema demostrable en el sistema lógico aquí desarrollado (al revés: si se añadiera a tal sistema, éste se derrumbaría). Ejemplos de tan malhadado principio de exclusión de situaciones intermedias son: o la música de Palestrina es completamente bella, o no es bella en absoluto; o Remigio es un hombre totalmente sano o no es en absoluto un hombre sano. Vese por tales ejemplos que el principio no vale, pues, de valer, no habría en absoluto situaciones intermedias: todo sería o totalmente real o totalmente irreal.

Otro principio muy interesante es el *principio de adjunción*, a saber: A150/9. Tal principio ha sido rechazado por los adeptos de la llamada «lógica relevante» (Anderson, Belnap, Routley, Meyer y otros), pero sus argumentos no son convincentes. Alegan los relevantistas que, de aceptarse A150/9, se desemboca en teoremas —que voy a demostrar en el capítulo siguiente— que no les agradan, particularmente A164 (si bien nuestra propia prueba de A164 no emplea A150/9). Pero A164 es un esquema que, ya por sí mismo, goza de un atractivo y una plausibilidad inmensos; y, en cualquier caso, vale mil veces más aceptarlo que sacrificar A150/9. Además, la plausibilidad de A150/9 puede mostrarse como sigue: una fórmula condicional es verdadera si, en la hipótesis de que sea verdadera la prótasis, ha de concederse la apódosis, o sea: si, suponiendo a la prótasis verdadera, debe suponerse también verdadera a la apódosis.

Pero supongamos p: entonces, hay que suponer que, si es verdad que q, es verdad que p y q (puesto que, por hipótesis, es verdad que p); dicho de otro modo: en la hipótesis de que sea verdad que p, en esa hipótesis tendremos que, si suponemos, además, que es verdad que q, será verdad que p-y-q. Una instancia de lo cual será ésta: supóngase que Clotilde tiene fiebre; supuesto eso, supóngase ahora que Clotilde tose; entonces es que Clotilde tiene fiebre y tose. ¿Hay algo que no esté bien en ese modo de ver las cosas? Los relevantistas rechazan el principio de adjunción, A150/9, junto con el principio de exportación, a saber A177, que explicaré en el capítulo 8º).

Frente a un argumento similar al que acabo de brindar a favor del principio de adjunción (se trataba de un argumento expuesto por Simons a favor del *principio de exportación*) presenta Routley una objeción que podemos parafrasear y adaptar a nuestro tema presente como sigue: no es correcto decir: supongamos p; entonces, si suponemos q, debemos admitir que p-y-q; y no sería eso correcto porque lo que habría que decir sería: supongamos que p y también que q; entonces debemos concluir que p-y-q; pero en esta formulación ya está la conyunción 'y' expresada en la hipótesis emitida; de la mera hipótesis de que p no se desprende que haya entrañamiento de p-y-q por q. A mí me parece esa réplica una petición de principio. Porque, justamente, lo que sucede es que se muestran como equivalentes los dos modos de razonar: aquel en el cual la conyunción es expresada en la suposición o hipótesis, y aquel en que no es expresada, sino que decimos: «Supongamos que p; entonces, suponiendo que q, resulta ser verdad que p-y-q»: o sea: «Si es verdad que p, entonces: si es verdad que q, es verdad que p-y-q».

En éste como en los demás puntos en debate entre el enfoque relevantista y el nuestro —coincidente, en la oposición al relevantismo, con el de los adeptos de la lógica clásica— el meollo de la controversia lo constituye la concepción del entrañamiento, o sea: del condicional. Con la lógica clásica coincide nuestro planteamiento en considerar al condicional como verifuncional, e.e. tal que el grado de verdad de $\ulcorner p \supset q \urcorner$ debe depender sólo del grado de verdad de $\ulcorner p \urcorner$ y del de $\ulcorner q \urcorner$ (según nuestro enfoque, plasmado en df06, el grado o valor de verdad de $\ulcorner p \supset q \urcorner$, en un aspecto último de lo real, es el mismo que el que, en ese aspecto último de lo real, posea $\ulcorner q \urcorner$ siempre y cuando, en *ese* aspecto, $\ulcorner p \urcorner$ posea algún grado de verdad; y, si en ese aspecto último de lo real, carece $\ulcorner p \urcorner$ de todo grado de verdad, el grado de verdad que, en tal aspecto, le toca a $\ulcorner p \supset q \urcorner$ es de 100%, según el principio *e prorsus falso quodlibet* —que explicaremos más tarde— A189 y A190). Para los relevantistas, y para otros lógicos, el valor de verdad de una fórmula condicional depende de otros factores, además de —o hasta independientemente de— cuáles sean los valores de verdad de la prótasis y de la apódosis; en particular, los relevantistas exigen un nexo semántico, consistente en que el sentido de la prótasis «contenga» (o «envuelva») al sentido de la apódosis. Es extremadamente difícil articular rigurosamente esa idea de contenencia o envolvimiento de un sentido por otro —una idea que, de poder ser dilucidada, podría hacer más comprensibles ciertas concepciones filosóficas del pasado, p.ej. la de Spinoza; y qué se entienda por 'sentido' resulta de lo más problemático y hasta enigmático, salvo si se entiende el hecho, o estado de cosas, mentado o denotado por la oración en cuestión; pero ¿en qué acepciones de 'envolver' o de 'contener' cabe decir que un hecho envuelve o contiene a otro? Así, puesto que los relevantistas aceptan el principio de adición (A01 y A162), ¿en qué sentido está 'envuelto' o 'contenido' el hecho de que Felipe II era implacable o indulgente en el hecho de que era implacable? Porque era tanto implacable como indulgente, más lo uno o lo otro según los casos y los momentos, aunque, en la mayoría de las circunstancias, con predominio de la implacabilidad; difieren, pues, su ser implacable y su ser implacable o indulgente; el segundo hecho siempre bastante verdadero, el primero en ocasiones más falso que verdadero; pero entonces no se ve cómo el segundo hecho pueda estar envuelto o contenido en el primero, salvo en alguna acepción latísima de la palabra, que no aporta mayor esclarecimiento.

Pero es más: aun aceptando esa exigencia de nexo o envolvimiento de significación (que se suele articular demandando, para cualquier condicional verdadero, que la apódosis y la prótasis compartan alguna letra esquemática —u oración atómica), ¿por qué no aceptar que $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner q \supset . p \land q \urcorner$ comparten ese nexo, e.d. que el «sentido» de $\ulcorner p \urcorner$ «envuelve» al de $\ulcorner q \supset . p \land q \urcorner$, puesto que, al fin y al cabo, la prótasis y la apódosis comparten una letra esquemática (a saber: 'p') y, por lo demás, el esquema parece inobjetable? Y, por añadidura, la apódosis misma, que es ella misma una fórmula condicional, es tal que su respectiva prótasis comparte con su respectiva apódosis una letra esquemática (a saber: 'q'); (Y, si bien, obviamente, tal apódosis no es por sí misma teoremática o válida (no es verdad, para cualesquiera $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner q \urcorner$, que, si q, entonces p y q), sí ha de ser verdadera suponiendo la verdad de $\ulcorner p \urcorner$). Por consiguiente, no se ve irrelevancia —o conculcación del principio de que prótasis y apódosis deben compartir alguna letra esquemática— en este principio de adjunción. Lo que reprochan los relevantistas al principio de adjunción es —como decíamos líneas más arriba— que conduce al *uerum e quolibet* (lo verdadero se sigue de cualquier cosa), o sea: A164. Una prueba corriente de A164 usa la regla de transitividad del entrañamiento (nuestra rinf33, aún no derivada, pero que hubiéramos podido derivar antes de demostrar A164), a partir de los teoremas:

A150/9 $p \supset . q \supset . p \land q$

A01 $p \land q \supset p$

A173 $p \supset q \supset . r \supset p \supset . r \supset q$

Que esos tres principios más rinf01 y rinf33 (a saber, la transitividad del entrañamiento: de $\ulcorner p \supset q \urcorner$ y $\ulcorner q \supset r \urcorner$ cabe inferir $\ulcorner p \supset r \urcorner$) permiten inferir A164 ($\ulcorner p \supset . q \supset p \urcorner$) lo puede probar fácilmente el lector; se le deja como ejercicio el hacerlo. Pero, puesto que los tres principios son de lo más plausibles, y puesto que ambas reglas de inferencia parecen seguras, lo más sensato resulta aceptar el principio *uerum e quolibet* (A164), que, por lo demás, a muchísimos lógicos también nos parece por sí mismo plausible. (Para bloquear ese tipo de conclusiones —como A164/1— algunos lógicos (como P. Geach y G. von Wright) al margen de la corriente relevantista pero inspirados por motivaciones similares, han acudido a otros desesperados expedientes, como el de sacrificar rinf33, e.d. la transitividad del entrañamiento. Desde mi propia perspectiva, ese ardid parece tan injustificado como el de los relevantistas, si no más. Si lo mentado por una oración entraña lo mentado por otra, y si lo mentado por ésta última entraña a otro hecho, ¿cómo no va a ser entrañado este último hecho por lo mentado por la primera oración: ¿Cómo van a valer *todos* los eslabones de una cadena sin que se dé la conexión pertinente entre el primer eslabón y el último?)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 7º.— El FUNCTOR CONDICIONAL O DE ENTRAÑAMIENTO

El functor condicional o de entrañamiento vehicula una idea de condición *suficiente*, de izquierda a derecha. Para que una cosa sea condición suficiente de otra lo único que hace falta es que, de ser verdadera o real la primera, lo sea también la segunda; quiere decirse que el hecho de que p conlleva (e.d. entraña) al hecho de que q, siempre que, o bien carezca el hecho de que p de cualquier grado de verdad, o bien sea verdad que q, o bien ambas cosas a la vez. Supongamos, en primer lugar, lo primero: que el hecho de que p carece totalmente de verdad (en un aspecto de lo real en el cual nos estemos ubicando mentalmente): entonces, en ese aspecto, es cierto que, de ser verdad que p, es verdad que q; eso es así, y por eso se dice, de algo que uno sabe totalmente falso, que, si tal algo es verdadero, entonces …, colocando cualquier disparate en el lugar de los puntos suspensivos: 'Si Jasán II se preocupa bastante por sus súbditos, yo soy fraile'. Que tales afirmaciones tengan un cierto carácter jocoso (aunque quien esto escribe ha oído una en tono de cólera, en medio de una discusión furiosa) no quita para que sean verdaderas. Supongamos ahora lo segundo: que es verdad que q; entonces tanto si es verdad que p como si no lo es en absoluto, en uno como en otro caso, es verdad que q; de ahí que si es verdad que p, también lo es que q (dada la hipótesis de que es verdad que q); y *también*, claro (dentro de la misma hipótesis), si no es verdad que p, es verdad que q.

Por eso se afirma, cuando uno está cerciorado de la verdad de la apódosis, p.ej., de que en el País Valenciano se habla catalán, una oración condicional con tal apódosis y una prótasis cualquiera: 'Pues, si en Madagascar se habla el malayo, en el País Valenciano se habla catalán'. De nuevo es verdad que suele proferirse un enunciado así en determinados entornos conversacionales no más; pero el enunciado es verdadero, supuesta la verdad de la apódosis. Por último, si suponemos el tercer caso, mejor que mejor: puesto que cada una de las dos circunstancias (la falsedad total de la prótasis y la verdad —así sea parcial— de la apódosis) basta para la verdad de la oración condicional, el que se den a la vez ambas circunstancias no puede sino mostrar aún más obviamente esa verdad del enunciado condicional considerado.

Por todo ello, nada tiene que ver el 'si… entonces' con un nexo causal: para que sea verdad que, si p, entonces q no hace ninguna falta que el hecho de que p sea causado por el de que q, ni a la inversa. Cuando digo: 'Si Froilán tiene fiebre, está enfermo', no digo, por supuesto, que su tener fiebre sea causa de su estar enfermo; pero ¿digo lo inverso, que su estar enfermo es causa de su tener fiebre? ¡Tampoco! Véase con este otro ejemplo: 'Si esa moneda es de oro, se disuelve en agua regia': ¿pretenderá alguien que su disolverse en agua regia es causa de su ser de oro?

Otro punto de importancia es el siguiente: «Si p, entonces q» es lo mismo que «p sólo si q». Aquí suelen producirse confusiones entre los principiantes, pues buscan «la dirección» del entrañamiento, y les parece que en «Si p entonces q» se va de izquierda a derecha, mientras que en «p sólo si q» se iría de derecha a izquierda. ¡No! En ambos se «va» de izquierda a derecha. Vese eso mejor si se añade, delante de la apódosis, la expresión (pleonástica o expletiva, pero útil) 'es que': 'Si Fortunato es peripatético, cree en la materia y en las formas' equivale a 'Fortunato es peripatético si es que cree en la materia y en las formas'; o también: 'Si una persona es marxista, admite la verdad del materialismo histórico' equivale a 'Una persona es marxista sólo si (es que) admite la verdad del materialismo histórico'. Para que sea verdad «Si p, (entonces) q» lo único que hace falta es que —en el sentido explicitado más arriba— sea el hecho de que p condición *suficiente* para el de que q; pero exactamente eso mismo es lo único que hace falta para la verdad de «p sólo si (es que) q». Son, pues, sinónimos o alomorfos. Lo único que se requiere para la verdad de un entrañamiento es que a la verdad de la prótasis, si es que la hay, acompañe la de la apódosis, y nada más (cumpliéndose —«vacuamente» si se quiere— tal condición, por supuesto, siempre que no haya en absoluto verdad de la prótasis, o sea: siempre que la prótasis sea del todo falsa —mas *no sólo* siempre que ello suceda, claro está).

A161 $p\wedge q\supset q$ (Prueba: A122, rinf30, A01, rinf13)

A162 $p\supset .p\vee q$

Prueba:

(2)	$p\vee q\wedge p\supset .p\vee q$	A01
	$p\supset .p\vee q$	A131, rinf30, (2), rinf13

A163 $\neg p\vee p\vee q$ (Prueba: A162, df06, A149, rinf14)

A163/1 $p\supset q\vee p$

Prueba:

(2)	$A163I.p\vee q\vee\neg p$	A123
(3)	$p\vee q\vee\neg pI.p\vee .q\vee\neg p$	A149
(4)	$A163I.p\vee .q\vee\neg p$	(2),(3),rinf15
(5)	$q\vee\neg pI.\neg p\vee q$	A123
(6)	$p\vee(q\vee\neg p)I.p\vee .\neg p\vee q$	(5), rinf21
(7)	$A163I.p\vee .\neg p\vee q$	(4),(6),rinf15
(8)	$p\vee(\neg p\vee q)I.\neg p\vee q\vee p$	A123
(9)	$A163I.\neg p\vee q\vee p$	(7),(8),rinf15
(22)	$\neg p\vee q\vee p$	(9),A163,rinf13
	A163/1	(22), df06

A164 $p\supset .q\supset p$

Prueba:

(2)	$p\supset .p\vee\neg q$	A162
(3)	$\neg p\vee .p\vee\neg q$	(2), df06
(4)	$p\vee\neg qI.\neg q\vee p$	A123
(5)	$3I.\neg p\vee .\neg q\vee p$	(4), rinf21
(6)	$\neg p\vee .\neg q\vee p$	(3), (5), rinf13
	A164	(6), df06

A164/1 $q\supset .\neg p\vee p$ (Prueba: A164, A117, rinf01)

A165 $p\supset(p\supset q)I.p\supset q$

Prueba:

(2)	$\neg p\vee(\neg p\vee q)I.\neg p\vee\neg p\vee q$	A149, rinf11
(3)	$\neg p\vee\neg pI\neg p$	A118
(4)	$\delta 2I.\neg p\vee q$	(3), rinf16bis
(5)	$\sigma 2I.\neg p\vee q$	(2), (4), rinf15
	A165	(5), df06

El esquema A161 se llama ‘principio de simplificación’, lo mismo que el esquema axiomático A01; y a las reglas rinf22 y rinf23 se aplica la denominación ‘regla de simplificación’. Con tratarse de principios y reglas obvios, si los hay, también ellos han sufrido las embestidas de la crítica: los rechazan los lógicos «conexivistas» (E.I. Nelson, Cooper, Storrs McCall y otros), alegando que el ser verdad que p-y-q es una situación peculiar, irreducible al ser verdad que p y también al ser verdad que q. (Aunque los conexivistas aducen, como precedentes de su concepción, ciertos enfoques de Aristóteles, Crisipo y Boecio, curiosamente no parecen haber citado a un filósofo que, en este punto, se adelanta a esa concepción suya sobre la conyunción: el neohegeliano inglés Bosanquet, quien alega que ser bribón y tonto a la vez es un *tertium quid* diferente, y excluyente, tanto del mero ser bribón como del mero ser tonto. Aunque el asunto es más complejo, una respuesta a dar es que, si bien efectivamente ser tonto y bribón a la vez difiere de, y excluye a, ser tonto pero en absoluto bribón y también de ser bribón pero en absoluto tonto, sin embargo ello no quiere decir que ser tonto y bribón excluya a ser tonto ni tampoco que excluya a ser bribón. (Los conexivistas aducen otros motivos para su posición.)

Por otro lado, como —a diferencia de la lógica clásica y de otros sistemas— el sistema que estamos viendo contiene dos functores condicionales (el mero condicional, '$\supset$', y la implicación, '$\rightarrow$'), podría también denominarse 'principio de simplificación' a los esquemas $\ulcorner p\wedge q\rightarrow p\urcorner$ y $\ulcorner p\wedge q\rightarrow q)$, siendo ambos esquemas válidos, teoremáticos, de nuestro sistema, facilísimamente demostrables. Lo propio cabe decir de las demás denominaciones que se van a brindar en este capítulo para fórmulas condicionales, denominaciones que podrían aplicarse, alternativamente, a fórmulas implicacionales. Sólo que —a diferencia de lo que ocurre con el principio de simplificación, o con el de adición, que vamos a ver ahora mismo—, la mayoría de las fórmulas implicacionales correspondientes, o por lo menos una buena parte de ellas, no son teoremas de nuestro sistema. Y es que la implicación es más exigente, se prodiga menos que el mero entrañamiento, o sea: que el mero condicional.

El esquema A162 es el principio de adición —y la regla de inferencia rinf39 es la regla de adición. Está ese principio aún más controvertido que el de simplificación: contra él han lanzado sus dardos algunos de entre los conexivistas y, sobre todo, los «conceptivistas» (W.T. Parry y otros), por un lado, y el filósofo oxoniano Strawson —y, junto con él, una pléyade de «filósofos del lenguaje corriente»— por otro. La objeción de Parry y los conceptivistas en contra del principio y de la regla de adición es que, para que sea válida una fórmula condicional, debe ser «analítica» (en un sentido kantiano), y, por consiguiente, no debe haber en la apódosis información que no esté ya en la prótasis, por lo cual no puede la apódosis de un teorema condicional contener letras esquemáticas que no figuren en la prótasis. El argumento me parece fallar por muchas razones: 1) la noción misma de analiticidad es confusísima, y la presunta dicotomía analítico/sintético parece deber ser rechazada, a tenor de concepciones epistemológicas hoy en boga —a las cuales se suma, en este punto, el autor de este libro, partidario de un empirismo coherencial que descarta semejante dicotomía; 2) aun suponiendo que valga esa noción de analiticidad, y que se entienda como una ausencia de información suplementaria o adicional, es menester recalcar que $\ulcorner p\vee q\urcorner$ no contiene más, sino menos, información que $\ulcorner p\urcorner$ o que $\ulcorner q\urcorner$: si yo sólo sé de alguien que es ciego o sordo, sé menos que si sé positivamente que es ciego, o que si sé positivamente que es sordo —o que si sé que es ambas cosas a la vez.

El argumento de Strawson y otros es que el principio de adición es «paradójico» y constituye un tránsito a algo irrelevante: si sabemos que Mozambique está en África, no concluiríamos que está en África o en Asia, pues nada viene a hacer aquí Asia.

Strawson expone su argumento (en su libro *Introduction to logical theory*, Methuen, 1963, p.91) como sigue: decir que es verdad que p o q da a entender o sugiere (*implies*) que quien lo dice está inseguro de cuál de las dos alternativas, la de que p o la de que q, sea la verdadera. Lo que parece proponer Strawson no es un rechazo del principio de adición, sino un uso restringido del mismo, en el marco del cumplimiento de ciertas presuposiciones, pero nunca fuera de tal marco. Así, dice, si alguien ha vaticinado esta mañana que por la tarde habrá lluvia o ráfagas de viento, y, al llegar la tarde hay ráfagas de viento, decimos que se ha confirmado su vaticinio (porque, si hay ráfagas de viento, es entonces verdad que o hay lluvia o hay ráfagas de viento); pero la inferencia está sujeta a la circunstancia comunicacional en la cual se ha expresado primero tal vaticinio. Fuera de tal circunstancia, el 'o' conlleva, por ello, la regla de adición.

Paréceme inaceptable tal punto de vista. En verdad es lo contrario lo que sucede: la regla vale, y el principio de adición es verdadero, para cualesquiera casos; otra cosa es que sea pertinente, en una situación conversacional dada, el expresar o no una instancia del mismo (en seguida voy a desarrollar este punto). Lo que es un principio verdadero, o una regla de inferencia correcta —preservadora de la verdad—, no puede pasar a serlo o dejar de serlo al albur de lo que la gente haya dicho o se haya abstenido de decir.

Por un derrotero similar marcha Mario Bunge quien (en *Crítica* nº 20, pp. 105-7) arguye que, si bien es correcta la regla de adición 'en contextos axiomáticos', debe empero vigilarse su aplicación fuera de los mismos para evitar 'las falacias semánticas cometidas con la complicidad del principio de adición'. Esas dizque falacias consistirían, según ese autor, en la intromisión de consideraciones ajenas al tema tratado; así, sea $\ulcorner p \urcorner$ una ley afirmada en una determinada rama del saber; la regla de adición permitiría concluir «o es del todo falso que q, o p», lo cual, por definición, nos lleva a: «Si q, entonces p». (Como se ve, Bunge quiere, sobre todo, restringir la aplicación del principio *uerum e quolibet* (o sea: nuestro esquema A164), del cual hablaré al comienzo del capítulo siguiente). Y pretende Bunge que «Si q, entonces p» cambia el tema, y ya puede no ser una ley sobre un asunto de esa rama particular del saber; p.ej., sea $\ulcorner q \urcorner$ un enunciado como: 'Yo observo lo que sucede'; entonces, de la verdad de que Urano gira alrededor del Sol en 84 años, concluiríamos que, si yo observo lo que pasa, entonces gira Urano alrededor del Sol en 84 años. Sí, ¿y qué? Contrariamente a lo que piensa Bunge, la conclusión no es «psicológica», sino que sigue siendo una verdad astronómica: por ser verdadero ese aserto sobre la traslación de Urano, sigue siendo verdadero que yo observo o no lo que pasa; y, por lo tanto, es verdad tanto que, si yo observo lo que pasa, Urano gira alrededor del Sol en 84 años como **también** que, si yo no observo lo que pasa, Urano gira alrededor del Sol en 84 años. No hay ninguna falacia. Otra cosa es que convenga, en un texto de astronomía, escribir una verdad como 'Si yo observo lo que pasa, Urano gira alrededor del Sol en 84 años'. No conviene, pues es en ese contexto comunicacionalmente improcedente; no viene a cuento, pues, por ser un mero corolario banalmente deducible de una verdad astronómica, de ser expresado en un texto de esa índole, daría al lector la impresión de estar queriendo decir otra cosa —en virtud de las normas de economía que rigen la comunicación: verdades banales, o consecuencias banalmente obtenibles de verdades no banales ya expresadas, no se emiten en un entorno comunicacional dado más que en función de circunstancias muy especiales, o para vehicular un mensaje *sui generis*. (Lamentablemente, me veo obligado a exponer estos lugares comunes, casi perogrulladas, para salir al paso de tales confusiones.)

El «remedio» de Bunge (limitar las aplicaciones de la regla de adición impidiendo que puedan figurar en la conclusión predicados nuevos) me parece peor que la enfermedad, aun suponiendo que hubiera enfermedad, que no la hay. Semejante remedio baldaría y esterilizaría a la lógica. Porque semejante cortapisa acarrearía, entre otras graves consecuencias, la imposibilidad de aplicar las leyes y reglas de la lógica salvo en el interior de cada una de las disciplinas del saber **por separado**; con lo cual no podría haber un sistema global lógicamente coherente de la ciencia o del saber en su conjunto, ni podrían criticarse ciertas hipótesis de un saber o disciplina particular en función de puntos de vista que prevalezcan en otro saber; y, así, cada saber o disciplina sería completamente independiente de los demás y se arruinaría la empresa de un saber interdisciplinario.

A mi modo de ver, la falacia está, no en aplicar, sin esos grilletes que quiere Bunge imponerle, la regla de adición, sino en el razonamiento mismo de Bunge. Porque —como lo ha puesto, acertadamente, de relieve José A. Robles (en *Crítica*, Nº 23, p. 106)— cabe afirmar $\ulcorner p\lor q \urcorner$ y también $\ulcorner q\supset p \urcorner$, sí, pero cabe hacerlo porque hemos supuesto previamente la verdad de $\ulcorner p \urcorner$ donde podemos concluir $\ulcorner p\lor q \urcorner$, o también $\ulcorner q\supset p \urcorner$. Por eso precisamente no es pasar a la psicología el concluir, **dentro de un sistema** en el que se ha afirmado $\ulcorner p \urcorner$ —siendo $\ulcorner p \urcorner$, p.ej., la oración sobre la traslación de Urano— la conclusión «Si observo lo que pasa, entonces p». Porque esa conclusión se está afirmando dentro de tal sistema y sobre la base de que se ha sentado previamente la afirmación de $\ulcorner p \urcorner$.

Mi respuesta a las objeciones de Strawson y Bunge contra la validez irrestricta del principio y de la regla de adición es que, si sabemos que Togo está en África, concluimos que está en África o en Asia; y, por eso, cuando nos dicen que hay miseria en los países que están en África o en Asia, podemos concluir que la hay en Togo. Similarmente, si sabemos que el primer apellido de Ofelia empieza por 'R', concluimos que empieza por 'R' o por 'S'; y, así, avisamos a Ofelia cuando dan orden de que se presenten a reconocimiento médico mañana por la tarde aquellos cuyo primer apellido empieza por ‘R’ o por ‘S’. El error de Strawson y los otros autores aludidos estriba en confundir la semántica, que sólo se ocupa de la verdad, con la pragmática, que se ocupa de la **pertinencia pragmática**, en entornos comunicacionales corrientes, de ciertas afirmaciones: muchos razonamientos perfectamente válidos no serían empleados en situaciones comunicacionales corrientes, pues, para que un mensaje, o una serie de mensajes, sea pertinente —esté, digámoslo así, en su lugar, sea aceptable por los interlocutores— en una situación comunicacional dada, debe ajustarse a un gran número de requisitos, aparte del de ser verdad. Ahora bien, si es verdad que p, es también verdad que p-o-q; porque, si fuera totalmente falso que p-o-q, sería entonces (en virtud de la ley de DeMorgan) totalmente falso que p y también totalmente falso que q, en contra de lo que hemos supuesto. Y es que, mientras la conyunción minimiza el grado de verdad de los conyuntos —toma el grado inferior de entre los dos—, la disyunción maximiza el grado de verdad de los disyuntos —toma el grado superior de entre ambos.

Al esquema A163/1 lo llamaré (¿tendenciosamente?) **principio del buen entrañamiento**. Una instancia del mismo es: ‘O bien Apolinar tiene frío sólo si es friolero, o bien Apolinar tiene frío’. Este principio, aceptado por la lógica clásica y por el sistema *Aj*, es, en cambio, rechazado por la mayoría de los sistemas de lógica no-clásicos, desde el cálculo intuicionista de Heyting hasta las lógicas relevantes, pasando por las lógicas multivalentes de Łukasiewicz, Gödel y otros.

Las consideraciones que cabe aducir a favor, y en contra, del principio del buen entrañamiento son, sobre poco más o menos, las mismas que cabe aducir respecto de A164 (del principio *uerum e quolibet*), que voy a discutir ahora mismo. Con todo, conviene señalar que hay por lo menos un cálculo sentencial (el intuicionista de Heyting) que, admitiendo el principio *uerum e quolibet*, rechaza, sin embargo, el principio del buen entrañamiento. Lo cual quiere decir que el principio del buen entrañamiento es más fuerte. Ahora bien, si son correctas las consideraciones que voy a alegar a favor del principio *uerum e quolibet*, parece que acarrean la corrección del principio del buen entrañamiento; porque, a tenor de esas consideraciones, es condición **suficiente** (no necesaria) para que el hecho de que p entrañe al hecho de que q que el primero sea totalmente falso; mas, en virtud del principio fuerte de tercio excluso, o es totalmente falso que p, o bien p (A117); razonemos según la regla rinf41/1, que es un corolario de la regla del dilema (rinf41) —más tarde se derivarán ambas; rinf41/1 autoriza a inferir de dos premisas, la segunda de las cuales es $\ulcorner p\lor q\urcorner$ y la primera de las cuales es $\ulcorner p\supset r\urcorner$, la conclusión $\ulcorner r\lor q\urcorner$; tomemos como segunda premisa $\ulcorner\neg p\lor p\urcorner$, o sea: el principio fuerte de tercio excluso (A117): «O es del todo falso que p, o p»; ello equivale a reemplazar $\ulcorner p\urcorner$ por $\ulcorner\neg p\urcorner$, y $\ulcorner q\urcorner$ por $\ulcorner p\urcorner$; ahora bien, si es del todo falso que p, entonces es verdad que: p sólo si q (en virtud de la aludida suficiencia de la falsedad total de $\ulcorner p\urcorner$ para la verdad de $\ulcorner p\supset q\urcorner$); por tanto tenemos la primera premisa: $\ulcorner\neg p\supset.p\supset q\urcorner$ (que más tarde demostraré como un esquema teoremático de nuestro sistema: A190); eso quiere decir que, en la primera premisa de la regla, reemplazamos $\ulcorner r\urcorner$ por $\ulcorner p\supset q\urcorner$; el resultado de la aplicación de la regla será, precisamente, el esquema A163/1: $\ulcorner p\supset q\lor p\urcorner$.

Así pues, siempre y cuando aceptemos: 1º) que la total falsedad de lo mentado por una oración es condición suficiente para la verdad de una fórmula condicional cualquiera cuya prótasis sea la oración en cuestión (cosa que los intuicionistas aceptan); 2º) la regla del dilema (a saber que: si un hecho entraña a un segundo,y si un tercer hecho entraña a un cuarto, y, si es verdad que se da o el primero o el tercero, entonces se da o el segundo o el cuarto); 3º) el principio fuerte de tercio excluso; siempre y cuando aceptemos esas tres cosas, nos vemos obligados a aceptar el principio del buen entrañamiento. Los relevantistas repulsan lo primero; lo segundo parece más inmune a las críticas. Pero los intuicionistas y constructivistas rechazan la conclusión ¿Por qué? Porque no aceptan lo tercero, o sea: el principio de tercio excluso (lo repudian en todas las formulaciones del mismo). Según ellos, hay algunas oraciones $\ulcorner p\urcorner$ tales que carece de verdad —carece por completo de verdad— tanto decir que la oración es verdadera como que es falsa; mas no es que la disyunción de una oración así, $\ulcorner p\urcorner$, con su (super)negación sea, según ellos, falsa; más bien carece por completo de verdad, pero, a su juicio, no cabe identificar falta de verdad con falsedad —estaríamos entonces restableciendo subrepticiamente el principio que ellos repudian. Su razón para repudiar el principio es que su enfoque del mundo es idealista: ser verdad, tener lugar, es lo mismo que ser comprobable (o constatable, o confirmable, o demostrable) por «nosotros»; pero hay oraciones que nosotros no podemos comprobar ni saber si son verdaderas o falsas; luego no son ni verdaderas ni falsas, ni lo uno ni lo otro en grado alguno (carecen por completo de verdad y también carecen por completo de falsedad). Así —dice el filósofo intuicionista Dummett—, carece tanto de verdad como de falsedad la oración disyuntiva ‘Habrá una ciudad en el Polo Norte en el año 3000 o no la habrá’; pues no tenemos medio alguno para saber si la habrá o no.

La posición filosófica que subyace en los enfoques que aceptan el principio de tercio excluso es, en cambio, compatible con el realismo (mientras que un idealista o verificacionista sólo puede aceptar el principio de tercio excluso si se proclama omnisciente). Por ello, y como el autor de estos *Rudimentos* se profesa ardiente realista, abraza un sistema lógico con principio de tercio excluso. Por ello mismo, acepta el principio del buen entrañamiento (A163/1). Pero, para justificar tal principio, es menester todavía justificar la tesis de que la falsedad total de la prótasis basta para la verdad del enunciado condicional; y eso voy a justificarlo en seguida.

El esquema A164, el principio *uerum e quolibet*, es el blanco principal de los ataques de los lógicos relevantes y de otras escuelas afines (conceptivistas, conexivistas). Se objeta contra tal esquema que acarrea una irrelevancia: porque, aplicándole rinf01, obtenemos una derivación inmediata de rinf46, a saber $p \vdash q \supset p$. Así pues, de que Max Planck recibió el Premio Nobel de física se desprende que, si Margarita Yourcenar ha escrito las Memorias de Hadriano, entonces Max Planck recibió el Premio Nobel de física. Es fácil la tarea de ridiculizar esas inferencias, recalcando cuán raras o estrambóticas suenan; pero, como eso no constituye por sí solo un argumento válido, resulta de hecho muy difícil presentar alguna razón persuasiva en contra de las mismas. De nuevo, creo yo, hay que deslindar pragmática de semántica: ocúpase la última sólo de la verdad; la primera, más que de la verdad, de las condiciones que hacen comunicacionalmente feliz o satisfactorio a un mensaje, o a una secuencia de mensajes, según el entorno o situación comunicacional de que se trate. Pues bien, en los más contextos comunicacionales de la vida cotidiana no argüiríamos según rinf46; mas ello sólo muestra que son limitados los contextos comunicacionales en que es pertinente el empleo de tal regla de inferencia, no que la regla sea incorrecta, que no lo es. No basta con aducir la «rareza» de un mensaje, o de una secuencia de mensajes, para mostrar su falsedad o incorrección; hace falta argumentar a favor de la falsedad o incorrección, pues no todo lo «raro» es erróneo (lo que parece comúnmente raro, colocándose uno mentalmente en situaciones comunicacionales de la vida cotidiana).

Frente a esa impugnación de los relevantistas, yo defiendo —con la lógica clásica— el principio *uerum e quolibet* con el argumento siguiente: supóngase la verdad de que p; entonces, de suponerse la verdad de que q, es verdad que p. (Y lo es porque, como es verdad, es verdad, supóngase o no la verdad de que q). Cierto es que la cláusula «de suponerse la verdad de que q» es «irrelevante», en el sentido de que, aun eliminándola, seguimos teniendo una verdad (el principio de autoentrañamiento: A116). Pero eso no invalida la verdad del principio discutido, pues, de invalidarla, con el mismo argumento se hundirían los principios de simplificación, de adición y muchísimas otras verdades condicionales (o sea: verdades cuyo functor **central** es el entrañamiento, el ‘si… entonces’), salvo el principio de autoentrañamiento (A116) y alguna otra de entre las más simples.

La aceptación o el rechazo del principio *uerum e quolibet* constituye una piedra de toque del tipo de sistema lógico al que se adhiere uno: dado el nexo existente entre el functor de entrañamiento y la deducibilidad, subyace en la aceptación del principio una noción de deducibilidad muy alejada de la que tienen los relevantistas: la noción de deducibilidad de los sistemas que aceptan el principio —la lógica clásica, el cálculo intuicionista de Heyting, el sistema *Aj* aquí propuesto— sostiene que la deducibilidad es una relación que se da entre un enunciado $\ulcorner p \urcorner$ y un conjunto de enunciados Γ ssi: o bien alguno de los miembros de Γ es del todo falso, o bien $\ulcorner p \urcorner$ es verdadero; o sea: sólo deja de ser $\ulcorner p \urcorner$ deducible de Γ en el caso de que, siendo verdaderos todos y cada uno de los miembros de Γ, sea $\ulcorner p \urcorner$ del todo falso. (A diferencia de nuestro enfoque, los clasicistas e intuicionistas, que desconocen los matices y grados de verdad, en vez de decir ‘del todo falso’ dicen ‘falso’ a secas, pues, para ellos, la expresión ‘del todo’ es pleonástica o expletiva). A esa noción de deducibilidad la repudian los relevantistas, por reputarla marfuza: según ellos, para que haya deducibilidad de un enunciado a partir de un conjunto de premisas son menester dos condiciones: 1ª) que haya un entrañamiento **necesario** del enunciado por la conyunción de las premisas (según ellos todo entrañamiento es o necesariamente verdadero o (¿necesariamente?) falso); 2ª) que ese entrañamiento sea un envolvimiento de la significación del enunciado por la de la conyunción de las premisas. Ya he discutido eso del ‘envolvimiento de significación’, a propósito del principio de adjunción (al final del capítulo anterior), del cual —junto con principios obvios que aceptan los relevantistas— se desprende el principio *uerum e quolibet* —vide supra. Lo de la necesariedad del entrañamiento nos llevaría a una discusión filosófica acerca de lo necesario y lo contingente; sería divagar el abordar aquí ese tema. (Para el autor de este libro no hay nada absolutamente contingente, o sea: tal que fuera posible que tal algo fuera absolutamente inexistente o irreal.) Sea de ello lo que fuere, el uso normal y corriente de ‘si… entonces’ no parece corroborar esa noción restrictiva y puntillosa de la deducibilidad y del entrañamiento de la cual se ufanan los relevantistas. Así, supongamos que hay trigo en Orihuela; entonces —como se dice vulgarmente—, llueva o no llueva, hay trigo en Orihuela; o sea: tanto si llueve como si no llueve, hay trigo en Orihuela. Pero «tanto si… como si no…, ———» es una variante estilística de «si… o no…, entonces ———». Ahora bien, como vamos a verlo por el esquema A169 (ley del desglosamiento de una prótasis disyuntiva) —aunque tampoco falten detractores de ese esquema, $\ulcorner p\lor q\supset r\urcorner$ equivale a $\ulcorner p\supset r\land.q\supset r\urcorner$. Por lo tanto, ‘Tanto si llueve como si no llueve hay trigo en Orihuela’, que equivale a ‘Si llueve o no llueve, entonces hay trigo en Orihuela’, es equivalente a: ‘Si llueve, hay trigo en Orihuela; y, si no llueve, hay trigo en Orihuela’. Por la regla de simplificación (rinf23) deducimos de ahí lo siguiente: ‘Si llueve, hay trigo en Orihuela’; y hemos deducido eso de la mera suposición de que hay trigo en Orihuela; luego, conociendo la verdad de una oración, conocemos la verdad de cualquier enunciado condicional del cual esa oración constituya la apódosis, sea la prótasis lo que fuere.

Similarmente, supongamos que yo le digo a Nereo: ‘Tu hija se va a casar’, porque lo sé a ciencia cierta y de buena tinta. Supongamos que me contesta Nereo: ‘Si yo lo permito’. La respuesta que yo puedo darle —quizá descortés, pero verdadera, dada la información que poseo— es: ‘Lo permitas o no, se va a casar’, e.d.: ‘Tanto si lo permites como si no lo permites, se va a casar’; lo cual equivale a ‘Si lo permites, se va a casar; y, si no lo permites, se va a casar’; de lo cual se desprende, por simplificación: ‘Si lo permites, se va a casar’. Así, de la premisa de que se va a casar, se desprende la conclusión de que, si Nereo lo permite, se va a casar. La pertenencia pragmática, comunicacional, de sacar tal conclusión puede depender de qué diga mi interlocutor; pero no la verdad del hecho, la cual no depende de esos factores pragmático-comunicacionales. Así no hubiera dicho nada mi interlocutor, sería **correcta** la conclusión: de $\ulcorner p\urcorner$ se desprende, por consiguiente: «Si q, entonces p».

Pasemos a considerar el esquema A165, una instancia del cual es la siguiente: el que sea cierto que, si una persona sufre de difteria, entonces, si esa persona sufre de difteria, es portadora del bacilo de Klebs-Loffler. Veamos dos corolarios de A165.

A165/1 $p\supset q\supset.p\supset q$ (Prueba: A165, rinf11, rinf12)

A165/2 $p\supset(p\supset q)\supset.p\supset q$ (Prueba: A165, rinf12)

Ambos principios (tanto A165/1 como A165/2) han sido impugnados por algunos lógicos. Ciertos lógicos relevantistas (Routley, p.ej.) rechazan el segundo de esos dos principios —llamado **principio de contracción**. Pero ese rechazo parece un expediente *ad hoc* para evitar conclusiones que les parecen implausibles o peligrosas, en la construcción de una teoría de conjuntos (el asunto es demasiado complejo como para discutirlo en este lugar). (Podría argüirse en contra del principio que, aun cuando el hecho de que p entrañe el entrañamiento del hecho de que q por el hecho de que p, no por ello ha de entrañar p al hecho mismo de que q). Pese a tales reticencias, normalmente se aceptaría tal principio como correcto: suponiendo —p.ej.— que, si una cuchara es de plata, entonces es de plata sólo si se funde a 961 grados; suponiendo eso, resulta que, si una cuchara es de plata, se funde a 961 grados. Porque la suposición («Si p, entonces: si p, entonces q») dice que, en el caso de que sea verdad que p, entonces: en el caso de que sea verdad que p, q; pero, por supuesto, la prótasis de la apódosis de la suposición no añade nada, simplemente repite la prótasis de la suposición globalmente tomada; y, por consiguiente, supuesta la prótasis de la suposición, nada más —pero nada menos— se supone al expresarse la prótasis de la apódosis; ya está expresado con la prótasis de la suposición.

También se han esgrimido dificultades contra A165/1, al que cabe llamar **principio de expansión** —si bien se ha dado tal denominación a otro principio, que luego estudiaremos. Seguramente, la raíz de los reparos está, de nuevo, en una confusión de la semántica con la pragmática: no se solería razonar, en contextos usuales, diciendo que, suponiendo que, si alguien es rey tiene una corona, entonces: si alguien es rey, lo es sólo si tiene una corona. Pero el que no se suela afirmar eso no quita para que sea verdadero, como efectivamente lo es.

Sigamos adelante con la demostración de esquemas.

A166 $p\supset(q\supset r)I.q\supset.p\supset r$

Prueba:

(2)	$\neg p\lor(\neg q\lor r)I.\neg p\lor\neg q\lor r$	A149, rinf11
(3)	$\neg p\lor\neg q\lor rI.\neg q\lor\neg p\lor r$	A123, rinf16bis
(4)	$\neg q\lor\neg p\lor rI.\neg q\lor.\neg p\lor r$	A149
(5)	$\sigma 2I\delta 3$	(2), (3), rinf15
(6)	$\sigma 2I\delta 4$	(5), (4), rinf15
	A166	(6), df06

A167 $p\supset(q\supset r)\supset.q\supset.p\supset r$ (Prueba: A166, rinf12)

A167/1 $p\supset q\supset.p\supset.r\supset q$

Prueba:

(2)	$p\supset q\supset.r\supset.p\supset q$	A164
	$p\supset q\supset.p\supset.r\supset q$	A166, (2), rinf21, df06, rinf13

A167/2 $p\supset q\supset.p\supset.r\supset.s\supset q$ (Prueba: A167/1, A164, A116, rinf21, df06)

A167/3 $p\supset q\supset.p\supset.p'\supset.r\supset.s\supset q$ (Prueba similar)

Puede construirse una cadena infinita de esquemas teoremáticos del mismo patrón, pero cada uno más complicado que los anteriores.

A168 $p\land q\supset rI.p\supset r\lor.q\supset r$

Prueba:

(2)	$\neg(p\land q)I.\neg p\lor\neg q$	A150/8, rinf11
(3)	$\neg(p\land q)\lor rI.\neg p\lor\neg q\lor r$	(2), rinf16bis
(4)	$\neg p\lor\neg q\lor rI.\neg p\lor.\neg q\lor r$	A149
(5)	$\neg q\lor rI.\neg q\lor r\lor r$	A147, rinf11
(6)	$\neg p\lor(\neg q\lor r)I.\neg p\lor.\neg q\lor r\lor r$	(5), rinf21

(7) ¬p∨(¬q∨r)I.¬p∨.r∨.¬q∨r A123, rinf21, rinf15, (6)

(8) ¬p∨(r∨.¬q∨r)I.¬p∨r∨.¬q∨r A149

(9) ¬(p∧q)∨rI.¬p∨r∨.¬q∨r (3), (4), (7), (8), rinf31

A168 (9), df06

De aquí en adelante, haré un uso implícito de la regla rinf31 juntamente con rinf11. Si hemos demostrado, en una línea, una fórmula ⌜pIq⌝ y si tenemos como teoremas (o sea: como instancias de algún esquema teoremático —axiomático o no—) las fórmulas ⌜qIr⌝, ⌜rIr’⌝, …, ⌜r^{n-1}Ir^{n}⌝ (o —lo que en virtud de rinf11— equivale a lo mismo, a saber: ⌜rIq⌝, etc. —o sea, la inversa de alguna de esas fórmulas equivalenciales—), entonces podremos escribir:

(m) pIq

σmIr

σmIr’

σmIr”

.

.

σmIr^{n}

Además, cuando así se haga, lo que nombrará el número de orden que, encerrado entre paréntesis, se halla a la izquierda de la primera línea de esa cadena de líneas será la fórmula equivalencial cuyo miembro izquierdo será el de la primera línea y cuyo miembro derecho será el de la última línea (o sea —en el caso supuesto que se acaba de citar— ‘m’ será, en adelante, un nombre de la fórmula ⌜pIr^{n}⌝).

A169 p∨q⊃rI.p⊃r∧.q⊃r

Prueba:

(2) ¬(p∨q)∨rI.¬p∧¬q∨r A150/7, rinf19

σ2I.¬p∨r∧.¬q∨r A142

p∨q⊃rI.p⊃r∧.q⊃r (2), df06

A170 p⊃q∨.q⊃r

Prueba:

(2) ¬q∨q∨.¬p∨r A163

(3) ¬p∨q∨.¬q∨r (2), A123, A149, rinf13, rinf19, rinf21, rinf31

A170 (3), df06

A171 $p\supset(q\vee r)\mathrm{I}.p\supset q\vee.p\supset r$

Prueba:

(2)	$\neg p\vee(q\vee r)\mathrm{I}.\neg p\vee\neg p\vee.q\vee r$	A118, rinf16bis
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg p\vee.\neg p\vee.q\vee r$	A149
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg p\vee.\neg p\vee q\vee r$	A149, rinf21
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg p\vee.r\vee.\neg p\vee q$	A123, rinf21
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg p\vee r\vee.\neg p\vee q$	A149, rinf21
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg p\vee q\vee.\neg p\vee r$	A123
	A171	(2), df06

A171/1 $p\supset q\vee.p\supset\neg q$

Prueba:

(2)	$q\vee\neg q$	A117, A123, rinf13
(3)	$p\supset.q\vee\neg q$	(2), A164, rinf01
	$p\supset q\vee.p\supset\neg q$	(3), A171, rinf13

El esquema A166 se llama ‘ley conmutativa del condicional’ (o ‘del entrañamiento’). Como muchísimos otros principios que estamos demostrando, no valdría si, en él, reemplazáramos cada ocurrencia de ‘$\supset$’ por una de ‘$\rightarrow$’ (e.d. de la implicación). Pero sí vale para el condicional: el que, si Vidal toma café, entonces, si no tiene somnífero, pasa la noche en blanco equivale a que, si Vidal no tiene somnífero, entonces, si toma café, pasa la noche en blanco.

El esquema A167 es el principio de permutación, y resulta obvio, después de lo dicho sobre el anterior. El esquema A169 se denomina ‘desglosamiento de una prótasis conyuntiva’, en tanto que el esquema A169 se denomina ‘desglosamiento de una prótasis disyuntiva’. Veamos una instancia de éste último. El que sea cierto que, si le toca la lotería o le suben el sueldo, Germán compra un regalo para su hermana, equivale a lo siguiente: que, si le toca la lotería, compra Germán un regalo para su hermana, y, si le suben el sueldo, compra Germán un regalo para su hermana.

El esquema A170 es lo que cabría llamar ‘principio clásico de entrañamiento’, pues quizá este principio, más que ningún otro, es lo que caracteriza al entrañamiento clásico, que es también el del sistema *Aj*: o bien, si p entonces q; o bien, si q, entonces r (y eso para cualesquiera oraciones que se coloquen en lugar de las letras esquemáticas ‘p’, ‘q’ y ‘r’). La justificación de tal esquema viene dada como sigue: recuérdese que, para que el hecho de que p entrañe al de que q, es condición suficiente que el hecho de que q sea, poco o mucho, verdadero; y, para que entrañe el hecho de que q al de que r, es condición suficiente que el hecho de que q sea totalmente falso. Pero, en virtud del principio fuerte de tercio excluso (A117) una de dos: o bien es verdadero (poco o mucho, no hace al caso) el hecho de que q; o bien es totalmente falso. Si sucede lo primero, entonces —por lo dicho— será verdad que el hecho de que p entraña al hecho de que q (sea lo que fuere el hecho de que p); si sucede lo segundo, entonces el hecho de que q entraña al hecho de que r(sea éste lo que fuere). Al igual que el principio de buen entrañamiento (A163/1), este principio clásico de entrañamiento es rechazado tanto por las lógicas relevantes y otras afines como asimismo por los cálculos intuicionistas y, en verdad, posiblemente por casi todas las lógicas no clásicas, con excepción de *Aj* (y otros sistemas similares propuestos por el autor de este libro), de algunos de los sistemas de da Costa y, posiblemente de algún otro sistema; además, los sistemas aludidos de da Costa —como C_1— comparten con el sistema *Aj* la característica de ser **rectos** entendiendo por ‘sistema recto’ un sistema que sea una extensión conservativa de la lógica clásica con respecto a los functores de conyunción ‘∧’, de disyunción ‘∨’ y condicional ‘⊃’: un sistema S’ es una extensión conservativa de otro, S, con respecto a determinados signos ssi cada teorema de S que contenga sólo esos signos (más letras esquemáticas u oraciones atómicas) es también un teorema de S’ **y viceversa** (si no se añade la cláusula ‘y viceversa’, S’ será una extensión de S, pero quizá no conservativa). La idea que inspira tanto a esos sistemas de da Costa como al sistema *Aj* es la de que la lógica clásica está bien, tal como está, y es correcta y adecuada, en lo tocante al tratamiento que da a esos tres functores; o sea: que, en lo tocante al ‘y’, al ‘o’ y al ‘si… entonces’, no hay reparo que oponer a la lógica clásica, y que las fallas de ésta hay que buscarlas en otro lugar, y, entre otras cosas, en lo tocante a la negación; esos sistemas (lo mismo que *Aj*) abarcan, además de una negación con las mismas características de la lógica clásica (aunque introducida de modo muy distinto), una negación más débil —si bien son muy diferentes las características de la negación débil de *Aj* de las de la negación débil de un sistema de da Costa como C_1. (Estos temas vendrán desarrollados en el último capítulo de la Sección IV de este libro.)

El esquema A171 es el principio de desglosamiento de una apódosis disyuntiva. He aquí una instancia del mismo: El que, si Fermín estudia una lengua clásica, entonces o estudia griego o estudia latín equivale a que sea verdad que, o bien, si Fermín estudia una lengua clásica, estudia griego, o bien, si Fermín estudia una lengua clásica, estudia el latín.

Al esquema A171/1 se ha dado en llamarlo ‘principio de Stalnaker’, por el uso que de él ha hecho el lógico de ese nombre, particularmente en el asunto de los condicionales subjuntivos. También es rechazado ese principio por la mayoría de los sistemas no clásicos, aunque haya algunos que sí lo acepten. Lo admiten, para los condicionales subjuntivos, la lógica clásica, el sistema C_1 de da Costa, el sistema *Aj* y algún otro sistema multivalente.

En la demostración de los siguientes teorema, ya no haré mención, en la justificación de cada prueba, de las reglas de inferencia siguientes: rinf01, rinf11, rinf12, rinf13, rinf14, rinf28, rinf31, rinf32. Con ello quedará más despejado —menos sobrecargado— el conjunto de referencias que justifican cada prueba y, así, el *neruus probandi* de la misma quedará más claramente puesto de relieve.

Con la eliminación de toda referencia a rinf11, queda dicho, implícitamente, que cada teorema de la forma ⌜pIq⌝ puede leerse, indistintamente, tal como está escrito, y también como ⌜qIp⌝.

A172 p⊃q⊃.q⊃r⊃.p⊃r

Prueba:

(2)	¬¬p∨¬p∨.r∨.¬¬q∧¬r	A163
(3)	¬¬q∨¬q∨.¬p∨r	id.
(4)	¬r∨r∨.¬p∨¬q	id.
(5)	¬¬p∨.(¬¬q∧¬r)∨.¬p∨r	(2), A149, A123
(6)	¬p∨r.¬q∨¬¬q	(3), A123
(7)	¬p∨r∨.¬q∨¬r	(4), A149, A123
(8)	6∧7	(6), (7)
(9)	¬q∨.¬¬q∧¬r∨.¬p∨r	A123, (8), A149, A141
(22)	¬¬p∨(¬¬q∧¬r∨.¬p∨r)∧.¬q∨.¬¬q∧¬r∨.¬p∨r	(5), (9)
(23)	¬¬p∧¬q∨.¬¬q∧¬r∨.¬p∨r	(22), A142
(24)	¬(¬p∨q)∨.¬¬p∧¬r∨.¬p∨r	(23), A150/7
(25)	¬(¬p∨q)∨.¬(¬q∨r)∨.¬p∨r	(24), A150/7

A172 (25), df06

A173 $p\supset q\supset .r\supset p\supset .r\supset q$

Prueba:

(2) $r\supset p\supset .p\supset q\supset .r\supset q$ A172

A173 (2), A167

De ahora en adelante, haciendo un uso implícito de rinf34, podremos escribir, si son teoremas ya demostrados las fórmulas $\ulcorner q\supset r\urcorner$, $\ulcorner r\supset s\urcorner$, $\ulcorner s\supset s^1\urcorner$, $\ulcorner s^1\supset s^2\urcorner$, $\ulcorner s^2\supset s^3\urcorner$, … $\ulcorner s^{n-1}\supset s^n\urcorner$, y, si, en una línea, se ha probado $\ulcorner p\supset q\urcorner$, lo siguiente:

(m) $p\supset q$

$\sigma m\supset r$

$\sigma m\supset s$

$\sigma m\supset s^1$

$\sigma m\supset s^2$

$\sigma m\supset s^3$

.

.

$\sigma m\supset s^n$

Y, en lo sucesivo, ‘(m)’ será un nombre de $\ulcorner p\supset s^n\urcorner$.

Otro procedimiento que utilizaré será el siguiente. Si tenemos un teorema $\ulcorner p\supset q\urcorner$ y si en una línea se demuestra $\ulcorner p\urcorner$, entonces escribiré —haciendo uso implícito de rinf01:

(m) $p\supset]q$

Y, en adelante, ‘(m)’ será un nombre de la fórmula $\ulcorner q\urcorner$. Generalizando el procedimiento, supongamos que se ha probado: p, p^1, p^2 … p^{n-1}; y supongamos también que se prueba:

$p\supset .p^1\supset .p^2\supset .\ \dots\ \supset .p^{n-1}\supset p^n$

Haciendo n pasos del procedimiento abreviatorio susodicho, tendríamos:

$p\supset .]p^1\supset .]p^2\supset .]p^3\supset .]\ \dots\ \supset .]p^{n-1}\supset]p^n$

Pues bien, abreviaré la sucesión de esos n pasos, escribiendo:

(m) $p\supset .p^1\supset .p^2\supset .p^3\supset .\ \dots\ p^{n-1}\supset]p^n$

Y, en lo sucesivo, ‘(m)’ será el nombre de la fórmula $\ulcorner p^n\urcorner$.

Estos procedimientos se combinarán con el anterior, fundiéndose en uno solo cuando sea conveniente.

A174 $p\supset .q\supset r\supset .q\supset .r\wedge q$

Prueba:

(2) $\neg p\vee p\vee .\neg q\vee \neg r$ A163

(3) $\neg r\vee r\vee .\neg p\vee \neg q$ A163

(4) $\neg\neg q\lor\neg q\lor.\neg p\lor.r\land p$ A163

(5) $3\land 2$ (3), (2)

(6) $\neg r\lor r\lor\neg p\lor\neg q\land.\neg p\lor p\lor\neg q\lor\neg r$ (5), A149

(7) $\neg p\lor\neg q\lor\neg r\lor r\land.\neg p\lor\neg q\lor\neg r\lor p$ (6), A123, A149

(8) $\neg p\lor\neg q\lor\neg r\lor.r\land p$ (7), A141

(9) $\neg p\lor\neg q\lor(r\land p)\lor\neg r$ (8), A123, A149

(22) $\neg p\lor\neg q\lor(r\land p)\lor\neg\neg q$ (4), A123, A149

(23) $9\land 22$ (9), (22)

(24) $\neg p\lor.\neg\neg q\land\neg r\lor.\neg q\lor.r\land p$ (23), A141, A123, A149

(25) $p\supset.\neg(\neg q\lor r)\lor.\neg q\lor.r\land p$ (24), df06, A150/7

$\sigma 25\supset.\neg q\lor r\supset.\neg q\lor.r\land p$ df06

$\sigma 25\supset.q\supset r\supset.q\supset.r\land p$ df06

A175 $p\supset(q\supset r)\supset.p\supset q\supset.p\supset r$

Prueba:

(2) $\neg\neg p\lor\neg p\lor r$ A163

(3) $\neg p\lor\neg q\lor r\supset.\neg p\lor\neg q\lor r$ A116

(4) $2\supset.3\supset.]\neg p\lor\neg q\lor r\supset.\neg p\lor\neg q\lor r\land.\neg\neg p\lor\neg p\lor r$ A174

$\sigma 4\supset.\neg\neg p\land\neg q\lor.\neg p\lor r$ A123, A149, A142

$\sigma 4\supset.\neg(\neg p\lor q)\lor.\neg p\lor r$ A150/7

$\sigma 4\supset.p\supset q\supset.p\supset r$ df06

A175 (4), A149, df06

A176 $q\supset(p\supset r)\supset.p\supset q\supset.p\supset r$ (Prueba: A175, A166)

A172 y A173 son principios de transitividad del entrañamiento (o sea: del condicional). El primero se denomina ‘principio de sufijación’; y el segundo ‘principio de prefijación’. Ambos son principios que han recibido un asentimiento extenso, aun cuando tampoco falten, en este punto, los impugnadores. Una instancia de A173 es ésta: Si se es mamífero, resulta que se es cetáceo sólo si se es vertebrado, entonces, si es verdad que se es cetáceo sólo si se es mamífero, resulta que se es cetáceo sólo si se es vertebrado.

A175 es el principio de (auto)distributividad del condicional. Una instancia del mismo es ésta: Supongamos que, si Balbina es partidaria de la filosofía escolástica, entonces es escotista sólo si acepta la existencia de distinciones formales; supuesto eso, resulta que, si Balbina es partidaria de la filosofía escolástica sólo si es escotista, entonces Balbina es partidaria de la filosofía escolástica sólo si acepta la existencia de distinciones formales. El ejemplo se muestra plausible con las consideraciones siguientes: la prótasis del enunciado global está clara; pero la prótasis de la apódosis (a saber: «Si Balbina es partidaria de la filosofía escolástica, entonces es escotista») puede ser plausible en ciertos casos (puede alguien afirmarlo, a partir de la repulsa que ha manifestado Balbina de los demás sistemas de filosofía escolástica); supuesta esa prótasis de la apódosis, y supuesta la prótasis del enunciado global, resulta la apódosis de la apódosis: Si Balbina es partidaria de la filosofía escolástica, acepta la existencia de distinciones formales.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 8º.— METATEOREMA DE LA DEDUCCIÓN Y OTROS TEOREMAS CONDICIONALES

Lo que voy a probar ahora no es **ni** un teorema de *Aj*, ni **tampoco** una regla de inferencia de *Aj*, sino un teorema sintáctico (o, si se quiere, metalingüístico) **acerca de** *Aj*, a saber:

Si $p \vdash q$ es una regla de inferencia de *Aj* en cuya derivación no ha intervenido rinf02, entonces $\ulcorner p \supset q \urcorner$ es un teorema de *Aj*.

Que $p \vdash q$ significa que hay una prueba desde la premisa $\ulcorner p \urcorner$ hasta la conclusión $\ulcorner q \urcorner$.

En *Aj* no hay más que dos únicas reglas de inferencia primitivas rinf01 (o sea la regla de *modus ponens*) y rinf02 (la regla de afirmabilidad).

Por consiguiente, para que $p \vdash q$ tenga lugar (para que $\ulcorner q \urcorner$ se deduzca de $\ulcorner p \urcorner$), ello debe, en última instancia, ser posible tan sólo en virtud de la regla rinf01 y/o de la regla rinf02, y de los axiomas de *Aj*, gracias a los cuales se engendran, a partir de rinf01 y de rinf02, otras reglas de inferencia derivadas; mas esas otras reglas de inferencia son **prescindibles**, ya que su empleo es un mero expediente para **abreviar** las pruebas, que pueden obtenerse con el uso **exclusivo** de rinf01 y de rinf02, siempre y cuando se aduzcan, en cada caso, cuantos teoremas de *Aj* han sido aducidos en las derivaciones de esas reglas de inferencia no primitivas.

Que haya una deducción $\ulcorner q \urcorner$ a partir de $\ulcorner p \urcorner$ (o sea que tenga lugar $p \vdash q$) quiere decir que hay una serie de fórmulas; r_1, r_2, r_3, … r_n, tal que r_1=p, y r_n=q, y que, en esa serie, cada r_i sea deducible de los anteriores **más** los teoremas de *Aj* **más** rinf01 (prescindo aquí de rinf02 pues lo que voy a probar deja de lado precisamente los casos en que se ha recurrido a rinf02). Ello quiere decir que, para cada i tal que $i \neq 1$, debe haber dos fórmulas (o esquemas), r_j y r_k tales que tanto j como k sean menores que i, y r_j sea $\ulcorner r_k \supset r_i \urcorner$. Recapitulando, tendremos en las líneas que forman la deducción desde $\ulcorner p \urcorner$ hasta $\ulcorner q \urcorner$:

(j) $r_k \supset r_i$

(k) r_k

Pero, de ahí, aplicando el teorema A164 de *Aj*, podemos proseguir la deducción como sigue:

(j^1)	$r_k \supset r_i . \supset . p \supset . r_k \supset r_i$	A164
(j^2)	$p \supset . r_k \supset r_i$	(j^1), (j), rinf01
(j^3)	$p \supset r_k . \supset . p \supset r_i$	A175, (j^2)
(k^1)	$r_k \supset . p \supset r_k$	A164
(k^2)	$p \supset r_k$	(k^1), (k), rinf01
(k^3)	$p \supset r_i$	(j^3), (k^2), rinf01

La conclusión que obtenemos en (k^3) es, justamente, ⌜$p\supset r_i$⌝. Pero esa conclusión vale para cualquier i, y, por tanto, para **cualquier** r_i, en la serie que va de r_1 a r_n; o sea: vale **también** para r_n, es decir: para ⌜q⌝. Luego, como caso particular de (k^3) tenemos: ⌜$p\supset q$⌝

Con ello queda probado el **metateorema de la deducción** en su versión débil.

METATEOREMA DE LA DEDUCCIÓN (versión fuerte)

Voy ahora a probar otra versión más fuerte del metateorema de la deducción, a saber: sea Γ un conjunto cualquiera de fórmulas, y sean ⌜p⌝ y ⌜q⌝ dos fórmulas, entonces, suponiendo $\Gamma, p \vdash q$ (e.d., suponiendo que cabe inferir ⌜q⌝ de un conjunto de premisas que abarca a ⌜p⌝ junto con todos los miembros de Γ), resulta:

$\Gamma \vdash p\supset q$

Prueba: sea ⌜r⌝ la conyunción de todas las fórmulas pertenecientes a Γ. En virtud de sucesivas aplicaciones de rinf28, tenemos:

$\Gamma \vdash r$

Luego, también en virtud de rinf28, tenemos:

$\Gamma , p \vdash r\wedge p$

Como ⌜q⌝ se infiere de Γ más ⌜p⌝, también se infiere de ⌜$r\wedge p$⌝, en virtud de rinf22 y rinf23; porque aplicando rinf22 y rinf23 vamos extrayendo, de la premisa ⌜$r\wedge p$⌝, una por una, todas las fórmulas miembros de Γ, así como ⌜p⌝, quedando así constituido el conjunto de fórmulas del cual se infiere ⌜q⌝. Por consiguiente, tenemos:

$r\wedge p \vdash q$

De donde, aplicando la versión débil del metateorema de la deducción, tenemos como resultado:

$r\wedge p\supset q$

como teorema demostrado. Ahora bien, apliquemos ahora A177, una de cuyas instancias es: $r\wedge p\supset q\mathrm{I}.r\supset.p\supset q$

Como tenemos demostrado ⌜$r\wedge p\supset q$⌝, demostramos ahora, a partir de esa instancia de A177, el teorema:

$r\supset.p\supset q$

De lo cual, mediante rinf01, resulta:

$r \vdash p\supset q$

Ahora bien, mediante aplicaciones sucesivas de rinf28 cabe inferir ⌜r⌝ de Γ. La inferibilidad es transitiva (puesto que una conclusión es inferible de un conjunto de premisas ssi hay una prueba de la conclusión a partir de las premisas; y, si un enunciado puede ser probado a partir de otro u otros, y éstos, a su vez, de otros, el primero puede ser probado a partir de los últimos; basta con, yuxtaponiendo las dos pruebas, hacer una sola). Por ello cabe concluir:

$\Gamma \vdash p\supset q$

Que es lo que se trataba de demostrar. Llamaré en lo sucesivo al metateorema de la deducción (en cualquiera de sus dos versiones) '(MD)'

PRUEBAS DE OTROS TEOREMAS

A177 $p\land q\supset r\mathrm{I}.p\supset.q\supset r$

Prueba:

(2)	$\neg(p\land q)\lor r\mathrm{I}.\neg p\lor\neg q\lor r$	A150/8
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg p\lor.\neg q\lor r$	A149
	A177	(2), df06

Dos corolarios se siguen inmediatamente de A177:

A177/1 $p\land q\supset r\supset.p\supset.q\supset r$ (Prueba: A177, rinf12)

A177/2 $p\supset(q\supset r)\supset.p\land q\supset r$ (Prueba: A177, rinf12)

Ahora se prueba otro esquema interesante:

A177/3 $p\supset q\land(q\supset r)\supset.p\supset r$ (Prueba: A172, A77/2)

El esquema A177/1 es el principio de exportación, uno de los blancos del ataque de los relevantistas (junto con el principio de adjunción y el principio *uerum e quolibet*). Lo que reprochan al principio de exportación es que, aunque $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$ entrañen, conjuntamente tomados, a $\ulcorner r\urcorner$, no por ello va a entrañar $\ulcorner p\urcorner$ por sí solo al entrañamiento de $\ulcorner r\urcorner$ por $\ulcorner q\urcorner$. Pero justamente ¡sí!, sí lo entraña —supuesta la hipótesis, o sea: supuesto que la conyunción de $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$ entraña a $\ulcorner r\urcorner$. Supongamos, p.ej., que, si el padre de una persona ha muerto y la madre de esa persona también ha muerto, la persona es huérfana, de ahí se desprende que, si el padre de una persona ha muerto, entonces, si también ha muerto su madre, la persona es huérfana, ¿No?

El esquema A177/2 es el principio de importación, que admiten los relevantistas (y las lógicas clásica e intuicionista), pero que no es validado, en cambio, por las lógicas łukasiewiczianas (en la lógica trivalente de Łukasiewicz con valores 1, ½ y 0, cuando el valor de $\ulcorner r\urcorner$ es 0 y el valor de $\ulcorner p\urcorner$ y de $\ulcorner q\urcorner$ es ½, falla el principio de importación); sin embargo, nadie parece haber expuesto un argumento en contra del principio de importación, y es, más bien, un defecto de las lógicas łukasiewiczianas el que no reconozcan la validez del mismo. Una instancia del mismo es: ‘Supongamos que, si un hombre está casado con una mujer, entonces, si está también casado con una mujer diferente de la primera, es bígamo; supuesto eso, resulta lo siguiente: si un hombre está casado con una mujer y también lo está con otra mujer diferente de ella, es bígamo’.

A177/3 es el llamado ‘silogismo conyuntivo’. He aquí una instancia: ‘Si es verdad que, si Matías es platónico, admite la realidad de los universales, y que, si admite Matías la realidad de los universales, no está de acuerdo con Occam, entonces: Matías es platónico sólo si no está de acuerdo con Occam’.

A178 $p\supset(q\supset r)\mathrm{I}.p\supset r\lor.q\supset r$ (Prueba: A177, A168)

A179 $p\land q\supset r\supset.p\supset q\supset.p\supset r$ (Prueba: A175, A177)

A180 $r\supset s\supset.p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.q\supset s$

Prueba:

(2)	$q\supset r\supset(q\supset s)\supset.p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.q\supset s$	A173
(3)	$r\supset s\supset.q\supset r\supset.q\supset s$	A173
	$\sigma 3\supset.p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.q\supset s$	(2)

A180/1 $p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.r\supset s\supset.q\supset s$

Prueba:

(2)	$p\supset(q\supset r)\supset.r\supset s\supset.p\supset.q\supset s$	A180, A167
	$\sigma 2\supset.p\supset.r\supset s\supset.q\supset s$	A167

Este esquema se denomina ‘principio de sufijación de la apódosis’. He aquí una instancia del mismo: Supongamos que, si Conrado ve a un mendigo, entonces, si (Conrado) lleva dinero en el bolsillo, da limosna, resulta entonces lo siguiente: si Conrado ve a un mendigo, entonces: si es verdad que el dar Conrado limosna entraña que alguien hace una buena acción, entonces, si lleva dinero en el bolsillo, alguien hace una buena acción.

A181 $r\supset s\supset.p\supset(q\supset.q^1\supset r)\supset.p\supset.q\supset.q^1\supset s$

Prueba:

(2) $r\supset s\supset.q^1\supset r\supset.q^1\supset s$ A173

(3) $q^1\supset r\supset(q^1\supset s)\supset.q\supset(q^1\supset r)\supset.q\supset.q^1\supset s$ A173

(4) $\delta 3\supset.p\supset(q\supset.q^1\supset r)\supset.p\supset.q\supset.q^1\supset s$ A173

A181 (2), (3), (4), rinf34

A182 $r\supset s\supset.p\supset(q\supset.q^1\supset.q^2\supset r)\supset.p\supset.q\supset.q^1\supset.q^2\supset s$ (Prueba similar a la de A181)

A183 $r\supset s\supset.p\supset(q\supset.q^1\supset.q^2\supset.q^3\supset r)\supset.p\supset.q\supset.q^1\supset.q^2\supset.q^3\supset s$ (Prueba similar a la de A181)

Por inducción matemática se puede generalizar la secuencia de teoremas A181, A182, A183… y la secuencia de reglas rinf35, rinf36, rinf37… Y, en virtud de ello, podemos escribir, en adelante, siempre que tengamos como teoremas o fórmulas ya probadas $\ulcorner r\supset r^1\urcorner$ … $\ulcorner r^{n-1}\supset r^n\urcorner$, y que tengamos probada la fórmula $\ulcorner p\supset.p^1\supset.p^2\supset.\ \ldots\ \supset.p^n\supset r\urcorner$:

(n) $p\supset.p^1\supset.p^2\supset.\ \ldots\ \supset.p^n\supset r$

$*\sigma n\supset r^1$

$*\sigma n\supset r^2$

.

.

$*\sigma n\supset r^n$

Donde, en general, para una fbf $\ulcorner s\urcorner = \ulcorner s^1\supset.s^2\supset.s^3\supset.\ \ldots\ \supset.s^n\supset q\urcorner$, $\ulcorner *\sigma s\supset q'\urcorner$ abreviará a $\ulcorner s^1\supset.s^2\supset.s^3\supset.\ \ldots\ \supset.s^n\supset q'\urcorner$ (o sea: $\ulcorner\sigma s\supset.\sigma\delta s\supset.\sigma\delta\delta s\supset.\sigma\delta\delta\delta s\supset.\ \ldots\ \supset.\sigma\delta\ \ldots\ \delta s\supset q'\urcorner$) (Esta notación es ambigua, porque, cuando $\ulcorner q\urcorner=\ulcorner q^2\supset q^3\urcorner$, la notación $\ulcorner *\sigma s\supset q'\urcorner$ podrían lo mismo hacer las veces de $\ulcorner\sigma^1\supset.\ \ldots\ \supset.s^n\supset.q^2\supset q'\urcorner$ que de $\ulcorner\sigma^1\supset.\ \ldots\ \supset.s^n\supset q\urcorner$; pero qué sea lo que así esté abreviandose en el contexto dado será fácil de ver, por el tenor de la prueba.)

Por otro lado, como, cada vez que tenemos un teorema $\ulcorner pIq\urcorner$, tenemos —por rinf11— el teorema $\ulcorner qIp\urcorner$ y, por consiguiente —en virtud de A103 y rinf01— el teorema $\ulcorner p\supset q\urcorner$, utilizaremos también cadenas de la forma siguiente (siendo (n) un teorema o fórmula previamente probada):

(m) nI.]p

Y, en adelante, ‘(m)’ nombrará a $\ulcorner p\urcorner$.

Por otro lado, en virtud de rinf32, cada vez que se haya probado previamente $\ulcorner pIq\urcorner$ y que tengamos, en una fórmula cualquiera, una ocurrencia de ‘I’ seguida de una ocurrencia de $\ulcorner r\urcorner$, siendo $\ulcorner r\urcorner$ una fórmula cualquiera que contenga m ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$, podemos escribir:

(n) …Ir———

σnIr^1———

siendo $\ulcorner r^1\urcorner$ el resultado de reemplazar una o varias de esas m ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$ por ocurrencias respectivas de $\ulcorner q\urcorner$. Y, en lo sucesivo, ‘(n)’ nombrará a:

…Ir^1———

A184 $p\supset q\supset .p\wedge r\supset q$

Prueba:

(2)	$p\wedge r\supset p\supset .p\supset q\supset .p\wedge r\supset q$	A172
	A184	(2), A01

A185 $p\supset q\supset .r\wedge p\supset q$ (Prueba: A172, A161)

A186 $p\supset q\supset .p\supset r\supset .p\supset .q\wedge r$

Prueba:

(2)	$p\supset q.(p\supset r)\supset .p\supset .q\wedge r$	A150//10, A108
	A186	A177, (2)

A187 $p\supset q\supset .p\supset .p\wedge q$ (Prueba: A116, A186)

Los esquemas A184 y A185 son las dos versiones del principio de aumentación. He aquí una instancia del mismo: Si uno es partidario de la filosofía del Cusano sólo si acepta la doctrina de la docta ignorancia, entonces, si uno es joven y partidario de la filosofía del Cusano, acepta la doctrina de la docta ignorancia.

El esquema A186 es el principio de composición. He aquí una instancia del mismo: 'Si uno es leibniziano sólo si acepta mónadas sin ventanas, entonces: si uno es leibniziano sólo si acepta la armonía preestablecida, resulta que uno es leibniziano sólo si acepta mónadas sin ventanas y la armonía preestablecida'.

El esquema A187 es un obvio corolario del principio de composición. He aquí una instancia: 'Si uno es una persona respetable sólo si es un conservador, entonces, si uno es una persona respetable, es, a la vez, una persona respetable y un conservador'.

A188 $p\supset q\supset .p\wedge r\supset .q\wedge r$

Prueba:

(2)	$p\wedge r\supset q\supset .p\wedge r\supset .p\wedge r\wedge q$	A187
	$\sigma 2\supset .\sigma\delta 2\supset .q\wedge r$	A122, A149/1, A01
	A188	(2), A184, A173

A189 $p\supset .\neg p\supset q$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\vee\neg p\vee q$	A163
(3)	$\neg p\vee .\neg\neg p\vee q$	A123, A149, (2)
	A189	(3), df06

A190 $\neg p\supset .p\supset q$ (Prueba: A189, A167)

A191 $p\wedge\neg p\supset q$ (Prueba: A189, A177)

A192 $p\supset q\supset .\neg p\supset\neg p$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\vee\neg p\vee\neg\neg q$	A163
(3)	$\neg\neg q\vee\neg q\vee\neg p$	A163
(4)	$2\wedge 3$	(2), (3)
(5)	$\neg\neg p\wedge\neg q\vee .\neg\neg q\vee\neg p$	(4),A123, A149, A141
(6)	$\neg(\neg p\vee q)\vee .\neg\neg q\vee\neg p$	(5), A150/7
	A192	(6), df06

Hénos ya sumidos en el problema de la negación. Dije más arriba que un sistema de lógica **recto** es un sistema que coincide con la lógica clásica en lo que respecta a los functores «positivos», a saber: ‘∧’ (‘y’), ‘∨’ (‘o’) y ‘⊃’ (‘si… entonces’). Si un sistema recto, $\mathfrak{Z}$, contiene una negación, ‘¬’, tal que cada fórmula en que aparezcan sólo los functores ‘∧’, ‘∨’, ‘⊃’ y/o ‘¬’ es un teorema de $\mathfrak{Z}$ ssi es también un teorema de la lógica clásica, a tal sistema lo llamaré ‘**proficuo**’. El sistema *Aj* es proficuo. La discrepancia entre alguien que se atenga al sistema *Aj* y un adepto de la lógica clásica estriba en lo siguiente. Para el clasicista, no hay más negación que ‘¬’ (escrito, en los sistemas clásicos de diferentes modos, comúnmente como ‘~’), con lo cual desconoce o soslaya la diferencia entre ‘no’ y ‘no… en absoluto’. Por eso, lee ‘¬’ o el signo correspondiente de su sistema como ‘no’; y, así, lee A191 como: Si p y no-p, entonces q. A191 es el **principio de Cornubia** (llamado más comúnmente —según sabe el lector por lo dicho más arriba, en la Intruducción de este libro— **principio de Escoto**), pero **para la negación fuerte**. Leído en forma clásica, dice que de una contradicción se sigue cualquier cosa (por absurda que sea). Así leído, el principio de Cornubia se escribiría, en nuestro sistema: $\ulcorner p\wedge Np\supset q\urcorner$. Mas **este** principio de Cornubia no sólo (¡a Dios gracias!) no es en absoluto un esquema teoremático de *Aj*, sino que, de añadirse a *Aj* como esquema axiomático, el resultado sería un sistema delicuescente, incoherente. Además, nadie diría normalmente: ‘Si llueve y no llueve, entonces Jasán II es la mejor persona del mundo’. Porque muchas, muchísimas veces, es verdad que llueve y no llueve a la vez. ‘¡Ah! —dirá el pensador dignoscitivo, e.d. el que se aferra a una actitud de rechazo a priori de cualquier contradicción—, eso es una falacia, porque, al decirse «Llueve y no llueve», se está queriendo decir algo no contradictorio, como que llovizna’. Pero ¿de dónde saca el pensador dignoscitivo que lloviznar no es contradictorio? Según el modo usual de pensar y de hablar, sí es contradictorio, pues es una situación a la vez de lluvia y de ausencia de lluvia, hasta cierto punto lo uno y hasta cierto punto lo otro (y eso se ve mejor aún cuando ni siquiera es del todo cierto que llovizna, cuando medio-llovizna no más). Para el pensador dignoscitivo no hay más que lo **totalmente sí** y lo **totalmente no**, y las situaciones intermedias, las (**hasta cierto punto**) **sí** y (**hasta cierto punto**) **no** se dan tan sólo aparentemente, tan sólo parecen darse por otra y gracia del lenguaje que deforma la realidad, forjando predicados vagos o difusos, que no corresponden a nada real: en lo real, cada propiedad es nítida, o sea: de bordes tajantes: dada una propiedad real, una cosa determinada o bien posee totalmente a la propiedad dada o bien no la posee en absoluto. Así piensa el dignoscitivo. El dialéctico rechaza tal aserto: muchas propiedades reales son difusas, o sea: son poseídas y, a la vez, no poseídas por ciertas cosas —lo uno en cierto grado y lo otro también en cierto grado. (Un dialéctico más consecuente aceptará incluso el principio de gradualidad y dirá que todas las propiedades son, en algún grado, difusas. Sobre todo eso, véase la Introducción de estos *Rudimentos*, §7.)

Así pues, dada la posición dialéctica que nos inspira, nuestro sistema *Aj* acepta el principio de Cornubia sólo para la negación fuerte o supernegación, e.d. en la versión que da A191, rechazando, en cambio, $\ulcorner p\wedge Np\supset q\urcorner$.

Lo propio habría que decir respecto de A189 y A190, que son las dos variantes del principio *e prorsus falso quodlibet*. Los adeptos de la lógica clásica (en la lectura, incorrecta, que ellos proponen de ‘~’ como ‘no’, en vez de como ‘no… en absoluto’) apadrinan al principio *e falso quodlibet* (de lo falso se sigue cualquier cosa); a tenor del mismo, si tengo frío, entonces: si no tengo frío, Asia es más pequeña que Jamaica; pero muchas veces, siendo verdadera la prótasis (que tengo frío), también es verdadera la prótasis de la apódosis (que no tengo frío); me preguntan, en esas ocasiones, si tengo frío, y contesto ‘Sí y no’. De valer el principio *e falso quodlibet*, debería, pues, concluir que Asia es más pequeña que Jamaica, o cualquier otro absurdo. Pero el principio *e falso quodlibet* es, él mismo, absurdo, pues muchas instancias del mismo lo son (como la recién indicada). Así pues, ni $\ulcorner p\supset.Np\supset q\urcorner$ ni $\ulcorner Np\supset.p\supset q\urcorner$ son, en absoluto, esquemas teoremáticos de nuestro sistema. Por eso, he reemplazado, en *Aj*, ese principio inadmisible (*e falso quodlibet*) por el principio **correcto** *e prorsus falso quodlibet* (‘de lo totalmente falso, (se deduce) cualquier cosa’). Como una instancia de A190 tenemos: Supongamos que es de todo punto falso que Lutero sea más bondadoso que Tomás Münzer; entonces, si Lutero es más bondadoso que Tomás Münzer, yo tengo más millones que el Aga Khan. Y cosas de esas se suelen afirmar ¿no es así? ¡Y son verdaderas!

El esquema A192 es el principio de contraposición (otras versiones del principio de contraposición las probaré después: A202, A214). También es un principio que vale únicamente para la negación fuerte, de ninguna manera para la débil: $\ulcorner p\supset q\supset.Nq\supset Np\urcorner$ no es, en absoluto, un esquema teoremático de nuestro sistema. De añadirse a los esquemas axiomáticos de *Aj* daría como resultado una teoría delicuescente, incoherente. He aquí una instancia de ese no-teorema (del falaz principio de contraposición para la negación débil): Supongamos que, si una persona es, en algún grado por lo menos, atenta, saluda a sus compañeros de trabajo; entonces, si no los saluda, no es atenta en absoluto. Eso es del todo falso, pues hay gente que saluda a medias, e.d. que saluda sin saludar; si preguntamos: '¿Saluda Fulano a los compañeros?' nos responden 'Bueno, los saluda y no los saluda' (se contenta con esbozar un gesto o con proferir a medias un sonido mal articulado). De tal persona podemos decir —con verdad parcial, pero con verdad— que no saluda a sus compañeros, mas no podemos decir que no sea atenta **en absoluto**; y, sin embargo, la prótasis era razonable: Si alguien es más o menos atento, saluda a sus compañeros. Por consiguiente, el principio de contraposición no puede valer para la negación débil. Pero sí vale para la negación fuerte, como lo dice el esquema A192: si una persona es progresista sólo si rechaza al racismo, entonces: si no rechaza en absoluto al racismo, no es progresista en absoluto.

A193 $p\supset.q\vee p$ (Prueba: A162, A123, rinf32)

A194 $p\supset Lp$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\vee\neg p$	A117
(3)	$\neg p\vee\neg\neg p$	(2), A123
	$p\supset Lp$	(3), df06, A152, rinf32

A195 $p\supset q\supset.r\wedge p\supset.r\wedge q$ (Prueba: A188, A122)

A197 $p\supset q\supset.r\vee p\supset.r\vee q$ (Prueba: A196, A123)

A198 $p\vee q\supset.r\supset.r\wedge p\vee.r\wedge q$

Prueba:

(2)	$p\vee q\supset.r\supset.p\vee q$	A164
	$\sigma 2\supset.r\wedge.p\vee q$	A187
	$\sigma 2\supset.r\wedge p\vee.r\wedge q$	A140

A196 $p\supset q\supset.p\vee r\supset.q\vee r$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\vee\neg p\vee.q\vee r$	A163
(3)	$\neg r\vee r\vee.\neg\neg p\vee q$	A163
(4)	$\neg\neg p\vee q\vee r\vee\neg p$	(2), A123, A149
(5)	$\neg\neg p\vee q\vee r\vee\neg r$	(3), A123, A149
(6)	$\neg p\wedge\neg r\vee.\neg\neg p\vee.q\vee r$	(4),(5),A141,A123
(7)	$\neg q\vee q\vee.\neg p\wedge\neg r\vee r$	A163
(8)	$\neg p\wedge\neg r\vee.\neg q\vee.q\vee r$	(7), A123, A149
(9)	$\neg p\wedge\neg r\vee.\neg\neg p\vee(q\vee r)\wedge.\neg q\vee.q\vee r$	(6),(8),A141
(22)	$\neg p\wedge\neg r\vee.\neg\neg p\wedge\neg q\vee.q\vee r$	(9), A123, A142
(23)	$\neg\neg p\wedge\neg q\vee.\neg p\wedge\neg r\vee.q\vee r$	(22), A123, A149
(24)	$\neg(\neg p\vee q)\vee.\neg(p\vee r)\vee.q\vee r$	A150/7, (23)
	A196	(24), df06

A198/1 $p\supset.p\wedge q\vee.p\wedge\neg q$

Prueba:

(2)	$q\vee\neg q$	A117, A123
	A198/1	(2), A198

Este esquema cabe denominarlo 'principio de las dos astas' (otros lo llaman 'principio de expansión', pero aquí he reservado esa denominación para A165/1). Veamos una instancia: 'Si Nuño es muy inteligente, entonces: o bien es muy inteligente y es, además, agraciado, o bien es muy inteligente sin ser agraciado en absoluto'. También ha sufrido este principio los embates de los lógicos relevantistas, o de algunos de ellos por lo menos, pero ya han ido quedando esclarecidos más arriba el meollo y el fondo del debate, y el porqué del desacuerdo entre esos lógicos y la posición preponderante —compartida por la lógica clásica y por el sistema *Aj*.

A199 $p\supset q\supset.r\supset s\supset.p\land r\supset.q\land s$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\lor\neg p\lor.\neg\neg r\land\neg s\lor\neg r\lor.q\land s$	A163
(3)	$\neg q\lor q\lor.\neg\neg r\land\neg s\lor\neg p\lor\neg r$	A163
(4)	$\neg\neg r\lor\neg r\lor.\neg p\lor s$	A163
(5)	$\neg s\lor s\lor.\neg q\lor\neg p\lor\neg r$	A163
(6)	$\neg q\lor(\neg\neg r\land\neg s)\lor\neg p\lor\neg r\lor s$	(4), (5), A123, A149, A141
(7)	$\neg q\lor/\neg\neg r\land\neg s)\lor\neg p\lor\neg r\lor.q\land s$	(3), (6), id.
(8)	$\neg\neg p\land\neg q\lor.\neg\neg r\land\neg s\lor.\neg p\lor\neg r\lor.q\land s$	(2), (7), id.
(9)	$\neg(\neg p\lor q)\lor.\neg(\neg r\lor s)\lor.\neg(p\land r)\lor.q\land s$	(8), A150/7, A150/8
	A199	(9), df06

A199/1 $p\supset q\land(r\supset s)\supset.p\land r\supset.q\land s$ (Prueba: A199, A177, rinf14)

A199/2 $p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.s\supset q\supset.s\supset r$

Prueba:

(2)	$q\supset r\supset.s\supset q\supset.s\supset r$	A173
(3)	$p\supset 2$	(2), A164
	$p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.s\supset q\supset.s\supset r$	(3), A175

El esquema A199/2 se denomina 'principio de la prefijación de la apódosis'. He aquí una instancia del mismo: 'Supongamos que, si Jerónimo pertenece a la unión apostólica, entonces, si lo eligen para un cargo, tendrá que dejar su trabajo; supuesto eso, resulta lo siguiente: supongamos que Jerónimo pertenece a la unión apostólica; entonces, si es verdad que, si Jerónimo paga una cuota elevada, lo eligen para un cargo, entonces, si Jerónimo paga una cuota elevada, tendrá que dejar su trabajo.

A200 $Lp\supset p$

Prueba:

(2)	$NN\neg p\lor q$	A117, A106
(3)	$N\neg\neg p\lor p$	(2), A151/2
(4)	$\neg\neg\neg p\lor p$	(3), A151/2
	$Lp\supset p$	(4), df06, A152

A201 $r\supset s\supset.p\supset(s\supset q)\supset.p\supset.r\supset q$

Prueba:

(2)	$r\supset s\supset.s\supset q\supset.r\supset q$	A172
	$\sigma 2\supset.p\supset(s\supset q)\supset.p\supset.r\supset q$	A173

A202 $p\supset\neg q\supset.q\supset\neg p$

Prueba:

(2)	$p\supset\neg q\supset.\neg\neg q\supset\neg p$	A192
	$\sigma 2\supset.q\supset\neg p$	A194, A201, A152

A203 $p\supset(q\wedge r)\supset.p\supset q$

Prueba:

(2)	$q\wedge r\supset q$	A01
	$p\supset(q\wedge r)\supset.p\supset q$	A173, (2)

A204 $p\supset(q\wedge r)\supset.p\supset r$

A205 $p\supset(p\wedge q)\supset.p\supset q$

A206 $p\supset(q\wedge p)\supset.p\supset q$

A207 $p\vee q\wedge\neg q\supset p$

Prueba:

(2)	$p\vee q\wedge\neg q I.p\wedge\neg q\vee.q\wedge\neg q$	A140, A143
(3)	$q\wedge\neg q\supset p$	A191
(4)	$p\wedge\neg q\supset p$	A01
(5)	$3\wedge 4I.]\delta 2\supset p$	A169
	$\sigma 2\supset p$	(5), (2)

A208 $p\supset(q\vee r)\supset.\neg(p\wedge r)\supset.p\supset q$

Prueba:

(2)	$p\supset(q\vee r)\supset.p\supset.p\wedge.q\vee r$	A187
	$*\sigma 2\supset.p\wedge q\vee.p\wedge r$	A140
(3)	$\neg(p\wedge r)\supset.2\supset.\sigma 2\supset.\delta 2\wedge\neg(p\wedge r)$	A174
(4)	$2\supset.]\neg(p\wedge r)\supset.\sigma 2\supset\delta 2\wedge\neg(p\wedge r)$	(3), A167
(5)	$\sigma 2\supset.\neg(p\wedge r)\supset.\delta 2\wedge\neg(p\wedge r)$	(4), A166
	$*\sigma 5\supset.p\supset.\delta\delta 2\wedge\neg(p\wedge r)$	A122, A150/10, A164, A165
	$*\sigma 5\supset.p\supset.p\wedge q$	A207
	$*\sigma 5\supset.p\supset q$	A205

A209 $p\supset(q\vee r)\supset.r\supset\neg p\supset.p\supset q$ (Prueba: A208, df06, A123, A150/8)

A210 $p\wedge q\supset r\supset.p^1\supset p\wedge(q^1\supset q)\supset.p^1\wedge q^1\supset r$

Prueba:

(2)	$p^1\wedge q^1\supset(p\wedge q)\supset.p\wedge q\supset r\supset.p^1\wedge q^1\supset r$	A172
(3)	$p^1\supset p\wedge(q^1\supset q)\supset.p^1\wedge q^1\supset.p\wedge q$	A199, A177
(4)	$p^1\supset p\wedge(q^1\supset q)\supset.p\wedge q\supset r\supset.p^1\wedge q^1\supset r$	(3), (2), A173
	A210	(4), A167

A211 $p\supset.p\supset q\supset q$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\vee\neg p\vee q$	A163
(3)	$\neg q\vee q\vee\neg p$	A163
(4)	$\neg p\vee.\neg\neg p\wedge\neg q\vee q$	(2), (3), A123, A149, A141
(5)	$\neg p\vee.\neg(\neg p\vee q)\vee q$	(4), A150/7
	A211	(5), df06

A211/1 $p\supset q\wedge p\supset q$ (Prueba: A211, A177, A166)   A212 $p\supset\neg pI\neg p$ (Prueba: df06, A104, A118)

¡Nuevamente hemos topado, en estos últimos esquemas, con la supernegación! Y, nuevamente, tenemos principios que son válidos, correctos, tan sólo para la negación fuerte o supernegación, de ninguna manera para la negación débil o simple. Tal es el caso tanto de A207 (principio del silogismo disyuntivo), como de A208, A209 y A210. (En cambio el correspondiente a A212, a saber: $\ulcorner p\supset NpINp\urcorner$ sí es un esquema teoremático demostrable en nuestro sistema; pues, al fin y al cabo, aunque muchos esquemas que valen para '$\neg$' no valen para 'N', otros esquemas son comunes; y hay también otros que valen para 'N' pero no para '$\neg$'). Que el silogismo disyuntivo no puede valer para la negación débil (contrariamente a lo que dicen los adeptos de la lógica clásica en su lectura corriente) lo muestra el ejemplo siguiente: vamos a suponer que Társila, una muchacha que mide 150cms, está y no está enferma —sufre alguna que otra pequeña dolencia; entonces, es verdad que está enferma; y también lo es que no está enferma; por la regla de adición, deducimos, de que está enferma, que, o está enferma, o es la mujer más alta del mundo; añadida a esa disyunción la verdad de que no está enferma, resultaría que es la mujer más alta del mundo, o cualquier otro absurdo. Pero, en cambio, el silogismo disyuntivo sí vale para la supernegación, porque es **de todo punto** imposible que sucedan, a la vez, un hecho y la **super**negación del mismo: ello sería una **super**contradicción, un absurdo. De ahí que sea correcto A207: Si es verdad que Onofre está o bastante enfermo de sarampión o bastante enfermo de escarlatina, y no es verdad en absoluto que esté bastante enfermo de escarlatina, entonces es que está bastante enfermo de sarampión. (Y, claro está, puede que nos enteremos, **por separado**, de la verdad de cada uno de los dos conyuntos de la prótasis).

El esquema A211 es el principio de aserción. Y, de nuevo en lo tocante a ese principio (como en lo tocante a cualquier otro en que no entra la negación e intervengan sólo los functores 'y', 'o' y 'sólo si') estoy de acuerdo, en sostenerlo, con los adeptos de la lógica clásica. Lo propio cabe decir con respecto al A211/1, e.d. al principio conyuntivo de aserción. En cambio, ciertos relevantistas rechazan alguno de esos dos principios —Routley rechaza el principio de aserción. Una instancia de A211 es: si existe libre arbitrio, entonces, si la existencia de libre arbitrio entraña que algunas cosas sucedan al buen tuntún, entonces es que algunas cosas suceden al buen tuntún.

Voy a examinar dos principios de abducción.

A212/1 $p\supset\neg p\supset\neg p$ (Prueba: A212, rinf11, A103)

A212/2 $\neg p\supset p\supset q$ (Prueba: df06, A200, A152, A118, A196)

Además de esos dos esquemas, se llaman también 'principios de abducción' los esquemas A273/2 y A273/3 que demostraré más adelante (págª 74) a saber: $\ulcorner p\supset Np\supset Np\urcorner$ y $\ulcorner Np\supset p\supset p\urcorner$. Esos cuatro principios de abducción son principios que involucran al functor de entrañamiento o condicional: los dos cuyas pruebas acabo de esbozar son principios de abducción condicional para la negación débil. También hay principios de abducción implicacionales, e.d. que involucran al functor de implicación, '$\rightarrow$', en vez del functor condicional '$\supset$'; tales son —con respecto a la negación débil— los esquemas A389 y A390 que se demostrarán y serán objeto de amplio comentario más adelante (cap. 13º, págª 87); también demostraré un principio implicacional de abducción para la negación fuerte (A390/1), y un principio mixto (A390/2). Y más tarde probaré otros principios implicacionales de abducción, a saber: A518 y A517. En todos esos principios de abducción se trata de que el ser entrañada (o, respectivamente, implicada) una negación (fuerte o débil) de un hecho por ese hecho es algo que, a su vez, entraña la falsedad de ese hecho; y el que el hecho venga entrañado (respectivamente, implicado) por una negación suya (fuerte o débil) es algo que, a su vez, entraña (respectivamente, implica) la verdad de ese hecho. Llaman algunos a la abducción *consequentia mirabilis*, porque es de admirar que pueda deducirse la verdad de un hecho de que tal hecho sea implicado o entrañado por una negación del mismo. Llámasela también *ley de Clavius*. Es un principio de uso corrientísimo en miles de razonamientos diarios, y, acaso todavía más, en razonamientos matemáticos: si de una hipótesis se sigue una negación de la misma, entonces esa negación es verdadera; y si de una negación de la hipótesis se sigue la verdad de esta última, es que la hipótesis es verdadera.

Nuestra defensa de los principios de abducción nos coloca al lado de la lógica clásica incluso —en este particular— con respecto al perfil de las negaciones sin exceptuar —en **este** punto— a la negación débil. En cambio, los adeptos de la tesis de una indeterminación de lo real rechazan los principios de abducción. Hácenlo así: las lógicas łukasiewiczianas; el intuicionismo de Heyting; y las lógicas multivalentes de Gödel, estrechamente emparentadas con el intuicionismo) admiten lo que corresponde (en esos sistemas) a A212/1, pero no (lo que en esos sistemas corresponde a) A212/2. Quienes postulan indeterminación sostienen que, aunque lo mentado por un enunciado entrañe a su respectiva negación, no por ello va ésta a ser verdadera (a secas), pues ser verdad [a secas] es ser totalmente verdadero (según el prejuicio maximalista-alético); así, p.ej., cuando un hecho y su negación (débil) son igualmente verdaderos, se entrañan entre sí, pero ninguno de los dos es verdadero (a secas), pues ninguno de los dos es totalmente verdadero. Lo que lleva a la doctrina de la indeterminación es el maximalismo alético combinado con la aceptación de gradualidad; y la doctrina de la indeterminación se expresa en el rechazo de los principios de abducción. En cambio, el clasicista, que es, también él, un maximalista alético, acepta los principios de abducción (rechaza la indeterminación), porque no acepta que haya grados en la realidad. Nuestra propia posición dialéctica (gradualista-contradictorial) consiste en aceptar grados de verdad o realidad y, a la vez, en rechazar el maximalismo alético (el punto de vista de que sólo lo totalmente verdadero es verdadero —a secas).

A213 q⊃p⊃(p⊃q⊃p)⊃.p⊃q⊃.q⊃p⊃q

Prueba:

(2)	p⊃.p⊃q⊃q	A211
(3)	p⊃q⊃p⊃.p⊃q⊃.p⊃q⊃q	(2), A173
(4)	q⊃p⊃(p⊃q⊃p)⊃.q⊃p⊃.p⊃q⊃.p⊃q⊃q	(3), A173
	σ4⊃.q⊃p⊃.p⊃q⊃q	A165
	σ4⊃.p⊃q⊃.q⊃p⊃q	A167

A214 ¬q⊃.p⊃q⊃¬p (Prueba: A192, A166)

A215 ¬(p⊃q)⊃.p∧¬q (Prueba: df06, A150/7, A152, A200, A188)

A216 p⊃q⊃p⊃p

Prueba:

(2)	¬¬¬pIN¬¬p	A151/2
	σ2INN¬p	A151/2
	σ2I¬p	A106
(3)	¬p∨p∨.¬¬q∧¬p	A163
(4)	¬¬¬p∨p∨.¬¬q∧¬p	(3), (2)
(5)	¬¬¬p∧¬p∨(¬¬q∧¬p)∨p	(3), (4), A141, A123, A149, A142
(6)	¬¬¬p∨¬¬q∧¬p∨p	(5), A122, A143
(7)	¬(¬¬p∧¬q)∧¬p∨p	(6), A150/8
(8)	¬¬(¬p∨q)∧¬p∨p	A150/7, (7)
(9)	¬(¬(¬p∨q)∨p)∨p	A150/7, (8)

(22)	$\neg(\neg(p\supset q)\vee p)\vee p$	(9), df06
(23)	$\neg(p\supset q\supset p)\vee p$	(22), df06
	A216	(23), df06

El esquema A216 es la **ley de Peirce**. Es uno de esos principios —junto con el principio de buen entrañamiento (A163/1) y el principio de Stalnaker (A171/1)— en que nuestro sistema coincide sólo con la lógica clásica y con muy pocos sistemas de lógica clásica (con el sistema C_1 de da Costa sí, p.ej.); la ley de Peirce es rechazada en el cálculo intuicionista de Heyting, en todas las lógicas de cuño relevantista, y en muchas lógicas multivalentes, incluidas la lógica de Łukasiewicz y las lógicas multivalentes de Gödel. Es la aceptación de los principios de Peirce y Stalnaker y del principio del buen entrañamiento lo que confiere a *Aj* su marchamo de sistema **clásico en lo que al entrañamiento se refiere**.

A217 $Hp\vee Np$ (Prueba: A116, df06, A158/2)

A218 $p\rightarrow q\supset.p\supset q$

Prueba:

(2)	$p\rightarrow q\supset.p\supset.p\wedge q$	A103, df14
	σ2⊃.p⊃q	A205

A219 $p\supset 0I\neg p$ (Prueba: A150/13, df06)

A220 $pIq\supset.rIr^1$ (donde $\ulcorner r^1\urcorner$ sólo difiere de $\ulcorner r\urcorner$ por el reemplazamiento de n ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$ por n ocurrencias respectivas de $\ulcorner q\urcorner$, y siendo $\ulcorner r\urcorner$ una fórmula en la cual no esté afectado $\ulcorner p\urcorner$ por otros functores que 'H', '$\downarrow$', 'I' u otros definidos a partir de ellos)

Prueba: (MD), rinf32

El esquema A217 es un corolario del principio fuerte de tercio excluso (o sea: de A117): dice que un hecho cualquiera es, o totalmente verdadero, o falso. (¡Ojo! **Ser falso** no es lo mismo que **ser totalmente falso**. Porque es absolutamente falso que cualquier hecho sea o totalmente verdadero o totalmente falso: eso —que se expresa así: $\ulcorner Hp\vee\neg p\urcorner$— es lo que dice el principio de exclusión de situaciones intermedias, que enarbolan los pensadores dignoscitivos, como los adeptos de la lógica clásica en su lectura habitual.)

El esquema A220 es un principio de sustituibilidad de los equivalentes. Los contextos en que se autoriza son, por ahora, limitados, pero más tarde se ampliarán, y podremos mostrar que A220 vale sea cual fuere la apódosis con tal que cumpla la condición de que $\ulcorner r^1\urcorner$ sea el resultado de reemplazar $\ulcorner p\urcorner$ por $\ulcorner q\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$, y con tal que tales ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ y de $\ulcorner q\urcorner$ no estén afectadas por el functor 'B' (para el caso en que sí lo estén, el teorema no valdrá salvo cuando la prótasis sea $\ulcorner B(pIq)\urcorner$, e.d. $\ulcorner pIIq\urcorner$; pero déjase esa complicación de lado por el momento). Una instancia de A220 es ésta: 'Si el que a Sofronio le guste beber vino equivale a que le guste beber mosto fermentado, entonces el que a Sofronio le guste beber vino más que a Tirso equivale a que a Sofronio le guste beber mosto fermentado más que a Tirso'.

A221 $p\vee q\wedge(p\supset r\wedge.q\supset s)\supset.r\vee s$

Prueba:

(2)	$r\supset.r\vee s$	A162
(3)	$s\supset.r\vee s$	A193
(4)	$p\supset.r\vee s$	A173, (2)
(5)	4⊃.]p⊃r.(q⊃s)⊃δ4	A184

(6)	$q\supset s\supset.q\supset.r\vee s$	A173, (3)
(7)	$6\supset.]p\supset r.(q\supset s)\supset \delta 6$	A185
(8)	$p\supset r\wedge(q\supset s)\supset.\delta 4\wedge\delta 6$	(5), (7), A150/10
	$\sigma 8\supset.p\vee q\supset.r\vee s$	A169
(9)	$p\supset r\wedge(q\supset s)\wedge(p\vee q)\supset.r\vee s$	(8), A177
	A221	(9), A122

A221/2 $p\vee q\wedge(p\supset s\wedge.q\supset s)\supset s$ (Prueba: A221, A118)

A221/3 $p\vee q\wedge(p\supset r)\supset.r\vee q$ A221/4 $p\vee q\wedge(q\supset r)\supset.p\vee r$

A221/5 $p\supset r\supset.q\supset s\supset.p\vee q\supset.r\vee s$

Prueba:

(2)	$221\supset.]p\vee q\supset.(p\supset r\wedge.q\supset s)\supset.r\vee s$	A177, rinf12
(3)	$p\supset r\wedge(q\supset s)\supset.p\vee q\supset.r\vee s$	(2), A617
(4)	$p\supset r\supset.q\supset s\supset.p\vee q\supset.r\vee s$	(3), A177

El esquema A221 es el principio del dilema; es un principio muy utilizado ya en la lógica tradicional; veamos una instancia del mismo: Supongamos que Águeda consiguió el puesto por méritos, o bien lo consiguió por influencias; y que, si lo consiguió por sus méritos, debe conservarlo; y que, si lo consiguió por influencias, debe ser sometida a un examen; supuesto eso, resulta que Águeda debe o bien conservar su puesto, o bien ser sometida a un examen.

A221/1ss son corolarios del principio del dilema. Nótese que el principio del dilema es un caso particular de un principio, o metaprincipio, de alternatividad, probable, fuera del sistema, por inducción matemática (lo que se puede probar fuera del sistema es que cualquier caso particular de ese metaesquema es un esquema válido de *Aj*). El metaesquema que constituye el principio de alternatividad es el siguiente:

$$p\vee p^1\vee \ldots \vee p^n\wedge(p\supset q\wedge.p^1\supset q^1\wedge. \ldots \wedge.p^n\supset q^n)\supset.q\vee q^1\vee \ldots \vee q^n$$

Lo que nos dice ese principio de alternatividad es: sean p, y p^1, y… p^n todas las alternativas que se dan (o sea: sea la disyunción entre esos n+1 hechos o situaciones una **alternativa exhaustiva**); y supongamos que cada una de esas n+1 alternativas entraña a una respectiva consecuencia; entonces se da una alternativa exhaustiva entre sendas n+1 consecuencias.

Uno de los corolarios más interesantes del principio del dilema es A221/2; he aquí una instancia del mismo: Supongamos que Veremundo o bien tiene un tumor o bien sufre de una neuralgia; y que, si tiene un tumor, necesita atención médica; y que, si sufre de una neuralgia, necesita atención médica; supuesto eso, resulta que Veremundo necesita atención médica.

A partir de A221/2 y de A117 se demuestra este otro corolario: A221/6.

A221/6 $p\supset q\wedge(\neg p\supset q)\supset q$ A222 $p\supset q\supset.q\supset p\supset.p\equiv q$ (Prueba: A150/9, df10)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 9º.— OTROS FUNCTORES

Voy a demostrar en este breve capítulo una gama de esquemas teoremáticos en que figuran diversos functores, y que se prueban en este lugar por conveniencia, para ir siendo utilizados después en la demostración de esquemas adicionales en que aparezcan esos u otros símbolos.

El primer esquema que voy a probar, A223, establece la transitividad de la equivalencia: dos cosas equivalentes a una tercera son equivalentes entre sí. A225 nos dice que si dos cosas se implican mutuamente, entonces son equivalentes; en tanto que A226 dice lo inverso: que los equivalentes se implican uno a otro. A229 nos dice que un hecho implica a otro ssi la negación del segundo implica a la del primero (ahí estriba una diferencia entre implicación y mero entrañamiento). A238 es una variante del principio de silogismo disyuntivo para la negación fuerte. A239 y siguientes son esquemas sumamente útiles, que permiten sustituir, en una amplia gama de contextos, una expresión que denote a un hecho por otra que denote a otro, siempre que esté dada la equivalencia entre ambos.

A223 pIq∧(qIr)⊃.pIr

Prueba:

(2)	pIq⊃.qIrI.pIr	A220
	σ2⊃.qIr⊃.pIr	A103, A107
	A223	(2), A177

A224 pIq∧(pIr)⊃.qIr (Prueba: A223, A107)

A225 p→q∧(q→p)⊃.pIq

Prueba:

(2)	p∧qIp∧(p∧qIq)⊃.pIq	A224
	A225	(2), A122, df14

A226 pIq⊃.p→q∧.q→p

Prueba:

(2)	pIq⊃.p∧pI.p∧q	A220
	σ2⊃.pI.p∧q	A119
	σ2⊃.p∧qIp	A107, df14
(3)	pIq⊃.q∧pIq	similarmente
	2∧3⊃.]A226	A150/10

A227 p→q∧(q→p)≡.pIq

(Prueba: A225, A226, A222)

A228 p→q≡.p∨qIq

Prueba:

(2)	p∧qIp⊃.p∧q∨qI.p∨q	A220
	σ2⊃.qI.p∨q	A132
	σ2⊃.p∨qIq	A107
(3)	p∨qIq⊃.p∨q∧pI.q∧p	A220
	σ3⊃.pI.q∧p	A131
	σ3⊃.pI.p∧q	A122
	σ3⊃.p∧qIp	A107
	2⊃.3⊃.]A228	A222, df14

A229 p→q≡.Nq→Np

Prueba:

(2)	p∧qIp⊃.p∨qIq	A228, A01, df10
	σ2⊃.Np∧NqINq	A112, A127
	σ2⊃.Nq∧NpINq	A122
(3)	Nq∧NpINq⊃.NNp∧NNqINNp	similarm.
	σ3⊃.p∧qIp	A106
	2⊃.3⊃.]A229	A222, df14

A230 ¬p⊃.q→Np

(Prueba: A153, A229, A106)

A231 p∧¬pI.q∧¬q

Prueba:

(2)	p∧¬pI0	A156
(3)	q∧¬qI0	A156
	p∧¬pI.q∧¬q	(2), (3)

A232 p∧¬p∧qI0 (Prueba: A156, rinf17, A150/14)

A233 p∧¬p∨qIq (Prueba: A156, A150/13, A123)

A233/1 ¬p∨q∧pI.p∧q

Prueba:

(2)	¬p∨q∧pI.¬p∧p∨.q∧p	A143
	σ2I.p∧¬p∨.p∧q	A122
	σ2I.p∧q	A233

A233/2 p∨q∧¬pI.¬p∧q

A233/3 p∧q⊃r⊃.p∧¬r⊃¬q

Prueba:

(2)	p∧¬r⊃¬r	A161
	σ2⊃.p∧q⊃r⊃¬(p∧q)	A214
	σ2⊃.σd2⊃.¬p∨¬q	A150/8
(3)	p∧q⊃r⊃.p∧¬r⊃.¬p∨¬q	(2), A167
	σ3⊃.p∧¬r⊃.p∧¬r∧.¬p∨¬q	A187
	*σ3⊃.¬r∧.p∧.¬p∨¬q	A122, A149/1
	*σ3⊃.p∧.¬p∨¬q	A161
	*σ3⊃.¬p∨¬q∧p	A122
	*σ3⊃.p∧¬q	A233/1
	*σ3⊃¬q	A161

Los esquemas recién demostrados nos fuerzan a aguzar la vista y a distinguir las características de la negación fuerte de las de la negación débil. Así, tomemos el esquema A229: muestra ese esquema que con respecto a la implicación vale un principio de contraposición para la negación débil; mientras que, como sabemos, con respecto al mero condicional o entrañamiento, la única contraposición válida es la que se expresa con el functor de supernegación o negación fuerte. Por otro lado, si en A229, sustituyéramos '≡' por '⊃' y 'N' por '¬', el resultado seguirá siendo correcto, teoremático; en cambio, no es teoremático en absoluto lo siguiente: ⌜¬q→¬p⊃.p→q⌝; de añadirse ese esquema a los axiomas de *Aj*, resultaría un sistema incoherente, delicuescente.

Asimismo, A231 nos dice que cualquier **super**contradicción equivale a cualquier otra; obviamente no es verdad, en absoluto, que cualquier contradicción equivalga a cualquier otra; por ende, el esquema ⌜p∧NpI.q∧Nq⌝ es rechazable, pues muchísimas instancias del mismo son totalmente falsas.

El esquema A233/1 nos dice que la conyunción de dos hechos equivale a la conyunción del primero con la disyunción entre el segundo y la supernegación del primero. Y el esquema A233/2 nos dice algo similar, pero inverso: la conyunción entre un hecho y la supernegación de otro equivale a la conyunción entre esa supernegación del segundo y la disyunción del primer hecho con el segundo.

Si, en vez de exigir equivalencia, nos contentáramos con mera bicondicionalidad o entrañamiento mutuo, tendríamos también como esquemas teoremáticos: ⌜¬p∧q∨p≡.p∨q⌝, ⌜p∧q∨¬p≡.q∨¬p⌝, ⌜Np∧q∨p≡.p∨q⌝, ⌜p∧q∨Np≡.q∨Np⌝.

Pero no tendríamos —porque es del todo incorrecto—: ⌜Np∨q∧p≡.p∧q⌝ (ni, por tanto, tampoco: ⌜Np∨q∧pI.p∧q⌝)

Un interesante corolario de esos **principios de eliminación** es A233/3, que es el **principio de antilogismo**. Es uno de los principios referentes al condicional en que interviene la supernegación; y, si reemplazáramos a la supernegación por la mera negación (simple o débil), el resultado sería de todo punto incorrecto. (El antilogismo es una consecuencia del principio de contraposición). He aquí una instancia de antilogismo: Supongamos que, si el agua está a cien grados y la presión atmosférica está siendo de por lo menos 760 milibares, el agua hierve; supuesto eso, resulta que, si el agua está a cien grados pero no hierve en absoluto, entonces es del todo falso que la presión atmosférica esté siendo de por lo menos 760 milibares.

A234 $p\supset.\neg p\rightarrow q$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\supset.\neg p\rightarrow q$	A153
	A234	(2), A194, A173, A152

A235 $p\supset.\neg pI0$

Prueba:

(2)	$p\supset.\neg p\rightarrow 0$	A234
(3)	$0\rightarrow\neg p$	A150/6
(4)	$p\supset.0\rightarrow\neg p$	(3), A164
(5)	$p\supset.\delta2\wedge\delta4$	(2), (4), A150/10
	$\sigma5\supset.\neg pI0$	A225, A173

A236 $\neg p\supset.pI0$ (Prueba similar, a partir de A153 en vez de A234)

A236/1 $p\supset.p\supset qIp$

Prueba:

(2)	$p\supset.\neg pI0$	A235
	$\sigma2\supset.\neg p\vee qI.0\vee q$	A220
	$\sigma2\supset.\neg p\vee qI.q\vee 0$	A123
	$\sigma2\supset.\neg p\vee qIq$	A150/13
	A236/1	(2), df06

A237 $p\supset.p\supset pIp$ (Prueba: A236/1)

A238 $p\vee q\supset.\neg p\supset q$

Prueba:

(2)	$p\vee q\wedge\neg p\supset q$	A207, A123
	A238	A177, (2)

Como una instancia de esta versión del silogismo disyuntivo (rechazada como las demás versiones por la lógica relevante) tenemos la siguiente: si un elemento está, o bien en estado líquido, o bien en estado gaseoso, entonces, si no está en absoluto en estado líquido, está en estado gaseoso.

A239 $pIp^1\wedge(rIr^1)\supset.qIs$ (si $\ulcorner s\urcorner$ no difiere de $\ulcorner q\urcorner$ más que por el reemplazamiento de n ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner q\urcorner$ por n ocurrencias respectivas de $\ulcorner p^1\urcorner$, y/o de m ocurrencias de $\ulcorner r\urcorner$ en $\ulcorner q\urcorner$ por m ocurrencias respectivas de $\ulcorner r^1\urcorner$, no estando afectados ni $\ulcorner p\urcorner$ ni $\ulcorner r\urcorner$ en $\ulcorner q\urcorner$ por símbolos diferentes de '$\downarrow$', 'I', 'H')

Prueba (Sea $\ulcorner q^1\urcorner$ el resultado de reemplazar en $\ulcorner q\urcorner$ esas n ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ por n ocurrencias respectivas de $\ulcorner p^1\urcorner$):

(2)	$pIp^1\supset.qIq^1$	A220
(3)	$rIr^1\supset.q^1Is$	A220
(4)	$\sigma2\wedge\sigma3\supset.\delta2\wedge\delta3$	(2), (3), A199

$\sigma 4\supset.qIs$ A223

A240 $pIp^1\vee(rIr^1)\supset.qIs\vee.qIs^1$ (si $\ulcorner s\urcorner$ es el resultado de reemplazar en $\ulcorner q\urcorner$ n ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ por ocurrencias respectivas de $\ulcorner p^1\urcorner$; y si $\ulcorner s^1\urcorner$ es el resultado de reemplazar en $\ulcorner q\urcorner$ m ocurrencias de $\ulcorner r\urcorner$ por ocurrencias respectivas de $\ulcorner r^1\urcorner$, y cumpliéndose la misma restricción sobre los símbolos)

Prueba: A220, A221/5

A241 $q\supset.pIr\supset q^1$ (si $\ulcorner q^1\urcorner$ es el resultado de reemplazar en $\ulcorner q\urcorner$ n ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ por ocurrencias respectivas de $\ulcorner r\urcorner$ —con la misma salvedad)

Prueba: A220, A108, A103, A167

A242 $q\supset.pIp^1\wedge(rIr^1)\supset s$ (si $\ulcorner q\urcorner$ y $\ulcorner s\urcorner$ son como en A239)

Prueba similar, a partir de A239 en vez de A220

A243 $q\supset.pIp^1\vee(rIr^1)\supset.s\vee s^1$ (si $\ulcorner s\urcorner$ y $\ulcorner s^1\urcorner$ son como en A240)

Prueba: A240, A108, A103, A171, A167

En lo sucesivo, haré las pruebas más concisas y resumidas omitiendo (salvo en casos excepcionales, en que nos interese centrar la atención en algún punto particular) referencias a cualquiera de las reglas de inferencia siguientes: rinf01, y de rinf11 a rinf47, ambas inclusive. También omitiré referencias a teoremas de los más obvios, como: del A101 al A150/17, del A159 al A163 —ambos inclusive. Quiere decirse que, más que pruebas propiamente dichas, las que siguen son esbozos de pruebas, dejándose al lector el ejercicio de completarlas debidamente.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 10º.— SUPERNEGACIÓN Y SOBREAFIRMACIÓN

Consagraré lo esencial de este capítulo a probar teoremas en que intervienen los functores de sobreafirmación, ‘H’, y de supernegación ‘¬’, así como del functor de afirmación atenuada ‘L’. Recuérdese que el primero se lee ‘Es del todo (=enteramente =ciento por ciento, etc.) verdad que’; el segundo: ‘Es del todo (=enteramente, etc.) falso que’ o ‘No es verdad en absoluto que’; y el tercero: ‘Es más o menos (=(por lo menos) hasta cierto punto = en mayor o menor medida = en uno u otro grado = poco o mucho) verdad que’.

Ya he demostrado anteriormente algunos teoremas importantes sobre esos functores. Sabemos, en virtud de A150/6 que, en la misma medida en que Jasán II es totalmente perverso y Eyadema es totalmente venal, en esa misma medida es totalmente verdad que Jasán II es perverso y Eyadema es venal. Sabemos, en virtud del A150/2, que el que o bien esté Germán totalmente harto o bien sea Germán totalmente incapaz de realizar la tarea equivale a que sea totalmente cierto que Germán o está harto o es incapaz de realizar la tarea. En virtud de A150/7 sabemos que el que Higinio no esté en absoluto satisfecho y el que Almudena no sea en absoluto complaciente equivale a que sea del todo falso lo siguiente: que o bien está satisfecho Higinio, o bien Almudena es complaciente. Y, en virtud de A150/8, sabemos que el que o bien no tenga Laureano en absoluto ganas de trabajar o bien Niceto se abstenga por completo de prestar colaboración equivale a que sea de todo punto falso lo siguiente: que Laureano tiene ganas de trabajar y Niceto presta colaboración.

En virtud de A151 sabemos que el que esté Telesforo más o menos enfermo equivale a que sea totalmente cierto que está Telesforo más o menos enfermo. En virtud de A151/1 sabemos que el que no sea verdad que Garlando no se resigna en absoluto a su suerte equivale a que sea del todo falso que Garlando no se resigna en absoluto a su suerte. Una vez que hemos prefijado a un enunciado la expresión 'Es más o menos cierto que', el resultado pasa a ser totalmente verdadero, si es que el enunciado dado era (en uno u otro grado) verdadero. Y, al supernegar un enunciado, el resultado es o totalmente verdadero o totalmente falso, de modo que la negación de ese resultado equivale a la supernegación del mismo, porque, ante un enunciado que es o totalmente verdadero o totalmente falso, lo mismo vale negar que supernegar, y lo mismo da afirmar a secas, afirmar atenuadamente —con 'L'—, o sobreafirmar —con 'H'.

Sabemos, en virtud de A152, que la afirmación atenuada equivale a la supernegación de la supernegación. Así, decir que está Brunilda más o menos decidida equivale a decir que es del todo falso que no esté Brunilda decidida en absoluto.

Sabemos también, por A157, que lo totalmente falso o irreal es totalmente falso, o sea: que es totalmente falso que exista lo totalmente irreal. Y, por A158, que es totalmente verdadero lo totalmente verdadero o real, e.d. que es totalmente verdad que existe lo enteramente real. En virtud de A158/2 sabemos que el que sea algo totalmente verdadero equivale a que la negación de tal algo sea totalmente falsa; así, el que esté Begoña totalmente al corriente de un asunto equivale a que sea de todo punto falso que no esté Begoña al corriente de tal asunto.

Sabemos asimismo que la disyunción de algo con su supernegación es siempre verdadera (principio **fuerte** de tercio excluso, que está expresado en A117), y que una supercontradicción —o sea: la conyunción de una fórmula con la supernegación de la misma— es siempre del todo falsa (principio de no supercontradicción, expresado en A154). Es más: sabemos que, para la supernegación, valen las diversas formulaciones del principio de Cornubia, el cual decía que de dos premisas contradictorias entre sí se sigue cualquier cosa. Eso es desde luego enteramente falso con respecto a la negación débil, 'N' (el mero 'no') y, por consiguiente, con respecto a meras contradicciones de la forma $\ulcorner p\land Np \urcorner$ (p y no-p); pero es verdad con respecto a la supernegación. Así, A153 nos dice que, si una fórmula $\ulcorner p \urcorner$ es del todo falsa, entonces tal fórmula implica cualquier enunciado, por absurdo que sea. Por eso cabe concluir —como se hace en A155— que una supercontradicción implica cualquier afirmación: el que sea verdad que me duele la cabeza y, a la vez, no me duele en absoluto, eso implica que Mobutu es el hombre más bondadoso del mundo. Y el esquema A156 nos dice que una supercontradicción cualquiera equivale a lo enteramente falso o irreal, que es del todo inexistente como sabemos: no hay nada en absoluto que sea supercontradictorio. Otras variantes del principio de Cornubia para la supernegación las presentan los esquemas A189, A190, A191 y A230 (que nos dice, p.ej., que si Fuencisla no es en absoluto la mejor nadadora, entonces cualquier cosa implica el no ser Fuencisla la mejor nadadora). Por A219 sabemos que la supernegación de «algo» equivale a que tal «algo» entrañe lo totalmente falso; así, decir que Rosalía tiene recursos para viajar a Australia sólo si es real lo absolutamente irreal equivale a decir que Rosalía no tiene en absoluto recursos para viajar a Australia.

Otros teoremas más que afectan a la supernegación son, p.ej.: del A232 al A236. También hemos visto el papel que desempeña la supernegación con relación al condicional —eso era lo esencial al respecto en los capítulos anteriores—, y la validez del silogismo disyuntivo para la negación fuerte (cf. A207, A238, rinf40): del par de premisas 'O Sigerio es un sinvergüenza o ignora la gravedad del caso' y 'Sigerio no ignora en absoluto la gravedad del caso' cabe, lícitamente, concluir que es Sigerio un sinvergüenza.

Pero aún más interesante, si cabe, es lo que nos dicen el esquema A200 y rinf44; ésta última es la **regla de apencamiento**, en virtud de la cual, al afirmarse que algo es más o menos verdad, se compromete uno a afirmar que tal algo es verdad; porque, como lo dice A200, lo que es más o menos verdad es verdad: alguien más o menos guapo es guapo (lo será, quizá, tan sólo en cierto grado, pero lo será, no podrá, mientras esté siendo guapo, dejar de serlo totalmente); un gato más o menos cariñoso es cariñoso; una tarea más o menos ardua es ardua. Nótese que la conclusión ⌜p⌝ puede ser menos, y hasta infinitamente menos, verdadera que la premisa. Todo lo que se requiere para que valga la inferencia es que, si la premisa es verdadera, también lo sea (en uno u otro grado) la conclusión, e.d. que no puede la conclusión ser totalmente falsa si no es totalmente falsa la premisa. (Lo inverso de A200, a saber A194 —y lo inverso de la regla de apencamiento, a saber: rinf43— es bastante obvio y casi una perogrullada).

Prosigamos, pues, la demostración de teoremas más o menos interesantes con relación a estos functores monádicos:

A251 ¬pINLp (Prueba: A151/1, A152)

A252 HpINLNp (Prueba: A158/2, A251)

A253/1 H¬pI¬p (Prueba: A253, df03)

A253 HHpIHp

Prueba:

(2)	HHpI¬N¬Np	A158/2
	σ2I¬¬Np	A151/1
	σ2IN¬¬Np	A151/1
	σ2INN¬Np	A151/1
	σ2I¬Np	
	σ2IHp	A158/2

A254 LHpIHp

Prueba:

(2)	LHpILHNNp	
	σ2IL¬Np	df03
	σ2IN¬¬Np	df12
	σ2INN¬Np	A151/1
	σ2I¬Np	A196
	σ2IHNNp	df03
	σ2IHp	

A254/1 ¬pIL¬p (Prueba: A150/5, df03)

A255 LpINHNp (Prueba: df12, df03)

A256 LLpILp

Prueba:

(2)	LLpIN¬N¬p	df12
	σ2INHNNHNp	df03
	σ2INHHNp	
	σ2INHNp	A253
	σ2ILp	A255

Ahora podemos derivar las reglas de inferencia rinf48 a rinf51 (véase la derivación). Lo que nos dicen las reglas rinf49 rinf51 es que podemos intercambiar, a nuestras anchas, ocurrencias de ‘L’ por ocurrencias de ‘HH…HL’, y ocurrencias de ‘H’ por ocurrencias de ‘LL…LH’. (Aunque las reglas no prevén eso más que para ciertos contextos, más adelante veremos que esas y otras reglas se extienden a contextos cualesquiera.)

Ahora demostraré que ‘L’ es distributivo con respecto a la disyunción y a la conyunción, lo mismo que ‘H’ (cf. esquemas A150/2 y A150/6.)

A257 L(p∨q)I.Lp∨Lq

Prueba:

(2)	L(p∨q)INF(p∨q)	df12
	σ2IN(¬p∧¬q)	
	σ2I.N¬p∨N¬q	
	σ2I.Lp∨Lq	

A258 L(p∧q)I.Lp∧Lq

Prueba:

(2)	L(p∧q)IN¬(p∧q)	df12
	σ2IN(¬p∨¬q)	
	σ2I.N¬p∧N¬q	
	σ2I.Lp∧Lq	df12

A259 p&qI.Lp∧q

Prueba:

(2)	p&qIN(p⊃Nq)	df07
	σ2IN(¬p∨Nq)	df06
	σ2I.N¬p∧NNq	
	σ2I.Lp∧q	df12, A106

A260 p⊃qIN(Lp∧Nq)

Prueba:

(2)	p⊃qI.¬p∨q	df03
	σ2I.¬p∨NNq	A106
	σ2I.NLp∨NNq	A251
	σ2IN(Lp∧Nq)	

A260/1 p⊃qIN(p&Nq) (Prueba: A260, A259)

A261 p⊃qI.LpZq

Prueba:

(2)	p⊃qI.¬p∨q	df06
	σ2I.NLp∨q	A251
	σ2I.LpZq	df15

A262 p→Lp

Prueba:

(2)	¬p⊃.p→Lp	A153
(3)	p⊃.¬p→Np	A234
	σ3⊃.p→N¬p	A229, A106
	σ3⊃.p→Lp	df12
	A262	(2),(3),A117,rinf42

Nótese que en la línea (3) de la prueba precedente he hecho uso de A229 de tal modo que esa fórmula, que es un bicondicional, ha sido leída como un mero condicional. Voy a generalizar tal procedimiento. Dado que una fórmula bicondicional, o sea de la forma ⌜p≡q⌝, equivale (df10) a ⌜p⊃q∧.q⊃p⌝ podemos inferir de un teorema ⌜p≡q⌝ el teorema ⌜p⊃q⌝ (por rinf 23) y también el teorema ⌜q⊃p⌝ (por rinf22); así daremos por supuesta una regla de inferencia que de ⌜p≡q⌝ permita inferir tanto ⌜p⊃q⌝ como ⌜q⊃p⌝, y así, cuando nos convenga, leer un teorema bicondicional como un teorema meramente condicional, ya de izquierda a derecha, ya a la inversa. Es más: si tenemos ⌜p≡q⌝ y tenemos ⌜p⌝, podemos inferir ⌜q⌝; y, si tenemos ⌜p≡q⌝ y tenemos ⌜q⌝, podemos inferir ⌜p⌝ (basta con leer el bicondicional como condicional y aplicar el *modus ponens*, e.d. rinf01). Obviamente, y en virtud de rinf28, si tenemos ⌜p⊃q⌝ y también ⌜q⊃p⌝, inferimos inmediatamente ⌜p≡q⌝.

A264 ¬p→Np (Prueba: A263, df03)

A263 Hp→p

Prueba:

(2)	Np→LNp	A262

(3)	$NLNp\rightarrow NNp$	(2), A229
	A363	(3), A106, A252

Nótese que, si bien son válidos tanto $\ulcorner p\supset Lp\urcorner$ como su inverso $\ulcorner Lp\supset p\urcorner$, en cambio el inverso de A262 no es válido: hay instancias suyas totalmente falsas. La diferencia radica en que el comportamiento de la implicación no es el mismo que el del mero condicional: para que sea verdadera una fórmula condicional, o sea de la forma $\ulcorner p\supset q\urcorner$, es condición necesaria y **suficiente** que, o bien sea $\ulcorner p\urcorner$ del todo falso, o bien tenga $\ulcorner q\urcorner$ algún grado de verdad, mayor o menor; pero, para que sea verdadera una implicación, una fórmula de la forma $\ulcorner p\rightarrow q\urcorner$, hace falta que el grado de verdad de $\ulcorner p\urcorner$ no sea superior al de $\ulcorner q\urcorner$. Por eso, aunque vale concluir $\ulcorner p\urcorner$ de $\ulcorner Lp\urcorner$ (regla de apencamiento), eso no significa en modo alguno que haya **implicación** válida de $\ulcorner p\urcorner$ por $\ulcorner Lp\urcorner$, pese a que sí hay, siempre y necesariamente, implicación inversa, o sea implicación de $\ulcorner Lp\urcorner$ por $\ulcorner p\urcorner$. Veámoslo con un ejemplo. El que Turismundo sea travieso implica que es, por lo menos hasta cierto punto, travieso; pero el que sea por lo menos hasta cierto punto, travieso no implica en absoluto (aunque sí entraña) su ser travieso. Recuérdese que $\ulcorner p\rightarrow q\urcorner$ puede leerse tanto «el hecho de que p implica al hecho de que q» como —eso explicita el sentido de 'implicación'— «es verdad que p a lo sumo en la medida en que (también) lo es que q». Pero el ser Turismundo más o menos travieso, si es verdad, será totalmente verdad; mientras que el ser Turismundo travieso (a secas) puede ser verdad en uno u otro grado, de entre una infinidad de grados de verdad.

Por otra parte, aunque $\ulcorner Hp\rightarrow p\urcorner$ es válido, y también lo es, por consiguiente (en virtud de rinf47), $\ulcorner Hp\supset p\urcorner$, no es válido ninguno de los esquemas inversos, a saber: $\ulcorner p\rightarrow Hp\urcorner$ y $\ulcorner p\supset Hp\urcorner$. P.ej., el ser la isla de Gomera árida de ningún modo entraña el ser tal isla totalmente árida; puede tener aridez en algún grado, mayor o menor, sin tenerla totalmente.

Demostraré ahora algunos esquemas teoremáticos a propósito de 'Z' y de '&'. 'Z' es un factor cuasicondicional; recuérdese que $\ulcorner pZq\urcorner$ se lee: es falso que p a menos que q. 'Z' no es condicional porque no posee la calidad *modus ponens*: un functor '$\rightarrow$' tiene la calidad del modus ponens ssi, suponiendo que sea afirmable con verdad $\ulcorner p\urcorner$ y que también lo sea $\ulcorner p\rightarrow q\urcorner$, entonces es afirmable con verdad $\ulcorner q\urcorner$, y eso para cualesquiera $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$. Pero puede suceder que sea afirmable con verdad cierto $\ulcorner p\urcorner$ y también $\ulcorner pZq\urcorner$ sin que lo sea $\ulcorner q\urcorner$; p.ej., sea $\ulcorner p\urcorner$ = 'Wolf era un gran filósofo'; seguramente estamos en lo cierto al pensar que tal enunciado es verdadero (hasta cierto punto) y también falso (hasta cierto punto), o sea que tanto $\ulcorner p\urcorner$ como $\ulcorner Np\urcorner$ son afirmables; de $\ulcorner Np\urcorner$ se sigue por rinf39 (la **regla de adición**) la conclusión $\ulcorner Np\vee q\urcorner$, para cualquier $\ulcorner q\urcorner$. Así, tenemos tanto $\ulcorner p\urcorner$ como $\ulcorner pZq\urcorner$ (que es lo mismo, por df15, que $\ulcorner Np\vee q\urcorner$). Pero no cualquier $\ulcorner q\urcorner$ es verdadero, pues, de serlo, todo enunciado sería verdadero y el sistema se haría **delicuescente**, e.d. incoherente, perdiendo toda solidez y, por consiguiente, se derrumbaría.

Voy a demostrar primero los principios de tercio excluso y no-contradicción para la negación débil —el mero 'no', o sea 'N'—, a los que cabe llamar 'principio simple de tercio excluso' y 'principio simple de no-contradicción'.

A265 $Np\vee p$ (Prueba: A117,A264,rinf41/1,A218)

A266 $N(p\wedge Np)$ (Prueba: A265, A106)

A267 $Hp\supset.pI1$

Prueba:

(2)	$\neg Np\supset.NpI0$	A236
	$\sigma 2\supset.pI1$	df08
	A267	(2), A158/2

A268 $pI1\equiv Hp$

Prueba:

(2)	$pI1\supset.HpIH1$	A220
	$\sigma 2\supset.H1\supset Hp$	A103
(3)	$A158\supset.]pI1\supset Hp$	(2), A167
	A268	(3), rinf28, df10, A267

A268/1 pI0≡¬p (Prueba:A268,df03,A112,df08)

A269 Hp⊃.HpIp

Prueba:

(2)	HHp⊃.HpI1	A267
(3)	Hp⊃.HpI1	(2), A253
(4)	Hp⊃.pI1	A267
	Hp⊃.HpI1∧.pI1	(3), (4)
	σ4⊃.HpIp	A224

A270 NHpI¬Hp (Prueba: A151/1, A158/2)

A273 ¬pI¬Lp (Prueba: A272, A152)

A273/1 p⊃qI.Lp⊃q (Prueba: df06, A273)

A271 NLpI¬Lp

Prueba:

(2)	NLpINN¬p	df12
	σ2IN¬¬p	A151/1
	σ2I¬¬¬p	A151/1
	σ2I¬Lp	A152

A272 ¬¬¬pI¬p (Prueba: A151/1, A106)

A273/2 p⊃Np⊃Np

Prueba:

(2)	¬p⊃Np	A218, A264
(3)	¬p∨Np⊃.Np∨Np	(2), A196
	σ3⊃Np	A118
	A273/2	(2), df06

A273/3 Np⊃p⊃p

Prueba:

(2)	¬Np⊃p	A265, A238
(3)	¬Np∨p⊃.p∨p	(2), A196
	σ3⊃p	A118
	A273/3	(3), df06

A274 Hp⊃.pZ⊃q

Prueba:

(2)	Hp⊃.HpIp	A269
	σ2⊃.pZqI.NHp∨q	A220, df15
	σ2⊃.δσ2I.¬Hp∨q	A220, A270
	σ2⊃.δσ2I.Hp⊃q	df06
	A274	A165, (2), A103, A167

Déjase al lector la prueba de los esquemas siguientes:

pZ0INp, Np⊃.pZq, pZHp, pZq⊃.qZrZ.pZr, pZqI.NqZNp

En el caso de una prótasis que, de ser verdadera, lo es totalmente, el cuasicondicional ‘Z’ funciona como un verdadero condicional, y cumple la condición del *modus ponens*, en virtud del esquema A274. En particular, el esquema A261 nos dice que el condicional auténtico, ‘⊃’, puede definirse mediante el cuasicondicional y el functor de afirmación atenuada, ‘L’: decir que, si un número es primo, entonces es indivisible por el número 2, eso equivale a decir que dado un número cualquiera, tal número no es, ni siquiera hasta cierto punto, primo, a menos que sea indivisible por el número 2.

Obviamente, podemos derivar las dos reglas de inferencia siguientes:

pZq , Hp ⊦ q   y   p , LpZq ⊦ q

Trate el lector de derivarlas, como ejercicio.

Ahora pruebo unos cuantos esquemas con respecto a la conyunción débil, ‘&’, a la que también podemos llamar ‘cuasiconyunción’:

A275 p∧q→.p&q

Prueba:

(2)	p∧LpIp	A262, df14
(3)	p∧Lp∧qI.p∧q	(2)
(4)	p∧q∧(Lp∧q)I.p∧q	(3)
	A275	(4), df14, A259

A276 p&q⊃.p∧q (Prueba: A259, A200, A195)

A277 p&q&rI.p&.q&r

Prueba:

(2)	p&q&rI.L(Lp∧q)∧r	A259
	σ2I.LLp∧Lq∧r	A258
	σ2I.LLp∧.Lq∧r	
	σ2I.Lp∧.Lq∧r	A256
	σ2I.p&.q&r	A259

A278 p⊃.LpI1

Prueba:

(2)	p⊃.¬pI0	A235
	σ2⊃.N¬pI1	df08
	σ2⊃.LpI1	A151/1, A152

A279 p⊃.p&qIq

Prueba:

(2)	p⊃.LpI1	A278
	σ2⊃.Lp∧qI.1∧q	
	σ2⊃.p&qI.1∧q	A259
	σ2⊃.σδ2Iq	

A280 p&pIp (Prueba: A262, df14, A259)

Déjase al lector, como ejercicio, el probar los esquemas teoremáticos siguientes: p&0I0, 0&pI0, p&1ILp, 1&pIp, p&q⊃.p&qIq, p&q⊃q, p&q→q, N(p&q)I.¬p∨Nq, p&(q∧r)I.p&q∧.p&r, q∧r&pI.q&p∧.r&p, Lp&qI.p&q, p&(q∨r)I.p&q∨.p&r, q∨r&pI.q&p∨.r&p, q&r∨p≡.q∨p&.r∨p, p&q≡.q&p

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 11º.— LO TOTALMENTE VERDADERO Y LO TOTALMENTE FALSO

Los dos símbolos definidos ‘1’ y ‘0’ juegan un importante papel en toda la lógica que estamos estudiando. Sobre uno y otro hemos ido demostrando diversos esquemas teoremáticos, y algunos teoremas (los teoremas, propiamente dichos, son los que no contienen letras esquemáticas), al compás de los requerimientos que íbamos experimentando en nuestro proceso demostrativo, e.d. como lemas para probar otros esquemas. Pero ahora les voy a consagrar más central atención.

Es obvio que debe existir una asimetría entre lo enteramente verdadero y lo enteramente falso. Lo enteramente verdadero existe, es verdadero (puesto que lo es enteramente). De ahí que sea afirmable con verdad. No así lo enteramente falso, que no es nada de nada, que no existe en absoluto. En rigor, la expresión ‘lo enteramente falso’ o ‘lo absolutamente falso’ no designa a nada en absoluto. Esa expresión, lo mismo que el signo‘0’ que la representa en nuestra grafía o notación, surge por necesidades de la expresión lingüística, pero no para expresar algo real. Dada su índole específica, tiene el lenguaje necesidad de símbolos que no denotan, ni expresan, cosa alguna. (La dilucidación de los motivos de tal necesidad cae fuera del ámbito de este estudio.)

Entre los teoremas y esquemas demostrados en torno a lo absolutamente verdadero y a lo absolutamente falso, figuran: A150/13, A150/11, A150/14 y siguientes, A156, A157, A158, A235 y A236, A267, A278. Huelgan los comentarios sobre esos esquemas, pues son bastante obvios, y sumamente claros. Apenas diré un par de palabras sobre los dos últimos. A267 nos dice que, si algo es enteramente verdadero o existente, tal algo equivale a lo totalmente real o verdadero, y A278 nos dice que, si algo es verdadero o existente, el ser dicho algo verdadero-en-uno-u-otro-grado es un hecho equivalente a lo totalmente real o verdadero. Por comparación, vale la pena meditar sobre A235 y A236. Todo ello pone de relieve la conexión de lo totalmente verdadero y lo totalmente falso, con —respectivamente— el functor ‘H’ (‘Es totalmente verdad que’) y el functor ‘¬’ (‘No es verdad en absoluto que’). Para que sea verdad ⌜Hp⌝, en un aspecto de lo real, es menester que, en ese aspecto, sea totalmente verdadero el hecho de que q, o sea: que, en ese aspecto, sea tal hecho equivalente a lo absolutamente real. Similarmente, pero a la inversa con respecto a ‘¬’: para que, en un aspecto de lo real, sea totalmente falso (e.d. no sea verdad en absoluto) que algo sucede, es menester que, en dicho aspecto, tal algo carezca de todo grado de verdad o realidad (o sea: que tal algo equivalga, en el aspecto en cuestión, a lo totalmente falso o irreal).

Pasemos ahora a demostrar varios esquemas.

A281 1 (Prueba: A158, A263, rinf47)

En la prueba de A281 tomamos como una de las instancias justificatorias A263, o sea ⌜Hp→p⌝, y, mediante el reemplazamiento de la letra esquemática ⌜p⌝ por la constante definida ‘1’, obtenemos ⌜H1→1⌝. Por aplicación de rinf47, de ⌜H1→1⌝ concluimos ⌜H1⊃1⌝. Como ⌜H1⌝ es A158, basta con aplicar rinf01 (*modus ponens*) para obtener la conclusión deseada. De ahora en adelante generalizaré el procedimiento de aplicar rinf47. Eso quiere decir que cada vez que tengamos un teorema o esquema teoremático de la forma ⌜p→q⌝ podemos leerlo, si nos interesa, como ⌜p⊃q⌝ —que se desprende inmediatamente del teorema o esquema en cuestión en virtud de rinf47— y, así, si también tenemos demostrado el teorema o esquema ⌜p⌝ (siendo ⌜p⌝ la misma fórmula, o esquema, que figura en el supuesto teorema, o esquema, ⌜p→q⌝), podemos concluir ⌜q⌝.

Eso significa que podemos derivar una regla de inferencia que sea el *modus ponens* para la implicación, a saber:

p→q , q ⊦ q (Derivación: rinf47, rinf01)

Haré, pues, uso de tal regla de inferencia sin siquiera nombrarla (y, por ello, me abstendré incluso de invocar a rinf47).

En virtud de rinf47, podemos incluso construir una cadena deductiva de la forma:

(n) p⊃q

σn⊃r

siempre que tengamos demostrado el correspondiente esquema (o teorema) de la forma ⌜q→r⌝, permaneciendo los correspondientes ⌜q⌝ y ⌜r⌝ inalterados, por supuesto. Nótese que todo ello vale también con respecto al símbolo de equivalencia ‘I’, en virtud de rinf12. Es más: en virtud de rinf11, y concatenando rinf11 con rinf12, tenemos: pIq ⊦ q⊃p. Por lo cual, cuando nos interese, podremos leer un esquema o teorema de la forma ⌜pIq⌝ ya como ⌜q⊃p⌝ ya como ⌜p⊃q⌝, tanto para aplicar *modus* *ponens* (eso es lo que autoriza a hacer las reglas derivadas rinf14 y rinf13) como para aplicar la regla de transitividad del condicional, o sea: rinf33 (construcción de cadenas deductivas).

El teorema A281 dice que existe (o sea: que es verdadero o real) lo absolutamente real. Recuérdese lo que, a este respecto, dije en la Introducción de este libro: como identificamos existencia y verdad, podemos leer un enunciado indistintamente como un sintagma nominal o como una oración. Lo dicho por 'Lo absolutamente real' es lo mismo que lo dicho por la expresión 'Existe lo absolutamente real' (y también que lo dicho por la expresión 'La existencia de lo absolutamente real', etc.). Usamos el sintagma nominal en ciertos contextos y el oracional en otros; pero son —para emplear terminología lingüística— **alomorfos en distribución complementaria**, e.d. expresiones con el mismo significado, cada una de las cuales se emplea en ciertos contextos, en función de ciertas normas de distribución que forman parte de la estructura superficial de la lengua. (Un caso de un par de alomorfos en distribución complementaria es la alternativa -aste/-iste; ambos morfemas significan lo mismo, a saber: 'tú hiciste la acción de…' debiendo rellenarse el espacio de los puntos suspensivos con una expresión que signifique al radical verbal; el empleo de 'aste' o de 'iste' está meramente en función de listas de radicales verbales, independientemente del significado de los mismos). Así, como enunciado separado, habrá que usar la oración 'Existe…', rellenándose el espacio de los puntos suspensivos con un sintagma nominal; y es que, en ese caso, se trata de enunciar, sin más, el hecho expresado por tal sintagma nominal (y cada cosa es un hecho, puesto que un ente, cualquiera que sea, es lo mismo que su existencia, e.d. que el hecho de que él existe). En otras ocasiones, empero, queremos decir algo sobre tal hecho, atribuirle ciertas propiedades en cierto grado; entonces, se suprime o elide el verbo 'existe', dejándose el sintagma nominal mondo y lirondo.

A282 $LpI1\equiv p$

Prueba:

(2)	$LpI1\supset Lp$	A281, A241
	$\sigma 2\supset p$	A200
	A282	(2), A278, df10

A283 $H1I1$

Prueba:

(2)	$HH1$	A158, A253
	$2\supset.]H1I1$	A267

A284 $L1I1$ (Prueba: A281, A282) A285 $\neg 1I0$ (Prueba: A284, df08, A251)

A286 $\neg 0I1$ A287 $L0I0$ A288 $H0I0$

(Las pruebas de estos tres teoremas son similares a las anteriores)

A289 $H(\neg p\lor Lp)$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\lor\neg p$	A117
(3)	$\neg p\lor\neg\neg p$	(2)
(4)	$\neg p\lor HLp$	(3), A152, A151
(5)	$H\neg p\lor HLp$	(4), A253/1
	A289	(5)

A290 $H(Np\lor Lp)$

Prueba:

(2)	$\neg Lp\lor Lp$	A117
(3)	$\neg p\lor Lp$	(2), A273
(4)	$HNp\lor HLp$	(3), df03, A151
	A290	(4)

A291 $\neg p\lor LpI1$ (Prueba: A289, A267) A292 $Np\lor LpI1$ (Prueba: A290, A267)

A293 $Hp\supset H(p\vee q)$

Prueba:

(2)	$Hp\supset.pI1$	A267
	$\sigma 2\supset.p\vee qI.1\vee q$	
	$*\sigma 2I1$	
(3)	$\delta 2\supset H(p\vee q)$	A268
	A293	(2), (3)

A294 $H(\neg p\vee Lp\vee q)$ (Prueba: A293, A289)

A295 $H(Np\vee Lp\vee q)$ (Prueba: A293, A290)

A296 $\neg p\vee Lp\vee qI1$ (Prueba: A294, A267)

A297 $Np\vee Lp\vee qI1$ (Prueba: A295, A267)

A298 $\neg p\vee Lp\vee q\wedge rIr$ (Prueba: A296)

A299 $Np\vee Lp\vee q\wedge rIr$ (Prueba: A297)

A300 $p\equiv 1Ip$

Prueba:

(2)	$p\supset 1I1$	df06
(3)	$1\supset pI.\neg 1\vee p$	df06
	$\sigma 3I.0\vee p$	A285
	$\sigma 3Ip$	
(4)	$p\supset 1\wedge(1\supset p)I.1\wedge p$	(2), (3), A239
	$\sigma 4Ip$	A150/11
	A300	(3), df10

A301 $HpI1\vee.HpI0$

Prueba:

(2)	$NHp\supset.HpI0$	A270, A236
	$\sigma 2\supset.HpI1\vee.HpI0$	A162
(3)	$Hp\supset.HpI1\vee.HpI0$	A253, A267, A162
	A301	(2),(3),A265,rinf42

A302 $LpI1\vee.LpI0$ (Prueba: A301, A151)

A302/1 $HNp\vee\neg Hp$ (Prueba: A301, A268, A268/1, A221/5)

A302/2 $HLp\vee\neg Lp$ (Prueba: A302, A268, A268/1, A221/5)

A302/3 $H\neg p\vee\neg\neg p$ (Prueba: A302/1, df03)

Déjase al lector la prueba de los cuatro teoremas siguientes:

A303 $LpI1\equiv Lp$, A304 $\neg(1\supset 0)$, A305 $\neg(1I0)$, A306 $1I0I0$

A307 $p\wedge qI1\equiv.pI1\wedge.qI1$

Prueba:

(2)	$pI1\wedge(qI1)\supset.p\wedge qI.1\wedge 1$	A239
	$\sigma 2\supset.\sigma\delta 2I1$	
(3)	$p\wedge qI1\supset.p\wedge q\vee pI.1\vee p$	A220
	$\sigma 3\supset.pI.1\vee p$	
	$\sigma 3\supset.\sigma\delta 3I1$	
(4)	$p\wedge qI1\supset.qI1$	similarmente a (3)
(5)	$p\wedge qI1\supset.\delta 3\wedge\delta 4$	(3), (4)
	A307	(2), (5), df10

A308 $pI1\vee(qI1)\equiv.p\vee qI1$

Prueba:

(2)	$pI1\vee(qI1)\supset.p\vee qI(1\vee q)\vee.p\vee qI.p\vee 1$	A240
	$\sigma 2\supset.p\vee qI1\vee.p\vee qI1$	
	$\sigma 2\supset.p\vee qI1$	
(3)	$p\vee qI1\supset H(p\vee q)$	A268
	$\sigma 3\supset.Hp\vee Hq$	
	$\sigma 3\supset.pI1\vee.qI1$	A267,rinf41,MD
	A308	(2), (3), df10

Vale la pena comentar el empleo que se acaba de hacer (en la línea (3) de la prueba de A308) del metateorema de la deducción, MD. En virtud de rinf41, tenemos que, del cúmulo de las tres premisas ⌜Hp⊃.pI1⌝, ⌜Hq⊃.qI1⌝ y ⌜Hp∨Hq⌝, se infiere la conclusión ⌜pI1∨.qI1⌝. Así pues, dada la versión fuerte del metateorema de la deducción, tenemos que, del conjunto formado por las dos primeras de entre esas tres premisas, se infiere la conclusión: ⌜Hp∨Hq⊃.pI1∨.qI1⌝. Ahora, esas dos premisas son esquemas teoremáticos que hemos demostrado. Mas lo que se infiere de teoremas es un teorema; de modo que es lo mismo decir que la conclusión ⌜p⌝ se infiere a partir de un conjunto de premisas todas las cuales son teoremas que decir que ⌜p⌝ es un teorema. Ello nos permite expresar en forma de corolario del MD lo siguiente: si Γ , p ├ q, y Γ no contiene más que teoremas o esquemas teoremáticos, entonces es un teorema o esquema teoremático la fórmula condicional ⌜p⊃q⌝.

Conviene reparar en que el recurso a MD es sólo un expediente para abreviar algunas pruebas. En general, poco uso se está haciendo en este libro de tal metateorema. Y es que parece preferible que el estudiante se familiarice con la prueba rigurosa y no abreviada de los teoremas o esquemas teoremáticos, en vez de acogerse en seguida a atajos cómodos. Sólo cuando haya pasado ya muchas horas examinando y siguiendo paso a paso pruebas rigurosas y detalladas de teoremas (o esquemas teoremáticos), pero no antes, podrá el estudiante, sin menoscabo de su aprendizaje lógico, permitirse el lujo de recurrir, tan a menudo como lo desee, a MD en la prueba de otros teoremas.

En cualquier caso, MD es prescindible. En el caso que ha suscitado este comentario, tenemos que el esquema teoremático ⌜Hp∨Hq⊃.pI1∨.qI1⌝ puede probarse acudiendo a A221/5, como sigue:

Hp⊃.(pI1)⊃.Hq⊃(qI1)⊃.Hp∨Hq⊃.pI1∨.qI1

Luego se aplica dos veces *modus ponens* (o sea: rinf01), en virtud de A267, y se tiene probado el esquema teoremático en cuestión.

A309 p∧qI0≡.pI0∨.qI0			A310 p∨qI0≡.pI0∧.qI0		
Prueba:			Prueba:		
(2)	pI0⊃.p∧qI.0∧q	A220	(2)	p∨qI0⊃.p∨q∧pI.0∧p	A220
	σ2⊃.σδ2I0			σ2⊃.pI.0∧p	A139
(3)	qI0⊃.p∧qI0	similarmente		σ2⊃.pI0	
(4)	pI0∨(qI0)⊃.p∧qI0	(2), (3), A169	(3)	p∨qI0⊃.qI0	similarmente
(5)	p∧qI0⊃¬(p∧q)	A268/1	(4)	p∨qI0⊃.pI0∧.qI0	(2), (3)
	σ5⊃.¬p∨¬q		(5)	pI0∧(qI0)⊃.p∨qI.0∨0	A239
	σ5⊃.pI0∨.qI0	A236, rinf41, MD		*σ5I0	
	A309	(5), (4), df10		A310	(4), (5), df10

Obsérvese la asimetría entre 1 y 0: mientras que (A307) el que una conyunción sea equivalente a 1 se da ssi cada uno de los dos miembros conyuntivos, por su lado, es equivalente a 1, en cambio (A309) el que una conyunción sea equivalente a 0 se da ssi uno u otro (e.d. al menos uno) de los dos miembros conyuntivos es equivalente a 0; y, mientras que (A308) el que una disyunción sea equivalente a 1 se da ssi uno u otro de entre los miembros disyuntivos es equivalente a 1, en cambio (A310), el que una disyunción sea equivalente a 0 se da ssi ambos miembros son, cada uno por su lado, equivalentes a 0.

La explicación es una perogrullada: la disyunción da siempre el grado de verdad superior de entre los de los dos **disyuntos**, mientras que la conyunción da el grado de verdad inferior de entre los dos

conyuntos. Y ningún grado de verdad es superior a 1, como ninguno es inferior a 0, pues 0 es, por decirlo así, el grado nulo de verdad, o sea: la falta de todo grado de verdad.

Por lo demás, parecen holgar comentarios sobre la lectura de (instancias de) esquemas o teoremas demostrados en este capítulo. Limitémonos a enunciar, en castellano, instancias de algunos de ellos. Una instancia de A282 es: Se da equivalencia entre que Gastón sea más o menos entusiasta y lo absolutamente real, si, y sólo si, es Gastón entusiasta. Una instancia de A290 es: Es plenamente cierto que: o no se vive bien en Irlanda o se vive más o menos bien en Irlanda. Una instancia de A239 es ésta: Si Ladislao está totalmente furioso, entonces es enteramente cierto que: o está furioso Ladislao, o España es una isla. Una instancia de A301 es: o bien el ser Estanislao totalmente rebelde equivale a lo absolutamente real o verdadero, o bien equivale a lo totalmente irreal o falso. Por último, una instancia de A307 es ésta: Se da equivalencia entre el ser cruel doña Lambra y traicionero Ruy Velázquez y lo absolutamente real, ssi se da equivalencia entre el ser cruel doña Lambra y lo absolutamente real, y se da también equivalencia entre el ser traicionero Ruy Velázquez y lo absolutamente real.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 12º.— EL BICONDICIONAL

Voy a consagrar, principalmente, este capítulo a la demostración de teoremas en que aparece el functor bicondicional, ≡, que expresa el entrañamiento mutuo. También podemos leer ⌜p≡q⌝ como: el ser verdad que p y el ser verdad que q son coherentes entre sí; o también: se da coherencia entre el ser verdad que p y el ser verdad que q.

En las pruebas que siguen, omitiré referencias a df10 y a df06.

A311 $p\supset q\equiv.\neg q\supset\neg p$

Prueba:

(2)	$\neg\neg p\supset.\neg q\supset\neg p\supset\neg\neg q$	A214
	$^*\sigma2\supset Lq$	A152
	$^*\sigma2\supset q$	A200
(3)	$p\supset\neg\neg p$	A194, A152
	$\sigma3\supset.\neg q\supset\neg p\supset q$	(2)
(4)	$\neg q\supset\neg p\supset.p\supset q$	(3), A167
	A311	A192, (4)

A312 $p\equiv q\mathrm{I}.q\equiv p$ (La prueba se deja al lector)

A313 $p\equiv q\supset.q\equiv r\supset.p\equiv r$

Prueba:

(2)	$p\supset q\supset.q\supset r\supset.p\supset r$	A172
(3)	$q\supset q\supset.r\supset q\supset.r\supset p$	A173
(4)	$\sigma2\land\sigma3\supset.\delta2\land\delta3$	(2), (3), A199
	$\sigma4\supset.q\equiv r\supset.p\equiv r$	A199/1

A313/1 $p\equiv q\land(q\equiv r)\supset.p\equiv r$ (Prueba: A313, A177)

A314 $p\equiv p$ (déjasele la prueba al lector)

A315 $p\equiv q\supset.p\land r\equiv.q\land r$ (Prueba: A188, A199/1)

A317 $p\equiv q\land(r\equiv s)\supset.p\land r\equiv.q\land s$

A316 $p\equiv q\supset.p\vee r\equiv.q\vee r$

Prueba:

(2)	$p\supset q\supset.p\vee r\supset.q\vee r$	A196
(3)	$q\supset p\supset.q\vee r\supset.p\vee r$	A196
	A316	(2), (3), A199

Prueba:

(2)	$p\equiv q\supset.p\wedge r\equiv.q\wedge r$	A315
(3)	$r\equiv s\supset.q\wedge r\equiv.q\wedge s$	A315
(4)	$\sigma 2\wedge\sigma 3\supset.\delta 2\wedge\delta 3$	(2), (3), A199
	$\sigma 4\supset.p\wedge r\equiv.q\wedge s$	A313/1

A318 $p\equiv q\wedge(r\equiv s)\supset.p\vee r\equiv.q\vee s$ (Prueba similar, a partir de A316 en vez de A315)

A319 $p\equiv q\supset.q\equiv r\equiv.p\equiv r$

Prueba:

(2)	$p\equiv q\supset.p\equiv r\supset.q\equiv r$	A313, A312
	A319	(2), A313

A320 $p\equiv q\mathrm{I}.p\wedge q\vee\neg(p\vee q)$

Prueba:

(2)	$p\equiv q\mathrm{I}.\neg p\vee q\wedge.\neg q\vee p$	
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg p\vee q\wedge\neg q\vee.\neg p\vee q\wedge p$	
	$\sigma 2\mathrm{I}.\neg q\wedge\neg p\vee.p\wedge q$	A233/2, A233/1
	$\sigma 2\mathrm{I}.p\wedge q\vee\neg(p\vee q)$	

A321 $p\equiv q\mathrm{I}.p\vee q\supset.p\wedge q$ (Prueba: A320) A322 $p\equiv\mathrm{L}p$ (Prueba: A194, A200)

A323 $p\equiv\neg\neg p$ (Prueba: A322, A152) A324 $p\equiv q\equiv.\neg p\equiv\neg q$ (Prueba: A311, A317)

A325 $\neg(p\supset q)\equiv.p\wedge\neg q$

Prueba:

(2)	$p\wedge\neg q\supset.\neg\neg p\wedge\neg q$	A323, A188
	$\sigma 2\supset\neg(\neg p\vee q)$	
	$\sigma 2\supset\neg(p\supset q)$	
	A325	A215, (2)

A partir de este momento, la derivación de nuevas reglas de inferencia ya no será exilada al capítulo 4º, sino incorporada al texto principal, de modo que aparezcan tales derivaciones de reglas de inferencia intercaladas en medio de las pruebas de teoremas, en función de qué teoremas deban aducirse para derivar la regla de que se trate y de qué reglas deban aducirse en la demostración de teoremas ulteriores.

Ahora voy a derivar la siguiente regla de inferencia:

rinf53 $p\equiv q \vdash r\equiv s$ (Siempre que ⌜r⌝ difiera de ⌜s⌝ tan sólo en el reemplazamiento de una o varias ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜r⌝ por ocurrencia[s] respectiva[s] de ⌜q⌝, y con tal que esas ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜r⌝ y de ⌜q⌝ en ⌜s⌝ estén afectadas únicamente por los functores: ‘∧’, ‘∨’, ‘¬’ —y otros definibles a partir de esos tres, como ‘⊃’ y ‘≡’)

La derivación se hace por inducción matemática (como la de rinf32) aduciendo los esquemas siguientes: A315, A316 y A324)

A326 pIq⊃.p≡q

Prueba:

(2) pIq⊃.p⊃q A108,A103

(3) pIq⊃.q⊃p A103

pIq⊃.p⊃q∧.q⊃p (2), (3)

A327 ¬(p≡q)≡.p∧¬q∨.q∧¬p

Prueba:

(2) ¬(p≡q)I.¬(p⊃q)∨¬(q⊃p)

(3) ¬(p⊃q)≡.p∧¬q A325

(4) ¬(q⊃p)≡.q∧¬p A325

(5) σ3∨σ4≡.δ3∨δ4 (3), (4), A318

A327 (2),A326,(5), A313/1

A328 p≡q∨.q≡r∨.p≡r

Prueba:

(2) ¬(p≡q∨.q≡r∨.p≡r)⊃.¬(p≡q)∧¬(q≡r)∧¬(p≡r)

σ2⊃.p∧¬q∨(q∧¬p)∧.q∧¬r∨(r∧¬q)∧.p∧¬r∨.r∨¬p A327

σ2⊃0 A232

A328 (2), A219, A323

A329 ¬(p≡q∨.q≡r)⊃.p≡r (Prueba: A328, A238)

A330 p≡q≡.q≡r≡.p≡r

Prueba:

(2) q≡r∧(p≡r)⊃.p≡q A313/1, A312

(3) ¬(q≡r∨.p≡r)⊃.p≡q A329, A312

(4) σ2∨σ3⊃.p≡q (2), (3)

(5) q≡r≡(p≡r)⊃.p≡q (4), A320

A330 (5), A319

A331 p≡q≡.p⊃q∧.¬p⊃¬q

Prueba:

(2) p≡q≡.p⊃q∧.q⊃p A326

σ2≡.p⊃q∧.¬p⊃¬p A311, A315

En la prueba de A331 hemos acudido a la formación de un nuevo tipo de cadenas deductivas, en las que el functor central es '≡' y que, por lo demás, son iguales que las que ya hemos venido empleando con respecto a los functores 'I' y '⊃'; lo que nos autoriza a formar cadenas de esa índole con '≡' es el esquema A313; así, si demostramos ⌜p≡q⌝ y, por otro lado, tenemos demostrado ⌜q≡r⌝, en virtud de cierto esquema previamente probado, An, entonces escribimos

(m) p≡q

σm≡r An

En la prueba de A331, sabemos, por A311, que es verdad ⌜q⊃p≡.¬p⊃¬q⌝; y por A315 y rinf01, dada la validez de esa fórmula bicondicional, es también verdad lo siguiente: ⌜p⊃q∧(q⊃p)≡.p⊃q∧.¬p⊃¬q⌝ (para aplicar A315, lo hacemos sobreentendiendo una aplicación de A122 y rinf32; o sea: leemos A315 así: p≡q⊃.r∧p≡.r∧q).

A332 $p\equiv\neg q\equiv.\neg p\equiv q$

Prueba:

(2)	$p\equiv\neg q\equiv.\neg p\equiv\neg\neg q$	A324
	$\sigma 2\equiv.\sigma d2\equiv q$	A323, A312

En la prueba de A332 he aplicado el procedimiento de formación de cadenas deductivas con '≡' a una ocurrencia de '≡' que no era la ocurrencia principal de la línea demostrada, haciendo uso implícito de A319. Así, si tenemos previamente demostrado $\ulcorner r\equiv s\urcorner$, como (en virtud de A319) de esto último se deduce $\ulcorner s\equiv q\equiv.r\equiv q\urcorner$, lo cual equivale (en virtud de A312) a $\ulcorner q\equiv r\equiv.q\equiv s\urcorner$, tenemos demostrada esta última fórmula; y si ahora demostramos $\ulcorner p\equiv.q\equiv r\urcorner$, aplicando A313/1 concluimos: $\ulcorner p\equiv.q\equiv s\urcorner$.

A333 $p\wedge q\supset.p\equiv q$ (Prueba: A320, A169)

A334 $\neg p\wedge\neg q\supset.p\equiv q$ (Prueba similar, teniendo en cuenta A150/7)

A335 $\neg p\wedge q\wedge\neg r\supset.p\equiv.q\equiv r$

Prueba:

(2)	$\neg p\wedge q\wedge\neg r\supset.q\wedge\neg r$	
	$\sigma 2\supset\neg(q\equiv r)$	A327, A162
(3)	$\neg p\wedge q\wedge\neg r\supset.\neg p\wedge\neg(q\equiv r)$	(2), A187
	$\sigma 3\supset.p\equiv.q\equiv r$	A334

A336 $p\wedge q\wedge r\supset.p\equiv.q\equiv r$ (Prueba: A333) A337 $p\wedge\neg q\wedge\neg r\supset.p\equiv.q\equiv r$ (Prueba: A334, A333)

A338 $p\equiv q\equiv r\equiv.p\equiv.q\equiv r$

Prueba:

(2)	$p\equiv q\equiv r\supset.p\equiv q\wedge r\vee\neg(p\equiv q\vee r)$	A320
	$\sigma 2\supset.p\equiv q\wedge r\vee.\neg(p\equiv q)\wedge\neg r$	
	$\sigma 2\supset.p\equiv q\wedge r\vee.p\wedge\neg q\vee(q\wedge\neg p)\wedge\neg r$	A327, rinf53
	$\sigma 2\supset.p\equiv q\wedge r\vee.p\wedge\neg q\wedge\neg r\vee.q\wedge\neg p\wedge\neg r$	
(3)	$p\equiv q\wedge r\supset.p\wedge q\vee\neg(p\vee q)\wedge r$	A320
	$\sigma 3\supset.p\wedge q\wedge r\vee.\neg p\wedge\neg q\wedge r$	
	$\sigma 3\supset.p\equiv(q\equiv r)\vee.p\equiv.q\equiv r$	A336, A335, A221/5
	$\sigma 3\supset.p\equiv.q\equiv r$	
(4)	$p\wedge\neg q\wedge\neg r\supset.p\equiv.q\equiv r$	A337
(5)	$q\wedge\neg p\wedge\neg r\supset.p\equiv.q\equiv r$	A335
(6)	$\sigma 4\vee\sigma 5\supset.p\equiv.q\equiv r$	(4), (5), A169
(7)	$\delta 2\supset.p\equiv.q\equiv r$	(3), (6), A169

(8)	σ2⊃δ7	(2), (7)
(9)	r≡q≡p⊃.r≡.q≡p	(8), reemplazamiento de letras
(22)	p≡(q≡r)⊃.p≡q≡r	(9), A312
	A338	(8), (22)

Déjasele al lector el ejercicio de probar los esquemas siguientes:

A339 p≡q⊃.p⊃r≡.q⊃r

A340 p≡q⊃.r⊃p≡.r⊃q

A341 p≡q≡.LpILq

A342 p≡q≡.¬pI¬q

A343 p≡q⊃.o&rI.q&r

A344 p≡q⊃.r&p≡.r&q

A345 p⊃.p∧q≡q

A346 p⊃q≡.p≡.p∧q

A347 p⊃q≡.p∨q≡q

A348 p∧q≡q∧(p∧q≡p)≡.p≡q

A349 p≡q≡.p∧q≡.p∨q

A350 p∧q≡.p&q

A351 p≡¬q≡.¬p≡q

A352 p∧Lq≡.p&q

A353 p∨Lq≡.Lp∨q

A354 ¬(p≡¬p)

A355 H(p∧q)∨¬(p∨q)≡H(p≡q)

A356 Hp∨¬p≡H(p≡p)

A357 p≡pIp≡p

A358 1≡pIp

A359 N(p≡q)I.p∨q&N(p∧q)

A360 N(p≡Np)

(Para demostrar A341 adúzcanse: A282, A273, A221/5, A169, A320, A224, A236)

Déjase también como ejercicio para el lector el derivar la siguiente regla de inferencia:

rinf54 Sea ⌜r⌝ una fórmula cualquiera en la que haya n ocurrencias de ⌜p⌝ afectadas sólo por los functores: '∧', '∨', '¬' (así como los definidos a partir de esos tres: '⊃', '≡', etc.), y sea ⌜s⌝ el resultado de reemplazar en ⌜r⌝ alguna[s] (no forzosamente todas) de esas ocurrencias de ⌜p⌝ por ocurrencias de ⌜Lp⌝; entonces:

1º) r ⊦ s ; 2º) s ⊦ r ; 3º) q ⊦ r≡s

(Más que **una** regla de inferencia, vemos que rinf54 es un conjunto de tres reglas; pero pruebe el lector que, en virtud del metateorema de la deducción, el tercer componente se puede derivar de los dos primeros conjuntamente tomados; y que, en virtud de rinf01, cada uno de los dos primeros puede derivarse del tercero).

A361 Hq∨¬q⊃.p⊃q≡.p→q

Prueba:

(2)	qI1⊃.p→q	rinf52
(3)	qI1⊃.p→q	(2)
	σ3⊃.p⊃q	A218
(4)	qI1⊃.p⊃q∧.p→q	(2), (3), A186

	$\sigma 3\supset .p\supset q\equiv p\to q$	A333
(5)	$Hq\supset .qI1$	A267
	$\sigma 5\supset .p\supset q\equiv .p\to q$	(4)
(6)	$\neg q\supset .qI0$	A236
	$\sigma 6\supset .p\supset qI\neg p$	df06, rinf52
	$\sigma 6\supset .p\supset q\equiv \neg p$	A326
	$\sigma 6\supset .p\supset q.\neg p\vee \neg (p\supset q\vee \neg p)$	A320
	$\sigma 6\supset .\neg p\vee \neg (p\supset q\vee \neg p)$	df06
	$\sigma 6\supset .\neg p\vee .\neg (p\supset q)\wedge \neg \neg p$	
	$\sigma 6\supset .\neg p\vee .\neg \neg p\wedge \neg q\wedge \neg \neg p$	
	$\sigma 6\supset .\neg p\vee .p\wedge \neg q$	A152, rinf54
(7)	$\neg q\supset .\neg q\wedge .\neg p\vee .p\wedge \neg q$	(6), A187
	$\sigma 7\supset .\neg q\wedge \neg p\vee .\neg q\wedge p$	
	$\sigma 7\supset .qO0\wedge (pI0)\vee .\neg q\wedge p$	A236, A199
	$\sigma 7\supset .qIp\vee .\neg q\wedge p$	A224, A221/5
(8)	$\neg q\wedge p\supset \neg (p\supset q)$	A325
	$\sigma 8\supset .\neg (p\supset q)\wedge \neg (p\to q)$	A218, A192, A187
	$\sigma 8\supset .p\supset qI0\wedge .p\to qI0$	A236, A199
	$\sigma 8\supset .p\supset qI.p\to q$	A224
	$\sigma 8\supset .p\supset q\equiv .p\to q$	A326
(9)	$qIp\supset .p\supset q\wedge .p\to q$	A103, A226, A161
	$\sigma 9\supset .p\supset q\equiv .p\to q$	A333
(22)	$\delta 7\supset .p\supset q\equiv .p\to q$	A169, (9), (8)
(23)	$\neg q\supset .p\supset q\equiv .p\to q$	(7), (22)
	A361	(5), (23), A169

A361/1 $p\supset Hp\equiv .p\to Hp$ (Prueba: A361, A302/1)

A361/2 $p\supset \neg p\equiv .p\to \neg q$ (Prueba: A361/1)

A361/3 $p\supset Lp\equiv .p\to Lp$ (Prueba: A361, A302/2)

A361/4 $p\supset q\equiv .p\to Lq$ (Prueba: A361/3, rinf54, A313/1)

El esquema A361 nos muestra que, cuando la prótasis es o totalmente verdadera o totalmente falsa, entonces una fórmula condicional con dicha prótasis entraña a, y es entrañada por, una fórmula implicacional con esa misma apódosis.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 13º.— IMPLICACIÓN; EL METATEOREMA DE LA EQUIVALENCIA

Voy, en este capítulo, a probar unos cuantos teoremas en los que figura como functor central la implicación, '$\rightarrow$', que no es un mero condicional (aunque sí es un functor condicional, pero más fuerte o estricto que el mero condicional o entrañamiento). Sabemos que $\ulcorner p\rightarrow q\urcorner$, el que el ser verdad que p implique al serlo que q, significa que el hecho de que p es a lo sumo tan real o verdadero como el hecho de que q (o, dicho de otro modo: que el hecho de que q es por lo menos tan real como el hecho de que p).

Antes de pasar a la demostración de esquemas implicacionales, hemos menester de probar otros esquemas, en los que figura el functor de **super**conyunción '•': 'no sólo… sino también'; más adelante —en el cap. 21º, pág^{as} 116ss— estudiaré sistemáticamente tal functor, limitándome por ahora a probar esquemas que nos han de servir como lemas para demostrar lo que nos interesa en este capítulo.

A partir de este momento, voy a simplificar aún más las pruebas (no nos queda otro remedio, si queremos evitar una prolijidad excesiva), dejando de aducir, como justificación de pasos deductivos, los esquemas del A101 al A222 (inclusive) y, además de rinf01, las reglas de inferencia que van de rinf11 a rinf54 (inclusive), con todas las cuales se supone que el lector está ya familiarizado, pudiendo suplir nuestro silencio y completar o explicitar del todo las pruebas (ése será el mejor ejercicio). También omitiré referencias explícitas a las definiciones: df03, df04, df05, df06, df07, df08, df10, df12, df14, df15.

A362 $p\bullet q\rightarrow.p\wedge q$ (Prueba, A03, df23)

A363 $q\rightarrow r\supset.p\rightarrow q\supset.p\rightarrow r$

Prueba:

(2) $q\wedge rIq\supset.p\vee qIq\supset.q\wedge rI.p\vee r$

(3) $\delta\delta2\supset.q\wedge r\vee rI.p\vee r\vee r$

$\sigma3\supset.rI.p\vee q\vee r$

(4) $\sigma2\supset.\sigma\delta2\supset\delta3$ (2), (3)

(5) $rI(p\vee q\vee r)\supset.p\wedge rI.p\vee(q\vee r)\wedge p$

$\sigma5\supset.p\wedge rIp$

$\sigma5\supset p\rightarrow r$

A363 (4), (5)

A364 $p\rightarrow qI.Nq\rightarrow Np$

Prueba:

(2) $p\wedge qIpI.N(p\wedge q)INp$

$\sigma2I.Np\vee NqINp$

$\sigma2I.Np\vee Nq\wedge NqI.Np\wedge Nq$

$\sigma2I.NqI.Np\wedge Nq$

A365 $p\rightarrow NqI.q\rightarrow Np$ (Prueba: A364)

A366 $Np\rightarrow qI.Nq\rightarrow p$ (Prueba: A364)

Los esquemas recién demostrados son bastante obvios. El esquema A362 nos dice que el ser verdad que no sólo p sino también q implica el ser verdad que p y el ser verdad que q. Así, p.ej., que en Turquía no sólo viva el pueblo miserablemente sino que sufra represión implica que en Turquía el pueblo vive miserablemente y sufre represión.

El esquema A363 nos dice que la implicación es transitiva: Si el ser ambiciosa una persona implica su querer copar puestos, entonces, si el querer una persona copar puestos implica su acudir a añagazas, el ser ambiciosa una persona implica su acudir a añagazas. Por otro lado, como ⌜p→q⌝ se lee también ⌜Es verdad que p es a lo sumo tan real como el ser verdad que q⌝, podemos poner como ejemplo de otra instancia de A363 el siguiente: Si Kenan es a lo sumo tan compasivo como presuntuoso, entonces, si es a lo sumo tan presuntuoso como mandamás, resulta que Kenan es a lo sumo tan compasivo como mandamás.

Los esquemas siguientes dicen que el que un hecho sea a lo sumo tan verdadero como otro equivale a que este otro sea a lo sumo tan falso como el primero.

A367 p•q→p∧.p•q→p (Prueba: A362, A363)

En el esbozo de prueba de A367 he sobreentendido, sin aducirla explícitamente, la validez de los esquemas ⌜p∧q→p⌝ y ⌜p∧q→q⌝. Pruebe el lector que esos esquemas son válidos y que también son los que ahora se indican:

p→.p∨q , q→.p∨q , p→p

Las pruebas son sencillísimas. En lo sucesivo, sobreentenderé, cuando convenga, uno u otro de esos esquemas sin aludir a ellos explícitamente.

A368 p→q∨.q→np∨.pImq (Prueba: A06)

A369 p→q∨.q→p

Prueba:

(2)	q→(p•å)⊃.q→p	A367, A363
(3)	pImq⊃pIN(Nq•å)	df20, df19
	σ3⊃.NpI.Nq•å	
	σ3⊃.Np→.Nq•å	A226
	σ3⊃.Np→Nq	A367, A363
	σ3⊃.q→p	A229
(4)	σ2∨σ3⊃.q→p	(2), (3)
	A369	A368, (4), df19

A370 pIpIN(pIp) (Prueba: A05)

A371 ½IN½ (Prueba: A370, df11)

A372 pIpI½

Prueba:

(2)	pIp→½⊃.pIp→½∧.pIp→N½	A371
	σ2⊃.pIp→½∧.½→N(pIp) A365, A371	
(3)	A370⊃.2I.]pIp→½⊃.pIp→½∧.½→.pIp	
	σ3⊃.½I.pIp	A225
(4)	½→(pIp)⊃.N(pIp)→N½	A364
	σ4⊃.N(pIp)→N½∧.N(pIp)→½	A371
	σ4⊃.½→(pIp)∧.N(pIp)→½	A364
(5)	A370⊃.4I.]½→(pIp)⊃.½→(pIp)∧.pIp→½	
	σ5⊃.½I.pIp	A225
	A372	A369, (3), (5)

A373 pIpI.qIq (Prueba: A372, A223) A374 pIq⊃.pIqI.pIp (Prueba: A101)

A375 pIq⊃.pIqI.rIr (Prueba: A374, A373) A376 pIq⊃.pIqI½ (Prueba: A374, A372)

A377 p∨qIp∨.p∨qIq (Prueba: A369, A228) A377/1 p∨q→p∨.q→p (Prueba: A377, A226)

A377/2 p→(p∧q)∨.q→.p∧q

Prueba:

(2)	Np∨Nq→Np∨.Np∨Nq→Nq	A377/1
(3)	p→N(Np∨Nq)∨.q→N(Np∨Nq)	(2), A365
	p→(p∧q)∨.q→.p∧q	(3)

A379 p→≡.p⊃.p→q

Prueba:

(2)	p→q⊃.p⊃.p→q	
(3)	¬p∨(p→q)⊃.p→q	
	A379	(2), (3)

A380 pIqI0∨.pIqI½ (Prueba: A376, A236)

A378 pIq⊃.pIqIN(pIq)

Prueba:

(2)	pIq⊃.N(pIq)IN½	A376
(3)	σ2⊃σδ2I½	A371
(4)	pIq⊃.pIqI½∧.N(pIq)I½	A376, (3)
	σ4⊃.pIqIN(pIq)	A223

A381 pIq∧(rIs)⊃.pIqI.rIs

Prueba:

(2)	pIq⊃.pIqI½	A376
(3)	rIs⊃.rIsI½	A376
(4)	σ2∧σ3⊃.δ2∧δ3	(3), (2)
	σ4⊃.pIqI.rIs	A223

A382 pIq⊃(rIs)≡.pIq→.rIs

Prueba:

(2)	pIq⊃(rIs)⊃.pIq⊃.pIq∧.rIs	
	σ2⊃.¬(pIq)∨.pIq∧.rIs	
(3)	¬(pIq)⊃.pIq→.rIs	
(4)	pIq∧(rIs)⊃.pIqI.rIs	A381
	σ4⊃.pIq→.rIs	A226
(5)	σ3∨σ4⊃δ3	(3), (4)
	A382	(5), A218

rinf55 pIq⊃.rIs ├ pIq→.rIs (Derivación inmediata a partir del esquema teoremático A382)

rinf55/1 pIq≡.rIs ├ pIqI.rIs (Derivación: rinf55, rinf28, A227)

Corolarios obvios, definicionales, de esas reglas son:

pIq⊃.r→s ├ pIq→.r→s p→q⊃.rIs ├ p→q→.rIs p→q⊃.r→s ├ p→q→.r→s

pIq≡.r→s ├ pIqI.r→s p→q≡.rIs ├ p→qI.rIs p→q≡.r→s ├ p→qI.r→s

Me abstendré de aducir explícitamente, en los pasos deductivos que dé, rinf55 o rinf55/1; ello significa que bastará con aducir, p.ej., un esquema como A228 para entenderlo (por aplicación implícita de rinf55/1) como ⌜p→qI.p∨qIq⌝.

A383 pIq∧(rIs)⊃(p¹Iq¹∧.r¹Is¹)≡.pIq∧(rIs)→p¹Iq¹∧.r¹Is¹

Prueba:

(2) σA383⊃.pIq∧(rIs)⊃.pIq∧.rIs∧.p¹Iq¹∧.r¹Is¹

*σ2⊃.pIq∧(rIs)→.p¹Iq¹∧.r¹Is¹	A376, A239, A224, A226
*σ2⊃.pIq∧(rIs)→.p¹Iq¹∧.r¹Is¹	A379
A383	(2), A218

Conviene observar que en la línea (2) de la prueba de A383 están **implícitamente** supuestas varias líneas deductivas, o sea: varias aplicaciones consecutivas de A376 (y de A199), de A239, de A224 y de A226. Se deja, como ejercicio, al lector el explicitar esos pasos deductivos.

La prueba que se acaba de presentar de A383 hubiéramos podido ahorrárnosla, toda vez que se va a probar ahora mismo un metateorema en virtud del cual ya no haría falta probar A383, pues es un caso particular de lo que va a ser probado con ese metateorema. Pero la he presentado a título de ejercicio o ensayo de lo que ahora mismo voy a demostrar.

Probamos ahora el **metateorema de la equivalencia**, M.E., como sigue: tómense como fórmulas atómicas (en el sentido de fórmulas cuya estructura no nos interesa aquí) únicamente fórmulas equivalenciales (o sea: de la forma ⌜pIq⌝) y combínense en disyunciones y/o conyunciones, e.d. por medio de los functores '∧' y '∨', únicamente; sea ⌜r⌝ un resultado de combinar mediante ocurrencias de los functores '∧' y/o '∨', pero de ningún otro functor, fórmulas equivalenciales cualesquiera; y sea ⌜s⌝ el resultado de efectuar también una combinación de fórmulas equivalenciales cualesquiera (no forzosamente las mismas que hay en ⌜r⌝) mediante ocurrencias de los functores '∧' y/o '∨' (combinaciones que no tienen por qué ser las mismas que las que han dado lugar a ⌜r⌝). Supuesto eso, tenemos:

M.E. 1º r⊃s≡.r→s M.E. 2º r≡s≡.rIs

La prueba se efectúa por inducción matemática. Vamos a probar sólo M.E. 1º, pues M.E. 2º es un corolario inmediato.

Primero, demostraremos el siguiente **Lema**: cualquier combinación de fórmulas equivalenciales que se efectúe sólo mediante ocurrencias de '∧' y/o '∨' es una fórmula ⌜p⌝ tal que es un teorema lo siguiente: ⌜p¹I0∨.p¹I½⌝.

El primer paso de la inducción con que se prueba el Lema es el caso en que ⌜p¹⌝ es, simplemente, una fórmula equivalencial; y tal paso está dado por el esquema A380.

Ahora supongamos que el Lema vale para fórmulas **cualesquiera** que sólo contengan n fórmulas equivalenciales combinadas del modo indicado. Se prueba con facilidad que, siendo ⌜p⌝ y ⌜q⌝ dos fórmulas así, el Lema vale también para ⌜p∨q⌝ y para ⌜p∧q⌝. En efecto, por hipótesis de inducción tenemos:

(2)	pI0∨(pI½)∧.qI0∧.qI½	
(3)	pI0∧(qI0)∨(pI0∧.qI½)∨(pI½∧.qI0)∨.pI½∧.qI½	(2)
(4)	pI0∧(qI0)⊃.p∧qI0	A242
	σ4⊃.p∧qI0∨.p∧qI½	
(5)	pI0∧(qI½)⊃.p∧qI0	A242
	σ4⊃.p∧qI0∨.p∧qI½	
(6)	pI½∧(qI0)⊃.p∧qI0	A242

	σ4⊃.p∧qI0∨.p∧qI½	
(7)	pI½∧(qI½)⊃.p∧qI½	A242
	σ4⊃.p∧qI0∨.p∧qI½	
(8)	p∧qI0∨.p∧qI½	(3), (4), (5), (6), (7)
	Similarmente se prueba (hágalo el lector)	
(9)	p∨qI0∨.p∨qI½	

Así pues, si el Lema vale para fórmulas cualesquiera que sólo contengan hasta n fórmulas equivalenciales combinadas del modo indicado, también vale para una fórmula **cualquiera** que sólo contenga n+1 fórmulas equivalenciales combinadas del modo indicado, ya que cualquier fórmula así, ⌜r⌝, que contenga n+1 fórmulas equivalenciales será el resultado de unir mediante '∧' o mediante '∨' dos fórmulas así, ⌜s⌝ y ⌜s^1⌝, cada una de las cuales sólo contendrá a lo sumo n fórmulas equivalenciales combinadas del modo indicado. Con lo cual queda demostrado el Lema.

Así pues, para cualesquiera fórmulas ⌜r⌝ y ⌜s⌝ que resulten de combinar, de cualquier modo que sea, únicamente mediante ocurrencias de '∧' y/o de '∨' fórmulas equivalenciales arbitrariamente dadas, tenemos:

(22)	rI0∨(rI½)∧.sI0∨.sI½	
(23)	rI0∧(sI0)∨(rI0∧.sI½)∨.(rI½∧.sI0)∨.rI½∧.sI½	(22)
(24)	rI0⊃¬r	A268/1
	σ24⊃.r⊃s∧.r→s	
	σ24⊃.r⊃s≡.r→s	A333
(25)	σ23⊃.r⊃s≡.r→s	(24)
(26)	rI½∧(sI0)⊃.r∧¬s	A242
	σ26⊃.¬(r⊃s)	A325
	σ26⊃.¬(r⊃s)∧¬(r→s)	
	σ26⊃.r⊃s≡.r→s	A334
(27)	rI½∧(sI½)⊃.r⊃s∧.r→s	
	σ27⊃.r⊃s≡.r→s	A333
(28)	δ23⊃.r⊃s≡.r→s	(26), (27)
	r⊃s≡.r→s	(23), (25), (28)

Con lo cual queda probado M.E. 1º, pruebe ahora el lector, a partir de ahí, M.E. 2º.

Y ahora derivamos esta regla de inferencia:

rinf56 Sea ⌜r⌝ el resultado de combinar, de cualquier modo que sea, fórmulas equivalenciales únicamente mediante ocurrencias de '∧' y/o de '∨'; y sea ⌜s⌝ el resultado de combinar fórmulas equivalenciales (no forzosamente las mismas que hay en ⌜r⌝) únicamente mediante ocurrencias de '∧' y/o '∨' (combinación que puede no ser la misma que la de ⌜r⌝); entonces:

r⊃s ⊢ r→s   r≡s ⊢ rIs

(Llamaré 'rinf56' indistintamente a cualquiera de esas dos reglas).

Haré un uso meramente **implícito** de rinf56, de suerte que podremos leer, en adelante, cuando convenga a la prosecución de nuestra empresa deductiva, el esquema A223, p.ej., como ⌜pIq∧(qIr)→.pIr⌝; el esquema A228, como ⌜p→qI.p∨qIq⌝; el esquema A227, como ⌜p→q∧(q→p)I.pIq⌝, etc.

A384 p→q→.q→r→.p→r

Prueba:

(2)	q→r⊃(p→r)⊃.q→r→.p→r	A382
(3)	p→q⊃δ2⊃.p→q→δ2	A382
	A384	A363, (2), (3)

A385 p→q→.r→p→.r→q (Prueba similar)   A386 p→q∧(q→r)→.p→r (Prueba similar)

A387 p→NpI.p→½

Prueba:

(2)	p→Np⊃.p→Np∧(½→p)∨.p→Np∧.p→½	A369
	σ2⊃.p→Np∧(Np→½)∨.p→Np∧.p→½	A364, A371
	σ2⊃.p→½∨.p→½	A363
	σ2⊃.p→½	
(3)	p→½⊃.N½→Np	A364
	σ3⊃.½→Np	A371
(4)	p→½⊃.p→½∧.½→Np	A386
	A387	(2), (4), (+ rinf56)

A388 Np→pI.½→p (Prueba: A387, A364, A371)

A389 p→Np→Np

Prueba:

(2)	p→Np⊃.p→½	A387
	σ2⊃.N½→Np	A364
	σ2⊃.½→Np	A371
(3)	p→Np⊃.p→NpI½∧.½→Np	(2), A376
	σ3⊃.p→Np→½∧.½→Np	A226
	σ3⊃.p→Np→Np	A386
	A389	(3), A379

A390 Np→p→p (Prueba: A389)

A390/1 p→¬p→¬p

Prueba:

(2)	p→¬p⊃.p⊃¬p	A218
	σ2⊃.p→¬p	A361/2
	A390/1	(2), rinf56

A390/2 $\neg p\to p\supset p$

Prueba:

(2)	$\neg p\to p\supset.\neg p\supset p$	A218
	$\sigma2\supset p$	A212/2

A389, A390, A390/1 y A390/2 son principios de abducción (o de *consequentia mirabilis*, como algunos denominan —un poco ridículamente— a la abducción). Los dos primeros son principios implicacionales de abducción para la negación débil; el tercero es un principio implicacional de abducción para la negación fuerte; el cuarto es un principio mixto de abducción para la negación fuerte; nótese que el esquema $\ulcorner\neg p\to p\to p\urcorner$ no es, en absoluto, válido (de ser añadido, como esquema axiomático, a *Aj*, daría por resultado un sistema delicuescente, incoherente). Por ello, cuando, en el capítulo 8º, anuncié la prueba de estos principios de abducción (con ocasión de comentar dos principios condicionales —en vez de implicacionales— para la negación fuerte, a saber: A212/1 y A212/2), dije que, en este capítulo en que ahora estamos, demostraría **un** principio implicacional de abducción para la negación fuerte (A390/1), junto con los dos principios implicacionales de abducción para la negación débil y junto con el principio mixto A390/2. (Más adelante —en la págª 108— demostraré unas versiones **reformadas** de A390 —a saber: A517— y de A389 —a saber: A518). Los principios A389 y A390 serán comentados en el próximo capítulo, donde también diré algunas palabras sobre los principios de abducción en general.)

A391 $N(pIp)\to.pIp$ (Prueba: A226, A370)

A392 $½\to p\vee.½\to Np$

Prueba:

(2)	$½\to p\vee.N½\to Np$	A369, A364
	A392	(2), A371

A394 $p\to(q\vee r)I.p\to q\vee.p\to r$

Prueba:

(2)	$p\to q\supset.p\to.q\vee r$	A363
(3)	$p\to r\supset.p\to.q\vee r$	igualmente
(4)	$\sigma2\vee\sigma3\supset\delta2$	(2), (3)
(5)	$\sigma2\vee\sigma3\to\delta2$	(4), rinf56
(6)	$q\vee rIq\vee.q\vee rIr$	A377
(7)	$q\vee rIq\supset.p\to(q\vee r)I.p\to q$	
(8)	$q\vee rIr\supset.p\to(q\vee r)I.p\to r$	
(9)	$\delta7\vee\delta8$	(6), (7), (8)
(22)	$p\to(q\vee r)\supset(p\to q)\vee.p\to(q\vee r)\supset.p\to r$	(9)
(23)	$p\to(q\vee r)\supset.p\to q\vee.p\to r$	(22)
(24)	$p\to(q\vee r)\to.p\to q\vee.p\to r$	(23), rinf56

A393 $pIq\to r\vee.pIq\to Nr$

Prueba:

(2)	$pIq\supset.pIqI½$	A376
	$\sigma2\supset.pIq\to r\vee.pIq\to Nr$	A392, rinf52
(3)	$\neg(pIq)\supset.pIq\to r\wedge.pIq\to Nr$	
	$\sigma3\supset.pIq\to r\vee.pIq\to Nr$	
	A393	(2), (3)

A395 $p\to(q\wedge r)I.p\to q\wedge.p\to r$

Prueba:

(2)	$p\to(q\wedge r)\supset.p\to q$	A363
(3)	$p\to(q\wedge r)\supset.p\to r$	A363
(4)	$\sigma2\supset.\delta2\wedge\delta3$	(2), (3)
(5)	$\sigma2\to.\delta2\wedge\delta3$	rinf56, (4)
(6)	$pI(p\wedge q)\wedge(pI.p\wedge r)\supset.p\wedge qI(p\wedge r)\wedge.pI.p\wedge r$	A224
	$\sigma6\supset.p\wedge q\wedge rI(p\wedge r)\wedge.pI.p\wedge r$	
	$\sigma6\supset.p\wedge q\wedge rIp$	A224
	$\sigma6\supset.p\to.q\wedge r$	
(7)	$\sigma6\to.p\to.q\wedge r$	(6), rinf56
	A395	(5), (7), A227

	A394	(5), (24), A227

A396 p∧q→rI.p→r∨.q→r

Prueba:

(2)	p→r⊃.p∧q→r	A363
(3)	q→r⊃.p∧q→r	A363
(4)	σ2∨σ3⊃.p∧q→r	(2), (3)
(5)	σ4→δ4	(4), rinf56
(6)	p∧qIp⊃.p→r⊃.p∧q→r	
(7)	p∧qIq⊃.q→r⊃.p∧q→r	
(8)	δ6∨δ7	(6), (7), A369
(9)	p→r∨(q→r)⊃.p∧q→r	(8)
(22)	σ9→δ9	(9), rinf56
	A396	(22), (5), A227

A397 p∨q→rI.p→r∧.q→r

Prueba:

(2)	p∨q→r⊃.p→r	A363
(3)	p∨q→r⊃.q→r	A363
(4)	σ2⊃.p→r∧.q→r	(2), (3)
(5)	σ4→δ4	(4), rinf56
(6)	p∧rIr∧(q∧rIr)⊃.p∨q∧rI.r∨r∧r	A239
	σ6⊃.σδ6Ir	
(7)	p→r∧(q→r)→.p∨q→r	(6), rinf56
	A397	(5), (7), A227

A398 pIq→(q^{1}Ir→.sIp^{1})→.q^{1}Ir→.pIq→.sIp^{1}

Prueba:

(2)	q^{1}Ir→(sIp^{1})→.q^{1}Ir⊃.sIp^{1}	
(3)	pIq→σ2⊃.pIq⊃σ2	
	σ3⊃.pIq⊃δ2	(2)
	σ3⊃.q^{1}Ir⊃.pIq⊃.sIp^{1}	
(4)	pIq⊃(sIp^{1})⊃.pIq→.sIp^{1}	M.E.1º
(5)	q^{1}Ir⊃σ4⊃.q^{1}Ir⊃δ4	(4)
	σ5⊃.q^{1}Ir→δ4	M.E.1º
(6)	σ3⊃σ5	(3)
	σ6⊃δ5	(5)
	A398	(6), M.E.1º

A398/1 ½IN½I½ (Prueba: A371, A372)

A398/2 ½IN½IN(½IN½) (Prueba: A371, A378)

A398/3 ½I½IN½ (Prueba: A371, A372)

A399 p→(q→r)→.p→q→.p→r

Prueba:

(2)	p∨qIq⊃.p→(q→r)⊃.p→.p∨q→r	
(3)	p∨q→r→.p→r	A363

(4)	$p\rightarrow\sigma3\supset.p\rightarrow\delta3$	A363, (3)
	$\sigma4\supset.p\supset\delta3$	
	$\sigma4\supset.p\rightarrow r$	A379
(5)	$\delta\delta2\supset.p\rightarrow r$	(4)
(6)	$\sigma2\supset.p\rightarrow(q\rightarrow r)\supset.p\rightarrow r$	(2), (5)
(7)	$p\rightarrow(q\rightarrow r)\supset.p\rightarrow q\supset.p\rightarrow r$	(6), A228
	$\sigma7\supset.p\rightarrow q\rightarrow.p\rightarrow r$	M.E.1º
	A399	(7), rinf56

A400 $p\rightarrow q\rightarrow.p\rightarrow(q\rightarrow r)\rightarrow.p\rightarrow r$ (Prueba como la de A339 hasta la línea 6, + A228 + rinf56)

A401 $r\rightarrow s\rightarrow.p\rightarrow(q\rightarrow r)\rightarrow.p\rightarrow.q\rightarrow s$

Prueba:

(2)	$r\rightarrow s\rightarrow.q\rightarrow r\rightarrow.q\rightarrow s$	A385
(3)	$\delta2\rightarrow.p(q\rightarrow r)\rightarrow.p\rightarrow.q\rightarrow s$	A385
	A401	(2), (3), A363

A402 $p\rightarrow q\rightarrow.Np\vee q$

Prueba:

(2)	$p\rightarrow q\rightarrow Nq\vee.p\rightarrow q\rightarrow q$	A393
(3)	$p\rightarrow q\rightarrow.Nq\vee q$	(2), A394
(4)	$p\vee qIq\supset.p\rightarrow q\rightarrow.Np\wedge Nq\vee q$	(3)
	$\sigma4\supset.\sigma\delta4\rightarrow.Np\vee q\wedge.Nq\vee q$	
	$\sigma4\supset.\sigma\delta4\rightarrow.Np\vee q$	A363
	A402	A228, (4), A379

Nótese que, en la línea 4 de la prueba de A402, he recurrido al siguiente expediente: la apódosis del primer renglón de esa línea o paso deductivo es una fórmula implicacional, a saber: $\ulcorner p\rightarrow q\rightarrow.Np\wedge Nq\vee q\urcorner$. Pero la apódosis de esa fórmula implicacional (o sea: $\ulcorner Np\wedge Nq\vee q\urcorner$) implica a $\ulcorner Np\vee q\wedge.Nq\vee p\urcorner$ (lo cual quiere decir que es teoremático —como se deduce facilísimamente de esquemas ya probados y que, a estas alturas, damos por supuestos— el esquema implicacional: $\ulcorner Np\wedge Nq\vee q\rightarrow.Np\vee q\wedge.Nq\vee q\urcorner$); y, así, en virtud de A363, $\ulcorner p\rightarrow q\rightarrow.Np\wedge Nq\vee q\urcorner$ entraña $\ulcorner p\rightarrow q\rightarrow.Np\vee q\wedge.Nq\vee q\urcorner$. Eso nos permite pasar del primero al segundo renglón del paso 4, como si colocáramos un '$\rightarrow$' debajo de otro: y el mismo procedimiento viene empleado para pasar del segundo al tercer renglón de ese paso. En general, podemos formar con respecto a '$\rightarrow$' cadenas deductivas similares a las que cabe formar con respecto a 'I', a '$\supset$' y a '$\equiv$'; no sólo cuando '$\rightarrow$' es el functor central de una línea, sino también cuando está en la apódosis de una línea cuyo functor central es, o bien '$\supset$' (ello en virtud de A363) o '$\rightarrow$' (en virtud de A384); y también cuando está en la apódosis de una apódosis (en virtud de A180, cuando el functor condicional que figura es '$\supset$'— y de A401 —cuando el functor condicional que figura es '$\rightarrow$').

A403 $p\rightarrow q\rightarrow N(p\wedge Nq)$ (Prueba: A402, A106)

A404 $pIq\rightarrow N(r\wedge Nr)$ (Prueba: A393, A394)

A405 $r\wedge Nr\rightarrow N(pIq)$ (Prueba: A404, A365)

A406 $p\rightarrow q\rightarrow.p\wedge r\rightarrow q$ (Prueba: A384)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 14º.— EL PRINCIPIO DE HERÁCLITO

Voy a comentar algunos de los esquemas demostrados en el capítulo anterior. El esquema A369 muestra que el functor de implicación de *Aj* no es un functor «relevante», e.d. no refleja lo que los lógicos relevantistas llaman *entailment*, ya que el *entailment* excluye esquemas como A369. Podemos llamar a A369 'principio de la total ordenación implicativa', pues lo que nos dice es que, dados dos hechos cualesquiera, es afirmable con verdad que, o bien el primero es a lo sumo tan real como el segundo, o bien el primero es por lo menos tan real como el segundo. (Eso —¡nótese bien!— no es lo mismo que decir que, dados dos hechos cualesquiera, o bien es afirmable con verdad que el primero es a lo sumo tan real como el segundo, o bien es afirmable con verdad que el primero es por lo menos tan real como el segundo; y es que el operador 'Es afirmable con verdad que' no se distribuye —según cabe demostrar a partir de resultados que veremos más abajo [en el cap. 26º, pág^{as} 136ss]— con respecto a la disyunción.) Conviene observar, asimismo, que un esquema disyuntivo como A369 no está diciendo que se excluyan los dos disyuntos. ¡Ni mucho menos! En ciertos casos, sí se excluirán totalmente, pero en otros casos no. Así, p.ej., si el hecho de que p es, en determinado aspecto de lo real, tan verdadero como el de que q, entonces, en ese aspecto, tanto $p \rightarrow q$ como $q \rightarrow p$ son verdaderos ambos. (Lo propio sucede con el principio simple de tercio excluso, A265: ⌜Np∨p⌝ excluye sólo una situación en la que no sea verdad, en absoluto, que no-p, y tampoco sea verdad, en absoluto, que p; pero no excluye del todo situaciones en las cuales son verdaderos, a la vez —en uno u otro grado— tanto ⌜p⌝ como ⌜no p⌝). Como instancia de A369 tomemos ésta:'O bien Enrique II es a lo sumo tan traicionero como Fernando VII, o bien Enrique II es por lo menos tan traicionero como Fernando VII'.

El esquema A370 —al cual podríamos denominar '**principio de Heráclito**'— es el segundo miembro conyuntivo del esquema axiomático A05; es, de entre los esquemas teoremáticos de *Aj*, uno de los que más susceptibles son de provocar desacuerdo por parte de los adeptos de otros enfoques, y más concretamente de los que se aferran a la lógica clásica como sistema perfecto e incompletable en el plano del cálculo sentencial (por lo cual rechazan cualquier functor que no sea '¬', '∨' o uno de los definibles a partir de esos dos; entre los functores por ellos rechazados figuran, pues, I, N, •, B —salvo si se interpreta éste último como un operador modal— y los definibles con ayuda de 'a'). A370 dice que cada autoequivalencia es tan verdadera como falsa. Se puede argumentar a favor de tal principio de varios modos: de un lado, haciendo ver su plausibilidad propia; y, de otro, probando que se puede demostrar como consecuencia de otros principios cuya intrínseca plausibilidad es menos discutida. Argumentos ontológicos a favor de que cada autoequivalencia es menos discutida. Argumentos ontológicos a favor de que cada autoequivalencia es tan verdadera como falsa pueden encontrarse en diferentes trabajos del autor de este libro. El central de esos argumentos es que la equivalencia, siendo una relación, implica alguna alteridad, por lo cual nunca puede ser **del todo** verdadera; si se trata de dos cosas, no debe haber entre ellas **total** equivalencia; y si las «dos» resultan ser una misma, como —siendo una relación— la equivalencia implica alteridad, tampoco puede haber, entre la cosa y sí misma, total equivalencia, por no poder haber total alteridad en ese caso.

Aparte ya de ese punto de vista, cabe demostrar que *Aj* es equivalente (o, mejor dicho, **idéntico**) a un sistema Aj^1, que sólo difiera de *Aj* en contener, en lugar de A370, postulada como esquema axiomático o como miembro conyuntivo de un esquema axiomático, la conyunción de A389, A371 (siendo '½' una constante sentencial tomada entonces como símbolo primitivo), A373 y A391. Pero estos cuatro últimos esquemas parecen mucho más irrefragables (aunque no existe nada absolutamente irrefragable, o dotado de una evidencia inconcusa o irrebatible por completo).

El esquema A389 es un principio implicacional de abducción para la negación débil: el que un hecho implique a su negación (simple o débil) implica la verdad de esa negación; con otras palabras:

el ser implicada la negación (débil) de algo por ese algo implica que esa negación es verdadera: que sea a lo sumo tan verdadero como falso que p implica que no es verdad que p. Es un principio bastante obvio, si bien lo obvio, en lógica como en cualquier otra disciplina científica, es relativo a cuál sea el horizonte presuposicional o de intelección de que parta cada una (su haber o bagaje intelectual, su formación, etc.). En general, la aceptación o el rechazo de principios de abducción constituye una piedra de toque para saber si se postula una concepción determinista-alética o indeterminista-alética de lo real. El determinismo alético nos dice que todo está aléticamente determinado, que cada hecho tiene, en cualquier aspecto de lo real que se tome, un determinado valor de verdad (lo que significa que, o bien tiene, en ese aspecto, un determinado grado de verdad —o bien ambos tienen grados de verdad determinados, en ese aspecto); y los grados de verdad son grados de verdad, son verdaderos, no ajenos tanto a la verdad como a la falsedad (si bien, eso sí, todos los grados de verdad, salvo el máximo, son, además, grados de falsedad). El indeterminismo alético sostiene que hay hechos que carecen por completo de verdad y cuyas negaciones también carecen por completo de verdad; o bien no tienen, en cierto aspecto, ningún contenido de verdad, o bien tienen algún valor de verdad que es inferior a 'la verdad' (a lo totalmente verdadero), valor que, sin embargo, no es verdadero, no es un grado **de verdad**, pues —dicen esos indeterministas aléticos, cegados por el principio del maximalismo alético— sólo lo que es ciento por ciento verdadero es verdadero a secas. Entre los indeterministas aléticos del primer tipo se hallan los intuicionistas como Heyting y Dummett (cuyo punto de vista se explica por el idealismo o subjetivismo que los anima: ser real o verdadero es serlo para un sujeto, ser comprobable o constatable por el sujeto, por mí; y hay cosas tales que ni puedo yo constatar que sean verdaderas ni puedo constatar que sean falsas; luego —dado el supuesto idealista— no son, en absoluto, ni verdaderas ni falsas). Entre los indeterministas aléticos del segundo tipo se halla Łukasiewicz; la diferencia entre ambas modalidades de indeterminismo alético son quizá de presentación, pues el enfoque que articula formalmente Gödel, en sus lógicas multivalentes, está estrechísimamente emparentado con el intuicionismo (el sistema infinivalente de Gödel es apenas una extensión del sistema intuicionista, con unos pocos teoremas suplementarios no tan alejados del espíritu básico intuicionista) y, sin embargo, es una concepción de muchos valores de verdad, o sea: afín —en este punto, fundamental— al enfoque łukasiewicziano.

Todos esos indeterminismos aléticos repudian el principio de tercio excluso débil, en todas sus variantes. Además, repudian también, en general, los principios de abducción. Los sistemas de Łukasiewicz, que sólo contienen negación débil, repudian cualquier principio de abducción; los sistemas de Heyting (y el intuicionismo), que sólo contienen negación fuerte, admiten lo que, en tales sistemas, corresponde o bien a A212/1, o bien a A390/1 (esos sistemas no contienen más que un único functor condicional, que no corresponde exactamente ni a '$\supset$' ni a '$\rightarrow$', si bien sí cabe definir a ese functor, '$\supset$' dentro de *Aj*, como sigue: $\ulcorner p\supset q\urcorner$ eq $\ulcorner L(p\rightarrow q)\lor q\urcorner$; vid. el Apéndice de esta Sección I; de añadirse a esos sistemas —lo cual sería factible— una negación débil, ningún principio de abducción sería válido para tal negación —en esos sistemas).

Frente a esos indeterminismos aléticos, el determinismo alético (no maximalista —a diferencia de la lógica clásica, en su lectura habitual) que anima al sistema *Aj* postula todas las modalidades del principio de abducción, salvo $\ulcorner\neg p\rightarrow p\rightarrow p\urcorner$; que éste último es inválido se ve por lo siguiente: supongamos un $\ulcorner p\urcorner$ que sea verdadero pero en medida de menos del 50%; entonces $\ulcorner\neg p\urcorner$ es del todo falso y, por lo tanto, es verdadera la implicación del hecho de que p por el de que ¬p (en medida del 50%, en virtud del principio de Heráclito de que cualquier equivalencia —y, por ende, también cualquier implicación—, si es verdadera, lo es en medida de 50%, e.d. tan verdadera como falsa); pero, entonces, es de todo punto falso que la implicación del hecho de que p por el de que ¬p (por la total carencia de verdad del hecho de que p) implique al hecho de que p, el cual es —por hipótesis— verdadero sólo en medida inferior al 50%, e.d. bastante falso —pese a no ser del todo falso; y sólo se da implicación cuando lo implicante es **a lo sumo** tan verdadero o real como lo implicado. Pero son válidas todas las demás versiones del principio de abducción: A212/1 y A212/2 (cap. 8º); A273/2 y A273/2 (cap. 10º); A389, A390, A390/1 y A390/2 (cap. 13º) y hasta versiones reforzadas de A389 y A390, a saber: A518 y A517.

Al propugnar la validez de los principios de abducción —sobre los cuales tuvimos ya ocasión de hablar en el cap. 8º— el sistema *Aj* se revela, en este punto, de inspiración similar a la de la lógica clásica y también a la de otros sistemas no clásicos, como las lógicas relevantes o los sistemas *C* de da Costa; las lógicas relevantes y las de da Costa son —al igual que *Aj*— paraconsistentes, e.d. tales que contienen determinado functor de negación (negación débil) para el cual no valen ni el silogismo disyuntivo ni, por ende, tampoco el principio de Cornubia. La inspiración común es el determinismo alético —en el cual, empero, son inconsecuentes los relevantistas.

La diferencia entre el enfoque dialéctico de *Aj* y esos otros enfoques (relevantista, clásico y de da Costa) estriba en la aceptación de grados en la verdad que son —a diferencia de los grados aléticos de Łukasiewicz o de Gödel— grados **de verdad**, valores **designados** (en jerga técnica, o sea: **verdaderos**); de ahí que *Aj* rechace el maximalismo alético común a todos los enfoques aquí criticados (desde la lógica clásica hasta los sistemas relevantes y de da Costa, pasando por los de Łukasiewicz y Gödel y por el intuicionismo), e.d. el prejuicio de que sólo es verdadero o real (a secas) lo que sea totalmente verdadero, e.d. tan verdadero que ya no pueda cosa alguna ser más verdadera.

En nuestro enfoque dialéctico (u ontofántico —como también lo he denominado en otros trabajos de investigación), si un hecho es lo suficientemente falso como para entrañar (o, respectivamente, implicar) a su negación (fuerte o débil), ésta es, entonces, verdadera; y, si un hecho es lo suficientemente verdadero como para ser entrañado (o, respectivamente, implicado) por su negación (fuerte o débil), entonces el hecho es verdadero; porque, aun cuando suceda que su negación débil sea, también ella, verdadera (o sea: aun cuando suceda que el hecho sea falso), eso no forzosamente excluye del todo que el hecho sea, a la vez, verdadero, toda vez que no se requiere, para ser verdadero o real, serlo totalmente.

Sigamos comentando ahora los principios que se postularían en *Aj¹* en reemplazamiento de A370 (principios que son, todos ellos, válidos demostrablemente en *Aj*). El esquema A371 nos dice, para la constante sentencial '½', que lo por ella designado es tan verdadero como falso. Claro, en el marco de nuestro sistema, y dada la definición propuesta de '½' (df11), ello se prueba por definición a partir de A370; pero en sistemas que no contengan como esquema axiomático el discutible A370, puede tomarse '½' como una constante cualquiera que designe a un hecho arbitrariamente tomado que sea tan verdadero como falso, tan real como irreal; puede ser tal hecho la victoria de Pirro en la batalla de Ásculo, o sea: el ser verdad que salió Pirro victorioso en tal batalla; o, p.ej., si es verdad —como sin duda lo es de algunas personas— de alguien, digamos de un tal Amando, que está sano y enfermo en la misma medida, en medida de un 50%, entonces cabe tomar como referente arbitrario de '½' el estar enfermo Amando. Tomando como referente de '½' a cualquier hecho así, entonces cabe decir que lo mentado por esa constante es tan verdadero como falso, que es real e irreal en la misma medida, ni más lo uno ni más lo otro.

El esquema A373 nos dice que cada autoequivalencia es equivalente a cualquier otra equivalencia; y es que la autoequivalencia es autoequivalente, sean cuales fueren los hechos involucrados. Por cual cualesquiera dos autoequivalencias son mutuamente sustituibles sin desmedro de la verdad.

A391 dice que cada autoequivalencia es por lo menos tan verdadera como falsa (o: a lo sumo tan falsa como verdadera); es un principio al cual seguramente nadie opondrá reparos. En otro caso, quienes objeten A370 lo harán, no porque objeten A391, que es la mitad de lo que dice A370, sino porque objeten justamente la otra mitad; a saber: que cada autoequivalencia es por lo menos tan falsa como verdadera.

Ahora bien, es facilísimo probar que un sistema *Aj¹*, resultante de *Aj* sin más que quitar la definición df11, tomando '½' como símbolo primitivo, y sustituyendo en A05, como miembro conyuntivo, A370 por la conyunción de A389, A371, A373 y A391, es idéntico a *Aj*, o sea: tiene exactamente los mismos teoremas. He aquí la prueba. En *Aj¹* se prueban inmediatamente los teoremas A371, A389, A373 y A391. A partir de los cuales se deduce A370, como sigue:

(2)	½→N½→N½	A389
(3)	½→½→½	(2), A371
(4)	½I½→½	(3), df14
(5)	½→N(½I½)	(4), A364, A371
	σ5→.½I½	A391, A384
(6)	½I½I½	(4), (5), rinf28, A227
(7)	pIpI.½I½	A373
	σ7I½	(6)
(8)	N(pIp)IN½	(7)
	σ8I½	A371
(9)	pIpI½∧.N(pIp)I½	(7), (8)
	pIpIN(pIp)	(9), A224

Si, en Aj^1, no hubiéramos postulado A391 como parte de un esquema axiomático, todo lo que hubiéramos podido demostrar sería una mitad de la conclusión (o sea: de A370), a saber: lo inverso de A391, e.d. ⌜pIp→N(pIp)⌝: cada autoequivalencia es a lo sumo tan verdadera como falsa.

De otro lado, el mismo resultado (la demostración de A370 como un esquema teoremático) puede obtenerse en un sistema Aj^2 resultante de *Aj* mediante la eliminación de df11 (tomando de nuevo '½' como símbolo primitivo), y reemplazando a A370 como miembro conyuntivo de A05, por la conyunción de A371, A373, A391 y A403; (la diferencia entre Aj^1 y Aj^2 estriba, pues, en que, mientras que en Aj^1 se postula, axiomáticamente, A389, en Aj^2 se postula A403, en lugar de A389). He aquí la prueba (que consiste en probar que en Aj^2 es un esquema teoremático —demostrable, pues— A370):

(2)	½→½→N(½∧N½)	A403
	σ2→N(½∧½)	A371
	σ2→½	A371
(3)	½I½→½	(2)
(4)	pIp→.½I½	A373
	σ4→½	(3)
(5)	½→N(pIp)	(4), A364, A371
	σ5→.pIp	A391
(6)	pIpI½	(4), (5), A227
(7)	N(pIp)IN½	(6)
	σ7I½	A371
	pIpIN(pIp)	(6), (7)

De nuevo cabe demostrar que, de no contener, postulado axiomáticamente, A391, Aj^2 contendría, de todos modos, como esquema teoremático lo inverso de A391, a saber: ⌜pIp→N(pIp)⌝; y es **esto** lo que está de veras en discusión.

La plausibilidad de Aj^2 estriba en cuán plausible sea A403; se denomina a este esquema ‘principio de contraejemplo’, y es aceptado (con el operador de *entailment* en el lugar del functor de implicación) hasta por lógicas relevantes; una instancia de A403 es: El que sea Bardulfo a lo sumo tan educado como Sulpicio implica que no es verdad lo siguiente: que Bardulfo sea educado y Sulpicio no lo sea. Como A403 es estrictamente equivalente a A402 (al que también se denomina ‘principio de contraejemplo’), vale la pena exponer una instancia de A402: El que el Museo del Louvre sea a lo sumo tan interesante como el British Museum implica que, o no es interesante el Museo del Louvre, o sí es interesante el British Museum. (Señalemos, no obstante, que, pese a su enorme plausibilidad, el principio de contraejemplo no es teoremático en todas las lógicas; no lo es, en particular, en aquellos cálculos que rechazan el principio de tercio excluso, como los sistemas multivalentes de Łukasiewicz y de Gödel, y como el cálculo intuicionista de Heyting; pero quienes admiten el principio de tercio excluso parecen abocados a reconocer la verdad de cada instancia del principio de contraejemplo.)

Todavía cabe idear otros sistemas idénticos a *Aj*, Aj^1, y Aj^2; p.ej. Aj^3, que difiere de Aj^2 por contener, postulado axiomáticamente, en vez del principio de contraejemplo (A403), al principio inverso de abducción, o sea:

A389/1 p→N(p→Np) (Prueba: A389, A365)

La prueba que se brinda vale, claro está, dentro de *Aj*; en Aj^3 A389/1 sería un miembro conyuntivo de un esquema axiomático, y de él se deduciría A389 y luego, de A389, junto con A371, A373, A391 y los axiomas incambiados de *Aj*, se deduciría el discutido A370.

La plausibilidad de Aj^3 radica en la del principio inverso de abducción; ahora bien, este principio es aceptado por los sistemas de lógica no clásica actualmente en boga (como las lógicas relevantes) —y por la lógica clásica también, si identificamos ‘→’ con ‘⊃’ y ‘N’ con ‘¬’, pues la lógica clásica sólo contiene un único condicional y una única negación. Pero, aparte de ese argumento de autoridad, cabe señalar, a favor del principio inverso de abducción, que es aducido, corrientemente como premisa de muchos de nuestros razonamientos usuales (e.d., que son aducidas, en tales razonamientos, instancias del mismo). Veamos un par de instancias: Bruno es testarudo a lo sumo en la medida en que no sea verdad que su testarudez es, a lo sumo, tan real como su no testarudez; Araceli está gorda a lo sumo en la medida en que su delgadez no sea igual o mayor que su gordura (identificando ‘Araceli está delgada’ con ‘Araceli no está gorda’).

Otro sistema más sería Aj^4, que diferiría de *Aj* en contener, postulado como miembro conyuntivo del esquema axiomático A05, en vez de A370 a la conjunción de A371 (tomándose ‘½’ como símbolo primitivo, e.d. suprimiéndose df11), A391 y el **principio de distinción**, P.D., e.d. el siguiente esquema:

r∧Ns→N(pIq)

donde ⌜s⌝ difiere de ⌜r⌝ sólo por la sustitución de una ocurrencia de ⌜p⌝ por una ocurrencia de ⌜q⌝. En Aj^4 se demuestra A370 como sigue:

(2)	p∨½∧½∧N(p∨½∧½)→N(pIp	P.D.
(3)	p∨½∧½I½	
(4)	N(p∨½∧½)IN½	(3)
	σ4I½	A371
(5)	σ2I½	(3), (4)
(6)	½→N(pIp)	(2), (5)
(7)	pIp→N½	(6), A365
	σ7→½	A371
(8)	½→(pIp)	(6), A391, A363

(9)	½I.pIp	(7), (8), A227
(22)	N(pIp)IN½	(9)
	σ22I½	A371
	pIpIN(pIp)	(9), (22)

Como se ve, Aj^4 es más económico que Aj^1, que Aj^2 y también que Aj^3, si bien es menos económico que *Aj*; la diferencia entre Aj^4, por un lado y Aj^1, Aj^2 y Aj^3, por otro, estriba en que, en Aj^4, el esquema A373 no está postulado axiomáticamente (o sea: no es un miembro conyuntivo de ningún esquema axiomático), aunque sí se demuestra como esquema teoremático.

La plausibilidad de Aj^4 radica en la del principio de distinción —que, dicho sea de paso, es un metateorema demostrablemente válido en *Aj*. Ahora bien, este principio es plausibilísimo: sean «dos» hechos (que serán, efectivamente, dos, en sentido estricto, sólo si son diferentes, pero de los cuales no nos interesa, de momento, saber si son diferentes o si son un solo y mismo hecho); el que sea verdadera, respecto del primer hecho, determinada situación o característica y sea falsa, respecto del segundo, la misma situación o característica (o quizá mejor dicho: la situación o característica correspondiente) implica la no equivalencia del primer hecho con el segundo; no-equivalencia —¡entiéndase bien!— que de ningún modo es una falta **total** de equivalencia, sino, lisa y llanamente, eso: una no verdad (que bien puede que sea parcial, como efectivamente lo es cuando los dos hechos son equivalentes) de la equivalencia entre ambos.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 15º.— EL PRINCIPIO DE BOECIO; CRÍTICA DEL CONEXIVISMO

Voy a presentar otro sistema más, Aj^5, que es el equivalente a *Aj* y en el cual, sin embargo, no está postulado axiomáticamente el principio de Heráclito, e.d. A370, si bien se demuestra, en Aj^5, que ese esquema es válido, e.d. es teoremático. El sistema Aj^5 tiene como base la misma que *Aj* con la salvedad siguiente: en A05 se sustituye, como miembro conyuntivo, A370 por la conyunción de A373, A391 y A389/2, que vamos a ver en seguida. Voy primero a demostrar A389/2 en *Aj*:

A389/2 p→q→N(p→Nq)

Prueba:

(2)	p→Nq⊃.p→NqI½	A376
	σ2⊃.N(p→Nq)I½	A371
(3)	p→q⊃.p→qI½	A376
(4)	σ2⊃.σ3⊃.p→qI½∧.N(p→Nq)I½	(2), (3)
	*σ4⊃.p→qIN(p→Nq)	A223

$*\sigma4\supset.p\rightarrow q\rightarrow N(p\rightarrow Nq)$ A226

(5) $\sigma2\supset\delta\delta4$ A379, (4)

(6) $\neg\sigma2\supset.p\rightarrow q\rightarrow N\sigma2$ A230

A389/2 (5), (6)

El esquema A389/2 se denomina ‘principio de Boecio’, y nos dice que, en la medida en que sea verdad que algo implica a otra cosa, en esa medida por lo menos no es verdad que ese mismo algo implique a la negación de dicha cosa. Una instancia del principio de Boecio es ésta: El que Marcelino sea a lo sumo tan suspicaz como Remigio implica que la suspicacia de Marcelino no es a lo sumo tan real como la falta de suspicacia de Remigio. Un corolario que se deduce inmediatamente del principio de Boecio (en verdad, otra formulación alternativa del mismo principios) es A389/3:

A389/3 $p\rightarrow q\rightarrow N(q\rightarrow Np)$ (Prueba: A389/2, A365)

Otra formulación alternativa del principio de Boecio es ésta:

A389/4 $p\rightarrow q\rightarrow N(Np\rightarrow q)$

Prueba:

(2) $Nq\rightarrow Np\rightarrow N(Np\rightarrow NNq)$ A389/3

$\sigma2\rightarrow N(Np\rightarrow q)$

A389/4 (2), A364

Una instancia de esta tercera formulación (A389/4) del principio de Boecio es la siguiente: El que sea Guiomar por lo menos tan mañosa como Aurora implica que no es verdad que Guiomar sea por lo menos tan mañosa como torpe es Aurora (si identificamos ‘Aurora es torpe’ con ‘Aurora no es mañosa’).

Una instancia de la otra alternativa del principio de Boecio (A389/3) es la siguiente: El que sea Cicerón a lo sumo tan elocuente como Demóstenes implica que no es verdad que la elocuencia de Demóstenes sea a lo sumo tan real como la falta de elocuencia de Cicerón.

Del principio de Boecio se deduce este otro corolario, llamado ‘principio de Aristóteles’:

A389/5 $N(p\rightarrow Np)$ (Prueba: A389/2, A226, A104)

Una instancia del principio de Aristóteles es ésta: No es verdad que la crueldad de Alejandro Magno implique la no crueldad de Alejandro Magno.

En Aj^5 se demuestra A370 como sigue:

(2) $0\rightarrow1\rightarrow N(0\rightarrow N1)$ (Principio de Boecio)

$\sigma2\rightarrow N(0\rightarrow0)$

(3) $0\rightarrow1I.0\wedge1I0$ df14

$\sigma3I.0I0$ A147

(4) $0I0\rightarrow N(0\rightarrow0)$ (3), (2)

$\sigma4\rightarrow N(0I0)$ df14

(5) $0I0IN(0I0)$ (4), A391, A227

(6) $pIpI(0I0)\wedge.pIpIN(0I0)$ A373, (5)

(7) $pIpI(0I0)\wedge.N(pIp)I.0I0$ (6)

pIpIN(pIp) (7), A224

Es, además, sumamente importante —y vale la pena recalcarlo— que Aj^5 no contiene, postulado axiomáticamente, A371 (e.d., en Aj^5 no aparece A371 como conyunto de ningún esquema axiomático). Pero sí se mantiene, en Aj^5, la definición de '½', e.d. df21; por lo cual, en Aj^5, se demuestra A371, inmediatamente, a partir de A370. Con ello se ha probado que hay principios **independientemente** plausibles y apuntalables con argumentos no muy fácilmente desechables, concretamente el principio de Boecio (y los otros esquemas axiomáticos de Aj^5) que, aun sin postularse axiomáticamente a la vez A371 (la existencia de un hecho que sea **tan** real o verdadero **como** irreal o falso), conducen a la demostración, como esquema teoremático, tanto de A370 como de A371.

La plausibilidad de Aj^5 radica en la del principio de Boecio. (La atribución del principio a Boecio es, desde luego, problemática; ciertamente hay un pasaje de Aristóteles que parece sugerir algo parecido a la formulación A389/4, y que es, en todo caso, interpretado así por Łukasiewicz, con la salvedad de que, en vez de destino de la implicación, se ventila en la interpretación łukasiewicziana de ese pasaje el del mero entrañamiento, del 'si… entonces'; el texto del propio Aristóteles no impone esa interpretación. Se han aducido también textos de Boecio y de Crisipo.)

El principio de Boecio y su corolario, el de Aristóteles, han sido defendidos por los lógicos conexivistas contemporáneos, de los cuales ya se habló más arriba [en el cap.7º, pág[as] 48ss]. La dificultad estriba, empero, en que, como esos lógicos —Storrs McCall y otros— no distinguen —como tampoco lo hacen los clasicistas, ni los relevantistas— entre mero condicional o entrañamiento, por un lado, e implicación, por otro, al defender el principio de Boecio están defendiendo el esquema siguiente: «Si es verdad que p sólo si q, entonces es falso que: p sólo si no-q». Ahora bien, es insostenible ese esquema (en notación simbólica: $\ulcorner p\supset q\supset N(p\supset Nq)\urcorner$ o bien —dado que esos autores, lo mismo que los clasicistas, desconocen la diferencia entre negación fuerte y negación débil— $\ulcorner p\supset q\supset\neg(p\supset\neg q)\urcorner$. Y es insostenible por lo que en capítulos anteriores estuvimos indicando acerca del entrañamiento o condicional: que es condición necesaria y suficiente para la verdad de una fórmula condicional, en algún aspecto de lo real, el que, en tal aspecto, o bien sea del todo falsa la prótasis (de ahí el principio *e prorsus falso quodlibet*) —siendo, en tal caso, totalmente verdadera la fórmula condicional en cuestión—, o bien sean verdaderas —en uno u otro grado— tanto la prótasis como la apódosis (de ahí el principio *uerum e quolibet*) —siendo, en este caso, la fórmula condicional tan verdadera como la apódosis. Por eso, una prótasis enteramente falsa entraña **totalmente** tanto a un hecho, cualquiera que sea, como a su negación.

Los conexivistas (p.ej. Cooper) han tratado de hacer frente a nuestra objeción de tres modos. Por un lado, S. McCall ha propuesto una semántica verifuncional multivalente; en seguida diré unas palabras sobre la misma. Por otro lado, han opuesto, a la semántica verifuncional, una semántica en la cual el valor de verdad del condicional es, no una función de cuáles sean los valores de verdad de prótasis y apódosis, sino una función de cuáles sean las condiciones de credibilidad de prótasis y apódosis. Por último, esos autores —y, en particular, Cooper— han presentado evidencia empírica a favor de la tesis de que los (?) locutores del inglés admiten como válidas aquellas inferencias que involucran al condicional que son aceptadas en la lógica conexivista, y sólo ellas, de modo que deberían rechazarse muchos esquemas teoremáticos respecto del condicional defendidos en este libro y coincidentes con otros, similares, de la lógica clásica; en particular los dos principios *uerum e quolibet* y *e prorsus falso quodlibet*, con todos los que son solidarios de uno u otro de esos dos principios.

Caracterízase el enfoque conexivista según lo presenta su principal adalid, S. McCall, por los puntos siguientes.

1.— El sistema conexivista CFL de McCall contiene dos functores dotados de la propiedad del *Modus Ponens*; un functor diádico, $\blacktriangleleft$, tiene la propiedad del *Modus Ponens* ssi cabe derivar en el sistema una regla de inferencia que permita deducir $\ulcorner q\urcorner$ del par de premisas $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner p\blacktriangleleft q\urcorner$. Pero de los dos functores aludidos del sistema conexivista CFL sólo uno de ellos —que transcribiré como $\triangleleft$— es reconocido como **condicional**, aunque al otro podríamos traducirlo como si fuera el functor clásico, o sea la herradura, $\supset$, con su definición clásica habitual (la disyunción de la negación de la prótasis con la apódosis).

2.— El sistema CFL contiene una sola negación, e.d. no distingue negación simple o débil de negación fuerte. (Puede definirse empero en ese sistema una negación más fuerte, pero es problemático cuál sería su estatuto.) Como a esa única negación se le atribuye la propiedad del *modus tollens* (o de contraposición) para el functor ‘$\lhd$’, que es el condicional más estricto, habría que entender tal vez a esa negación conexivista como negación débil, o sea: correspondiente a ‘N’; y, entonces, el signo clásico al que el sistema atribuye el *modus ponens*, la herradura, correspondería a nuestro functor ‘Z’ —y así lo voy a transcribir; por lo cual sería incorrecto atribuir a ese signo —como hace el conexivismo— la propiedad del *modus ponens*.

3.— En ese sistema no sólo es un teorema $\ulcorner p\lhd qZN(p\lhd Nq)\urcorner$ (transcribiendo —por lo recién dicho— su signo de negación por ‘N’ y su herradura por ‘Z’), sino que, además y sobre todo, el sistema se haría delicuescente si se le añadiera alguna afirmación de la forma $\ulcorner p\lhd Np\urcorner$. Y es esto lo grave: no la negación, sino **el rechazo** de cualquier afirmación de que un hecho implique a su negación (como si los hechos más bien falsos —e.d. al menos tan falsos como verdaderos— no implicaran en absoluto a sus respectivas negaciones).

4.— En ese sistema, una contradicción o antinomia cualquiera de la forma $\ulcorner p\wedge Np\urcorner$ implica que todo es contradictorio, pues es un axioma del sistema $\ulcorner p\wedge Np\lhd.q\wedge Nq\urcorner$. Por lo cual, de añadirle al sistema una contradicción cualquiera, el resultado sería una teoría delicuescente.

5.— En ese sistema se deriva la regla $p\lhd q$, $q \vdash p$, o sea el *modus ponens* al revés (jocosamente denominado por algunos *modus morons*). Dada la lectura que proponen de ‘$\lhd$’ como ‘si… entonces’, tendríamos entonces: Supongamos que es verdad (o que estamos seguros de que es verdad) que, si a Roque le ha tocado la lotería, está contento; supongamos que está contento; se podría inferir de esas dos premisas que a Roque le ha tocado la lotería. (¿Hacen falta comentarios?)

6.— Si al sistema se le añadiera, postulado como esquema axiomático, el esquema $\ulcorner p\wedge q\lhd p\urcorner$, el resultado sería incoherente, delicuescente. Por ello, el conexivismo no puede aceptar el principio de simplificación; no puede aceptar la verdad de cualquier fórmula del tipo «Si p y q, entonces p» o «El hecho de que p y q implica que p». Sobre este punto ya discutimos más arriba, a propósito de A01 y A161; y, dada nuestra definición de la implicación, ‘$\rightarrow$’, la discusión se podría aplicar al esquema $\ulcorner p\wedge q\rightarrow p\urcorner$; si nos es lícito traducir ‘$\lhd$’ por nuestra implicación ‘$\rightarrow$’, tal discusión se aplicaría al esquema $\ulcorner p\wedge q\lhd p\urcorner$, que —según lo acabo de decir— no es teoremático en el sistema conexivista. En nuestro sistema propio, $\ulcorner p\wedge q\rightarrow p\urcorner$ equivale a $\ulcorner p\wedge q\wedge pI.p\wedge q\urcorner$, que se deduce a partir del principio de idempotencia, A119: $\ulcorner p\wedge pIp\urcorner$; mas en el sistema conexivista, si bien es teoremático el principio de idempotencia, no puede definirse la implicación, como en *Aj*, mediante la equivalencia de la prótasis con la conyunción de la prótasis y la apódosis; tal equivalencia es condición necesaria, mas, desde el punto de vista conexivista, de ningún modo suficiente para la verdad de la implicación; es menester, además, que la prótasis y la apódosis sean, o bien ambas lisa y llanamente verdaderas (puramente verdaderas, sin encerrar falsedad alguna), o bien ambas lisa y llanamente falsas (puramente falsas, sin poseer verdad alguna).

Aunque el conexivismo no se ha puesto ni mucho menos tan de moda como el relevantismo propiamente dicho (en un sentido lato, también es relevantista el conexivismo), constituye, sin embargo, un intento audaz de capturar y plasmar en un sistema riguroso una cierta noción de entrañamiento o de implicación; y merecería más atenta y amplia consideración y discusión que la mayoría de los otros sistemas de lógica que se han venido proponiendo.

Así y todo, el sistema no es aceptable desde el punto de vista que sustenta la construcción del sistema *Aj*; y ello por muchas razones, que, a estas alturas, fuera casi ocioso explicitar, pues el lector se percata muy bien del fondo de la controversia.

Aparte ya de las discrepancias de fondo, resulta difícil aceptar los argumentos y consideraciones esgrimidos por los conexivistas por tres motivos. Por un lado, la semántica multivalente propuesta por

S. McCall parece inverosímil, salvo si sólo persigue un fin lúdico. Porque en esa semántica se consideraría como válida una fórmula satisfecha por cualquier álgebra conexiva, entendiendo por tal un conjunto de dos dominios separados, el uno de valores designados, el otro de valores indesignados, de tal manera, además, que los miembros de uno de los dos dominios estuvieran del todo desligados de los miembros del otro dominio y que, por consiguiente, no hubiera ninguna relación de orden entre un valor designado y uno antidesignado. Pero ¿es eso creíble? porque ¿qué son esos diversos valores de verdad? ¿Son grados de verdad o de falsedad? ¿Son combinaciones de grados de verdad o de falsedad? Si son lo uno o lo otro, deben estar relacionados entre sí, y ordenados (¿qué quedaría, en efecto, de la noción de grados de verdad, de escala, graduación o gradación veritativa, si de ella elimináramos la de ordenación, de más y de menos?) ¿Podría haber —como habría en el enfoque de S. McCall— grados de verdad, por un lado, y grados de falsedad, por otro, sin estar ordenados ni conectados los unos con los otros, sin que a menos verdad correspondiera más falsedad, ni viceversa? ¿Puede darse que los valores de verdad falsos (indesignados) no estén por debajo, en la escala veritativa, de los valores de verdad verdaderos (designados)? ¿No parece esa construcción un mero expediente artificial, sin raíces en ninguna concepción ni prefilosófica ni, todavía menos, filosófica de grados de verdad y falsedad?

En segundo lugar, no es concluyente, ni de lejos, la evidencia que presentan a favor de las reacciones de los locutores «ingenuos» (¿los hay totalmente ingenuos?; y está lejos de ser concluyente porque sin duda haría falta una encuesta en escala muchísimo más amplia y sistemática que la que hasta ahora se haya llevado a cabo; y además y sobre todo porque, desde el ángulo clásico o filoniano —que es el aquí defendido con respecto al condicional— cabe objetar que la reacción desfavorable ante la formulación de determinadas verdades condicionales o inferencias por parte de locutores más o menos ingenuos se debe a las condiciones pragmáticas de la comunicación en la cual se les hayan propuesto esas verdades o inferencias. De nuevo hay que achacar a los conexivistas, como a tantos otros no clasicistas, el confundir semántica y pragmática, condiciones de verdad con condiciones de aceptabilidad comunicacional en un entorno social, práctico, vivencial y personal determinado; éstas últimas son variables en función de miles de functores, de modo que un mismo locutor puede reaccionar favorable o desfavorablemente ante la formulación de determinadas verdades lógicas según en qué contexto y entorno se lleve a cabo.

El tercer motivo para estar en desacuerdo con los conexivistas estriba en que las condiciones de credibilidad no parecen tener por qué afectar al valor de verdad de un enunciado condicional, sino sólo a la pertinencia o no de la formulación del mismo en determinado contexto.

Ahora bien, aunque sea erróneo el enfoque conexivista respecto del condicional, la defensa del principio de Boecio (para la implicación únicamente, no para el mero entrañamiento) puede basarse en motivos independientes del punto de vista conexivista. El principal motivo es el siguiente: la implicación de un hecho por otro se da ssi el primero es a lo sumo tan verdadero como el segundo, e.d. ssi el primero es o tan verdadero como el segundo o menos verdadero que el segundo (o, dicho de otro modo: ssi el segundo es o tan verdadero como el primero o más verdadero que el primero). Ahora, supongamos que un hecho implica a otro, que es a lo sumo tan verdadero como ese otro; entonces, **en la medida en que eso sucede**, tiene que dejar de suceder que también la negación del primer hecho sea a lo sumo tan verdadera como el segundo hecho, e.d. que el segundo hecho sea por lo menos tan verdadero como el primero es falso.

Pueden oponerse reparos a la presencia del principio de Boecio en un sistema que, como *Aj* y los a él equivalentes, contiene, axiomáticamente postulado, el conyunto derecho de A06 —y en el cual es, por consiguiente, demostrable el esquema teoremático A152: ⌜¬p⊃.p→q⌝: si un aserto es totalmente falso, entonces implica cualquier cosa; cabe alegar que, entonces, tendremos una contradicción, a saber: que, por un lado, lo absolutamente falso implica cualquier cosa —y, por lo tanto, también la negación de una cosa dada cualquiera—, mas, a la vez y por otro lado, no implica ni a la cosa ni a su negación.

La respuesta que hay que dar es que así de contradictoria es la realidad. ¡Qué se le va a hacer! (Pero ¿por qué habría que intentar hacerle algo? ¿Hay acaso algo malo en la existencia de verdades mutuamente contradictorias? La contradicción implicacional que se acaba de señalar es, justamente, una contradicción verdadera más de entre los millones y billones de contradicciones verdaderas —de verdades mutuamente contradictorias— que pueblan el mundo.) Pruebe, en efecto, el lector los esquemas siguientes en *Aj*:

$0\to p\wedge N(0\to p)$ $\quad$ $0\to Np\wedge N(0\to Np)$ $\quad$ $0\to pI(0\to Np)\wedge N(0\to pI.0\to Np)$

Y es que el que no se dé la implicación de una apódosis por una prótasis no es de ninguna manera lo mismo que el que no se dé **en absoluto** tal implicación. Ninguna implicación es del todo verdadera, sino que cada implicación (como cada equivalencia) es, o del todo falsa, o, si no, tan verdadera como falsa. Pero una implicación que sea tan verdadera como falsa es verdadera (y falsa también, claro; mas no totalmente falsa, ni muchísimo menos). Y, en lo tocante, concretamente, a la autoequivalencia, cabe recordar que el que cualquier autoidentidad y, por lo tanto, también cualquier autoequivalencia es, a la vez, verdadera y falsa, se da sin darse, eso lo supieron ver Heráclito, Platón y Hegel.

Al aceptar, pues, un principio, no forzosamente nos comprometemos a rechazar la negación del mismo. Muchos principios son tales que, aun siendo verdaderas todas sus instancias, algunas de ellas son **también** falsas, o sea: esas instancias son verdaderas pero también lo son las negaciones respectivas de las mismas; y hay también principios (p.ej. **todos** los afirmativos que tienen como functor central una equivalencia, 'I', implicación '→' o sobreimplicación) cuyas instancias son, a la vez, verdaderas y falsas, y hasta tan verdaderas como falsas (lo cual quiere decir que cada una de esas instancias es tan verdadera como su respectiva negación). Mas que algo sea falso (que su negación simple o débil sea verdadera) no quiere decir, ni muchísimo menos, que tal algo sea total o enteramente falso; ni, por lo tanto, que sea de rechazar. Rechazar una tesis es recusarla, declinar aceptarla, e.d. rehusarle el asentimiento, negarse a decirle '¡Sí!. Pero no es lo mismo negarse a decir '¡Sí!' que decir ¡No! Puede decirse y se dice mil veces al día: '¡Sí y no!'; y, al hacerlo, ni se niega uno a decir '¡Sí!' ni se niega a decir '¡No!', sino que, con un solo acto de asentimiento a la afirmación y, simultáneamente, a la negación, dice a la vez, '¡Sí!' y '¡No!'.

Normalmente, para rechazar una tesis necesita uno estar convencido de que la misma es, no ya falsa (en uno u otro grado) sino **del todo** falsa, carente por completo de verdad. Por eso, normalmente, va asociado el rechazo de una tesis con la afirmación de la **super**negación de la misma.

En un sistema contradictorial, y que se precia de serlo, como *Aj*, la afirmación del principio de Heráclito, del de Boecio y de miles de principios más no excluye la negación de los mismos. Porque el sistema es lo suficientemente fino y zahorí, y lo suficientemente bien almenado, como para no hacerse delicuescente (o sea: como para no derrumbarse) por el mero hecho de contener contradicciones. Sólo un enfoque tosco y burdo, que confunda el 'no… en absoluto' con el mero 'no', y que, por ende, no haya tomado las debidas precauciones, se verá hecho añicos como consecuencia del surgimiento de contradicciones. Pero contradictorios son la vida y el movimiento, contradictorio, por difuso o gradual, es el cañamazo, la trama y la urdimbre de lo real.

En un sistema contradictorial, como *Aj*, la presencia de una negación (simple o débil) no tiene, pues, el sentido de un rechazo de lo negado, ni es forzosamente incompatible (salvo cuando, por la naturaleza particular del caso concreto, sí lo sea) con la afirmación de eso que está siendo negado. En cambio, en sistemas **superconsistentes** (como la lógica clásica, las lógicas łukasiewiczianas, la conexivista, la intuicionista, las de Gödel, etc.) no hay posibilidad de contradicción sin delicuescencia o desmoronamiento del sistema.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 16º.— OTROS SISTEMAS EQUIVALENTES A *Aj* EN LOS CUALES NO ES AXIOMÁTICO EL PRINCIPIO DE HERÁCLITO

Para concluir este tema, presentaré todavía tres sistemas más, los tres equivalentes a *Aj*, en los cuales no está postulado axiomáticamente A370: Aj^{6}, Aj^{7} y Aj^{8}. Aj^{6} sólo difiere de *Aj* en contener, como miembro del esquema axiomático A05, en lugar de A370, a la conyunción de A391 y A391/1; primero voy a probar que éste último es un esquema teoremático de *Aj*.

A391/1 p→q→N(q→p)

(2)	q→p⊃.q→pI½∧.q→pIN½	A376, A371
	σ2⊃.q→pI½∧.N(q→p)I½	
	σ2⊃.q→p→N(q→p)	
(3)	q→p→N(q→p)	(2), A379
(4)	q→p⊃N(q→p)	(3), A218
(5)	q→p⊃.p→q⊃.q→p	A164
	σ4⊃.p→q⊃N(q→p)	(4)
	σ4⊃.p→q→N(q→p)	A382
(5)	¬σ4⊃.p→q→N(q→p)	A230
	A391/1	(4), (5)

A391/1 puede ser denominado 'principio de no reversión'. Una instancia de él es ésta: El que el tamaño del Chad sea igual o más pequeño que el del Sudán implica que, en esa medida, no es el tamaño del Sudán igual o más pequeño que el del Chad; he aquí otra instancia: El que Josefina sea a lo sumo tan decidida como Carola implica que, en esa medida, no es verdad que Carola sea a lo sumo tan decidida como Josefina.

Pasemos ahora a Aj^{6}. En Aj^{6} (en el cual no están postulados axiomáticamente ni A370, ni A371 ni A373, pero que sí contiene df11) se prueba como sigue:

(2)	p→p→N(p→p)	A391/1
(3)	pIp→N(pIp)	(2)
	pIpIN(pIp)	(3), A391, A225

Y luego, a partir de ahí, se demuestran los demás esquemas de que se trata.

Veamos ahora Aj^{7}. Aj^{7} difiere de *Aj* en que, en el lugar de A370, es miembro conyuntivo del esquema axiomático A05 la conyunción de: A371 (abandonándose la df11 y tomándose '½' como símbolo primitivo), A373, A391 y el principio de contraimplicación cuya teorematicidad o validez en *Aj* voy a demostrar primero:

A404/1 p→q→.p→Nq→Np

Prueba:

(2) p→q⊃.p→Nq⊃.p→q∧.p→Nq

(2)	p→q⊃.p→Nq⊃.p→q∧.p→Nq	
	*σ2⊃.p→.q∧Nq	A395
	*σ2⊃.N(q∧Nq)→Np	A364
	*σ2⊃.p→Nq→Np	A404, A363
(3)	p→q⊃.p→Nq→Np	(2), A379
	A404/1	(3), rinf55

A este esquema lo llamaré efectivamente ‘principio de contraimplicación’ (está emparentado estrechamente con —pero es diferente de— los principios de contraposición implicativa para la negación débil: A364, A365 y A366). Podríamos incluso tomar una formulación más débil del principio de contraimplicación como miembro conyuntivo de un esquema axiomático en Aj^7, a saber:

(P.C.i.) p→q⊃.p→Nq→Np (que es la línea 3 de la prueba de A404/1)

La prueba de que en Aj^7 es teoremático o válido el esquema A370 es simple:

(2)	½→⊃.½→N½→N½	(P.C.i.)
(3)	½I½→½	A371, (2)
(4)	pIp→½	(3), A373
(5)	½→N(pIp)	(4), A364, A371
(6)	pIp→N(pIp)	(4), A363, (5)
	pIpIN(pIp)	(6), A391

Desde luego, lo interesante es menos el resultado final de la prueba (o sea: A370) que (6), que es lo verdaderamente en disputa, e.d. el esquema inverso de A391). Si en Aj^7 no se hubiera postulado axiomáticamente A391, pero sí el resto de los esquemas más arriba apuntados junto con los que se conservan de la base axiomática de *Aj*, Aj^7 contendría, de todos modos, la tesis de que cada autoequivalencia es, a lo sumo, tan verdadera como falsa. Y eso es lo que no están dispuestos a aceptar los pensadores dignoscitivos (antidialécticos) para los cuales una autoequivalencia debe ser lisa y llanamente verdadera; en tanto que un sistema dialéctico de lógica matemática, como *Aj* (y los a él equivalentes, como Aj^7) acepta esa verdad propugnada en la tradición dialéctica, de Platón a Hegel, de que cada autoequivalencia implica o contiene una autorrelación, y una autoalteridad por consiguiente; por lo cual ha de ser, a la vez que verdadera, falsa.

¿Es impugnable el principio de contraimplicación? ¡Claro! ¡Todo es impugnable! Pero ¿no es de los más obvios principios que pueda uno considerar? Ciertamente no todos lo aceptan (de nuevo hay que citar a las lógicas łukasiewiczianas, en las cuales no es válido; la raíz de esa falla estriba en el indeterminismo alético łukasiewicziano). (Además, en sistemas como los de da Costa, cuya negación débil es algo extraña y que, además, carecen de functor implicativo, tampoco hay esquema válido alguno al que quepa denominar ‘principio de contraimplicación’). Pero el hombre de la calle, seguramente, no dudaría de la corrección de este principio. Una instancia del mismo es ésta: si Ascanio es por lo menos tan mezquino como Fulgencio, entonces el que sea por lo menos tan real la generosidad de Ascanio como la mezquindad de Fulgencio implica que Fulgencio no es mezquino (identificando lo dicho por ‘Ascanio es generoso’ con lo dicho por ‘Ascanio no es mezquino’).

Para terminar, echemos un vistazo a un sistema, Aj^8, que sólo difiere de Aj^7 en contener, como miembro conyuntivo de A05, en lugar de A404/1, su converso: el principio inverso de contraposición (P.I.C.i.), a saber: A404/2:

A404/2 $p \to q \to .p \to N(p \to Nq)$

Pruébase ese principio en *Aj* como corolario inmediato de A404/1, en virtud de A365. También podemos tomar, como conyunto de un esquema axiomático de Aj^8, en lugar de A404/2, una forma debilitada, a saber:

(P.I.C.i.) $p \to q \supset .p \to N(p \to Nq)$

Demostrar, en Aj^8, el esquema A370 no ofrece ninguna dificultad, puesto que, para empezar, se demuestra, en Aj^8, inmediatamente el P.C.i. a partir de P.I.C.i., en virtud de A365, que también es, por supuesto, un esquema teoremático de Aj^8.

La diferencia entre Aj^7 y Aj^8 sería baladí de no ser porque, tal vez, el P.I.C.i. es todavía más obvio, o claro, para los no versados en lógica, que el P.C.i. Una instancia del P.I.C.i. es ésta: Si Isabel de Farnesio es por lo menos tan ambiciosa como Mª Luisa de Saboya, entonces el que Mª Luisa de Saboya sea ambiciosa implica que no es verdad que Mª Luisa de Saboya sea a lo sumo tan ambiciosa como Isabel de Farnesio es desinteresada (identificando 'x es desinteresado' con 'x no es ambicioso').

El desenlace de toda la discusión proseguida en torno al principio de Heráclito y de sistemas equivalentes a *Aj* en los cuales ese principio no es axiomático, pero sí es teoremático, es que, lejos de constituir ese principio una extravagancia —como pudiera antojárseles a los lógicos de mentalidad conservadora—, podría y debería ese principio —así no fuera independientemente plausible (que sí lo es, según lo hemos visto más atrás [cap.14º, págˢ 89ss], pues abonan a su favor importantes argumentos filosóficos)— venir admitido como teoremático, porque es demostrable en sistemas cuyos axiomas gozan, cada uno de ellos por separado, de plausibilidad independiente y son, en todo caso, principios que han logrado aceptación en medios mucho más amplios que los que aceptan el principio de Heráclito; así, concretamente, un principio como A371, para alguna interpretación de '½', parece deber ser admitido por cualquier teoría de lo difuso, por cualquier tratamiento satisfactorio de la paradoja del sorites —o el montón— y otras semejantes; y principios como los de abducción implicacional, o el de contraimplicación, p.ej., o incluso el de Boecio son ampliamente reconocidos, y varios sistemas de lógica los postulan como axiomas sin aceptar, empero, el principio de Heráclito. ¿Cómo es eso posible? Porque, si bien es independientemente plausible cada uno de los axiomas de esos sistemas diferentes de *Aj* (diferentes en su presentación, en su base axiomática), pero equivalente a *Aj* (en el acervo de teoremas); si bien cada uno de esos principios alternativamente postulables tiene gran atractivo, pocos lógicos hay resueltos a aceptarlos todos ellos; a la vez, justamente porque se percatan de que, al tomarlos todos ellos simultáneamente, se desemboca en contradicciones. Mas, ¿por qué no aceptar esas contradicciones, si se demuestra la verdad de las mismas sobre la base de principios o postulados cada uno de los cuales es, independientemente (de los otros y de las consideraciones que, de consuno con los otros, puedan acarrear), muy plausible, y de reglas de inferencia asimismo provistas, independientemente, de alta plausibilidad? ¿Por qué asustarse ante la contradicción, en vez de reconocerla lealmente como verdadera, cuando se la demuestra del modo indicado, en un razonamiento correcto cuyas premisas parecen, todas y cada una de ellas por separado, plausibilísimas, no padeciendo esas premisas otra mácula o tacha que la de entrañar, en conjunción con las demás, a la conclusión contradictoria? ¿No es mil veces preferible aceptar esa conclusión dialéctica, contradictoria, que enzarzarse en fútil riña acerca de cuál de las premisas debe ser sacrificada? Lo mejor es no sacrificar ninguna de ellas.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 17º.— OTROS ESQUEMAS IMPLICACIONALES

Sigamos ahora comentando algunos de los otros esquemas demostrados anteriormente. A375 nos dice que cualquier equivalencia verdadera es equivalente a una autoequivalencia dada, sea la que fuere. A377 nos dice que la disyunción de dos hechos es, o bien equivalente a uno de ellos, o bien equivalente al otro. A379 nos dice que un hecho implica a otro ssi el primero entraña su propio implicar al segundo. Así, p.ej., Tobías es a lo sumo tan aventurero como Getulio ssi es verdad que, si es aventurero Tobías, entonces lo es a lo sumo tanto como Getulio. Se trata de un principio utilísimo para ulteriores demostraciones, y cabe llamarlo 'principio de entrañamiento implicativo'.

Lo mismo que para el entrañamiento ('$\supset$') valen para la implicación ('$\rightarrow$') principios como: la transitividad (tanto el de prefijación —A385— como el de sufijación —A384); el silogismo conyuntivo (A386); los principios de desglosamiento de una apódosis disyuntiva (A394), de una apódosis conyuntiva (A395), de una prótasis conyuntiva (A396) y de una prótasis disyuntiva (A397); los principios de autodistributividad (A399 y A400) y de aumentación (A406).

El esquema A404 nos dice que una equivalencia cualquiera (y, por lo tanto, también una implicación cualquiera) es, a lo sumo, tan verdadera como una instancia dada, sea la que fuere, del principio de no contradicción. De lo cual se deduce (A405) que cualquier contradicción implica la no-verdad de una equivalencia, sea la que fuere. Entiéndase bien que la no-verdad de algo no es lo mismo que la **total** carencia de verdad de ese algo, e.d. que la **completa** falsedad de dicho algo.

Vamos a demostrar ahora algunos otros esquemas interesantes:

A407 $p\rightarrow q\rightarrow.p\wedge r\rightarrow.q\wedge r$

Prueba:

(2) $p\rightarrow q\supset.p\wedge r\rightarrow q$ A406

(3) $p\wedge r\rightarrow r\supset.p\wedge r\rightarrow q\supset.p\wedge r\rightarrow q\wedge.$ $p\wedge r\rightarrow r$

$\sigma 3\supset.\sigma\delta 3\supset.p\wedge r\rightarrow.q\wedge r$ A395

(4) $\delta 3$ (3)

(5) $p\rightarrow q\supset.p\wedge r\rightarrow.q\wedge r$ (2), (4)

A407 (5), rinf56

A409 $p\rightarrow q\rightarrow.p\vee r\rightarrow.q\vee r$

Prueba:

(2) $Nq\rightarrow Np\rightarrow.Nq\wedge Nr\rightarrow.Np\wedge Nr$ A407

$\sigma 2\rightarrow.N(Np\wedge Nr)\rightarrow N(Nq\wedge Nr)$ A364

$\sigma 2\rightarrow.p\vee r\rightarrow.q\vee r$

A409 (2), A364

A408 $p\rightarrow q\rightarrow.r\wedge p\rightarrow.r\wedge q$ (Prueba: A407)

A410 $p\rightarrow q\rightarrow.r\vee p\rightarrow.r\vee q$ (Prueba: A409)

Déjasele al lector la tarea de demostrar los siguientes esquemas teoremáticos:

A411 $p\rightarrow q\rightarrow.p\rightarrow.q\vee r$

A412 $p\rightarrow q\mathrm{I}.p\rightarrow.p\wedge q$

A413 $p\rightarrow(q\wedge r)\rightarrow.p\rightarrow q$

A414 $p\rightarrow q\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow.p\wedge r\rightarrow.q\wedge s$

A415 $p\rightarrow q\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow.p\vee r\rightarrow.q\vee s$

A416 $p\rightarrow q\rightarrow.\neg q\rightarrow\neg p$

A417 $p\wedge q\rightarrow r\rightarrow.p\wedge\neg r\rightarrow\neg q$

A418 p→q∧p→q

Prueba:

(2) p→q⊃.p→q∧p→q A406

(3) p→q∧p⊃.p→q∧p→q (2)

A418 (3), A379

El esquema A418 es el principio (implicacional) de aserción conyuntiva. En cambio, el principio de aserción (a secas) no vale para la implicación: ⌜p→.p→q→q⌝ no es un esquema teoremático de *Aj* (y, de postularse añadiéndolo a los esquemas axiomáticos de *Aj*, daría por resultado un sistema delicuescente, incoherente). Otros esquemas que no son válidos **para la implicación** (e.d., esquemas que son válidos para el **entrañamiento**, sin que sean válidas sus versiones implicacionales —el resultado de reemplazar, en ellos, cada ocurrencia de '⊃' por una ocurrencia de '→') son: la ley de Peirce (⌜p→q→p→p⌝); el principio *uerum e quolibet*: ⌜p→.q→p⌝ (e incluso una versión atenuada del mismo: ⌜p⊃.q→p⌝); el principio de antilogismo para la negación débil: ⌜p∧q→r→.p∧Nr→Nq⌝: tómese como ⌜p⌝ a '½' y como ⌜r⌝ también a '½', y como ⌜q⌝ a '1': entonces vemos que la fórmula ⌜½∧1→½→.½∧N½→N1⌝ es inválida, pues equivale —pruébelo el lector— a ⌜½→0⌝, o sea, a '0'; el principio de las dos astas, tanto para la negación fuerte como para la débil (o sea: tanto ⌜p→.p∧q∨.p∧¬q⌝ como ⌜p→.p∧q∨.p∧Nq⌝; el principio de Stalnaker, tanto para la negación fuerte como para la débil (e.d. tanto ⌜p→q∨.p→¬q⌝ como ⌜p→q∨.p→q⌝); los principios de permutación y conmutación (o sea: ⌜p→(q→r)→.q→.p→r⌝ y ⌜p→(q→r)I.q→.p→r⌝; el principio de exportación: ⌜p∧q→r→.p→.q→r⌝ —e incluso el resultado de sustituir, en ese esquema, la ocurrencia **central** de '→' por una de '⊃', valiendo la misma observación para el principio de permutación; el principio de adjunción ⌜p→.q→.p∧q⌝ (y también una versión atenuada: ⌜p⊃.q→.p∧q⌝); el principio de expansión: ⌜p→q→.p→.p→q⌝ (e incluso una versión atenuada: ⌜p→q⊃.p→.p→q⌝). En cambio, sí es válido el principio implicacional de importación, como paso a demostrarlo:

A419 p→(q→r)→.p∧q→r

Prueba:

(2) p→(q→r)→.p∧q→.q→r A406

σ2→.p∧q→q→.p∧q→r A399

(3) p∧q→q→.p→(q→r)→.p∧q→r (2), A398

A419 (3)

También es válido el principio implicacional de contracción, como lo voy a demostrar ahora:

A420 p→(p→q)→.p→q

Prueba:

(2) p→(p→q)⊃.p⊃.p→q

σ2⊃.p→q A379

A420 (2), rinf56

Aunque no son válidos, en *Aj*, los principios **implicacionales** de permutación, de aserción, de Stalnaker, de las dos astas, de exportación, de adjunción y el *uerum e quolibet*, sí son válidos ciertos esquemas de esas índoles en los cuales, sin embargo, todas las letras esquemáticas, o —en algunos casos— algunas de ellas son reemplazadas por esquemas equivalenciales. Así tenemos, en *Aj*, los siguientes esquemas válidos: A398 (esquema de permutación para equivalencias); ⌜pIq→.pIq→r→r⌝, e.d. el principio implicacional de aserción para prótasis equivalenciales; $\ulcorner pIq\longrightarrow.rIs\longrightarrow.pIq\urcorner$, o sea el principio de que una equivalencia verdadera es implicada por cualquier equivalencia; $\ulcorner pIq\longrightarrow.pIq\wedge r\vee.pIq\wedge Nr\urcorner$, e.d. el principio equivalencial de las dos astas para una prótasis equivalencial y con respecto a la negación débil; $\ulcorner pIq\longrightarrow r\vee.pIq\longrightarrow Nr\urcorner$; e.d. el principio implicacional de Stalnaker para una prótasis equivalencial y para la negación débil; $\ulcorner pIq\wedge(rIs)\longrightarrow p^1\longrightarrow.pIq\longrightarrow.rIs\longrightarrow p^1\urcorner$ que es el principio implicacional de exportación para prótasis equivalenciales; $\ulcorner pIq\longrightarrow.rIs\longrightarrow.pIq\wedge.rIs\urcorner$, que es el principio implicacional de adjunción para equivalencias. Vamos a probar la teorematicidad del principio de que una equivalencia verdadera es implicada por cualquier equivalencia; se deja al lector, como ejercicio, el probar al teorematicidad de los otros cinco esquemas en *Aj*.

A420/1 $pIq\longrightarrow.rIs\longrightarrow.pIq$

Prueba:

(2)	$pIq\supset.rIs\supset.pIq$	A164
	$\sigma2\supset.rIs\rightarrow.pIq$	(M.E.)
	A420/1	(2), (M.E.)

Concluiré este capítulo demostrando algunos esquemas más.

A421 $p\wedge qI(p\vee q)I.pIq$

Prueba:

(2)	$p\wedge qI(p\vee q)\supset.p\wedge q\wedge qI.p\vee q\wedge q$	
	$\sigma2\supset.p\wedge qIq$	
(3)	$p\wedge qI(p\vee q)\supset.p\wedge qIp$	
(4)	$p\wedge qI(p\vee q)\supset.\delta2\wedge\delta3$	(2),(3)
	$\sigma4\supset.pIq$	A223
(5)	$\sigma4\rightarrow\delta4$	(4), rinf56
(6)	$pIq\supset.p\wedge pI.p\wedge q$	
	$\sigma6\supset.pI.p\wedge q$	
(7)	$pIq\supset.pI.p\vee q$	
(8)	$pIq\supset.\delta6\wedge\delta7$	(6), (7)
	$\sigma8\supset.p\wedge qI.p\vee q$	A223
(9)	$\sigma8\rightarrow\delta8$	(8),rinf56
	A421	(5), (9), A227

A422 $p\wedge qI(p\wedge r)\wedge(p\vee qI.p\vee r)I.qIr$

Prueba:

(2)	$p\wedge qI(p\wedge r)\supset.p\wedge q\vee qI.p\wedge r\vee q$	
	$\sigma2\supset.qI.p\vee q\wedge.r\vee q$	
(3)	$p\wedge qI(p\wedge r)\supset.rI.p\vee r\wedge.q\vee r$	
(4)	$\sigma2\supset.\delta2\wedge\delta3$	(2), (3)
(5)	$p\vee qI(p\vee r)\supset.p\vee q\wedge(r\vee q)I.p\vee r\wedge.q\vee r$	
(6)	$\sigma2\wedge\sigma5\supset.\delta2\wedge\delta3\wedge\delta5$	(4), (5)
(7)	$\delta3\wedge\delta5\supset.rI.p\vee q\vee.q\vee r$	A223
(8)	$\sigma2\wedge\sigma3\wedge\sigma5\supset.\delta2\wedge\delta7$	(6), (7)
	$\sigma8\supset.qIr$	A224
(9)	$qIr\supset.p\wedge qI.p\wedge r$	
(22)	$qIr\supset.p\vee qI.p\vee r$	
(23)	$\sigma9\supset.\delta9\wedge\delta22$	(9), (22)
(24)	$\delta9\wedge\delta22\equiv\sigma9$	(8), (23)
	A422	(24), rinf56

A423 p→q→.p→Lq

(Prueba: A262, A385)

A424 Hp→qI.Hp→Hq

Prueba:

(2) Hp→q⊃.Nq→NHp A364

σ2⊃.Nq→¬Hp A270

σ2⊃.Nq⊃.¬Hp A218

σ2⊃.Hp⊃¬Nq A202

σ2⊃.Hp⊃Hq

σ2⊃.Hp→Hq A361/1

(3) σ2→δ2 (2), rinf56

(4) Hp→Hq→.Hp→q A263,A385

A424 (3), (4), A227

A428 q∧rIp→.pIq∨.pIr

(Prueba similar)

A425 p→q→.Hp→Hq

Prueba:

(2) p→q→.Hp→q A384, A263

σ2→.Hp→Hq A424

A426 q∨rIp→.q→p∧.r→p

Prueba:

(2) q∨rIp→.q∨r→p A226

σ2→.q→p∧.r→p A397

A427 q∨rIp→.pIq∨.pIr

Prueba:

(2) q∨rIp→.q→p∧.r→p A426

(3) q∨rIp→.p→.q∨r A226

σ3→.p→q∨.p→r A394

(4) q∨rIp→.δ2∧δ3 (2), (3)

σ4→.q→p∧(p→q∧.r→p)∨.q→p∧.r→p∧.p→r

σ4→.pIq∨.pIr A406, A227, rinf56, A415

Ahora veamos algunos esquemas **mixtos**, en el sentido de que presentan combinaciones de la implicación ('→') y del entrañamiento ('⊃').

A429 q→(p⊃r)→.p∧q→r

Prueba:

(2) q→(p⊃r)I.q→.¬p∨r

σ2I.q→¬p∨.q→r A394

(3) q→r→.p∧q→r A406

(4) q→¬p⊃.q⊃¬p

σ4⊃¬(p∧q)

(5) σ4→δ4 (4), rinf56

(6) σ3∨σ4→δ4 (3), (5), A397

A429 (2), (6)

A430 p⊃.p→q⊃p

Prueba:

(2) p→q⊃.p⊃q

p⊃.p→q⊃q (2)

A431 ¬p⊃.q→p→¬q (Prueba similar + A361/2)

A432 p⊃ (q→r)⊃.p∧q→r

Prueba:

(2)	¬p⊃.¬p∨¬q	
	σ2⊃¬(p∧q)	
	σ2⊃.p∧q→r	A153
(3)	q→r⊃.p∧q→r	A406
	A432	(2), (3)

A432/1 p→.q⊃p (Prueba: p→.¬q∨p [vide supra, prueba de A367], df14)

A433 p⊃(q→r)⊃.p→q→.p→r

Prueba:

(2)	¬p⊃.p→r	A153
(3)	p→r⊃.p→q→.p→r	A384
(4)	¬p⊃δ3	(2), (3)
(5)	q→⊃δ3	A385
	A433	(4), (5)

A partir del presente punto en nuestro desarrollo demostrativo, empezaremos a saltarnos trozos (por las razones editoriales aludidas en el Prólogo del presente libro). Los hiatos resultantes tócale al lector colmarlos. Acuda para ello al Anejo Nº 1 (al final del libro), donde aparecen, enumerados, muchos esquemas teoremáticos, tanto si se han demostrado como si su demostración viene supuesta para la de otros cuya prueba se expondrá después. (Así, p.ej., en este lugar nos saltamos la demostración de esquemas teoremáticos que involucran al functor de sobreimplicación, '\', y por ende a las oraciones comparativas de desigualdad —las que comportan 'menos-que'.)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 18º.— LOS HECHOS MÁS BIEN VERDADEROS O REALES

Ya hemos trabado conocimiento con varios **functores de afirmación**, en un sentido lato; entre ellos: un functor reduplicativo 'NN', tal que, para cualquier oración ⌜p⌝, lo dicho por ⌜p⌝ es exactamente idéntico a lo dicho por ⌜NNp⌝; un functor de sobreafirmación 'H' tal que lo dicho por ⌜Hp⌝ es más fuerte que lo dicho por ⌜p⌝, en el sentido de que lo dicho por ⌜Hp⌝ implica a lo dicho por ⌜p⌝, mas no siempre a la inversa; en cambio el functor 'L' es un functor de afirmación atenuada, puesto que lo dicho por ⌜Lp⌝ es más débil que lo dicho por ⌜p⌝ (implicación de ⌜Lp⌝ por ⌜p⌝, mas no siempre a la inversa).

Vamos ahora a tomar contacto con otro functor de afirmación 'P'. ⌜Pp⌝ aserta ⌜p⌝ de tal modo, además, que, al proferirse ⌜Pp⌝ se dice que el hecho de que p es **más bien verdadero**, o sea: que, siendo **a lo menos tan verdadero como falso**, el hecho de que p es verdadero.

Lo mismo que el functor '℘', e.d. 'bastante' (que estudiaremos más abajo —en el capítulo 19º, págas 111ss), el functor 'P' es un **functor afirmativo fuerte**; un functor afirmativo ♀ es fuerte ssi es válido el esquema ⌜♀p→p⌝, no siendo válido en absoluto el esquema ⌜p→♀p⌝. Un functor afirmativo es **débil** ssi es lo inverso lo que sucede; y **redundante** ssi ambas implicaciones valen. Un ejemplo de functor afirmativo débil lo constituye 'L'; y de functor afirmativo redundante, 'NN'.

Además, 'P', 'H' y '℘' son functores afirmativos **constrictivos**; se explicará esa denominación más adelante [en el cap. 19º, pága 113].

Nótese bien que ninguno de los functores de afirmación considerados hasta ahora es un functor de **afirmación estricta**, pues no cabe leer a ninguno de ellos como ‘Es afirmable que’; puede haber, y hay, fórmulas tales que el prefijarles uno de esos functores sea una fórmula aseverable o afirmable, por no ser verdadera **en todos los aspectos** —por ser enteramente falsa en algún aspecto—, pese a que la negación respectiva tampoco es aseverable, por no ser tampoco ella verdadera en todos los aspectos. Ahí estriba la diferencia con el functor ‘B’, que estudiaremos en los últimos capítulos de esta Sección I. Así pues, no hay que leer $\ulcorner Pp \urcorner$ como «Es más bien afirmable que p» sino «Es más bien verdadero (o real) el hecho de que p»; pudiendo eso, el que sea más bien real el hecho de que p, ser para algún $\ulcorner p \urcorner$ determinado ni afirmable ni negable, por ser cierto tan sólo en algunos aspectos de lo real, siendo de todo punto falso en otros aspectos de lo real.

Conviene tener presente esa misma precaución al considerar una nueva versión del principio de tercio excluso que vamos a ver en seguida (A483): para cualquier $\ulcorner p \urcorner$, o bien es más bien cierto que p, o bien es más bien falso que p. Como las otras variantes del principio de tercio excluso hasta ahora consideradas (el principio **fuerte** de tercio excluso, A117; el principio **simple** de tercio excluso, A265; el principio **débil** de tercio excluso $\ulcorner LNp\vee p \urcorner$ —o sus equivalentes: $\ulcorner Lp\vee Np \urcorner$, $\ulcorner L(p\vee Np) \urcorner$, $\ulcorner Lp\vee LNp \urcorner$; cf. A292), este nuevo principio de tercio excluso (A483) no nos dice que o bien el miembro izquierdo es afirmable con verdad o bien lo es el miembro derecho; lo único que es afirmable con verdad es la disyunción de los dos miembros; pero, como se deduce de ciertos resultados que veremos [en el cap. 26º, pág^{as} 136ss], el functor ‘Es afirmable con verdad que’ (o sea: ‘B’) no se distribuye con respecto a la disyunción, sino únicamente con respecto a la conyunción:

A482 $PpI.p\wedge L(Np\to p)$ (Prueba: df28, A259)   A484 $Pp\to p$ (Prueba: A482)

A485 $\neg p\to\neg Pp$ (Prueba: A484, A416)

A483 $Pp\vee PNp$

Prueba:

(2)	$p\to Np\vee .Np\to p$	A369
(3)	$p\to Np\supset .p\to Np\&Np$	A389
	$\sigma 3\supset .NNp\to Np\&Np$	
	$\sigma 3\supset PNp$	df28
(4)	$Np\to p\supset Pp$	igual que (3)
	A483	(2), (3), (4)

A487 $PpIp\vee .PpI0$

Prueba:

(2)	$\neg Pp\supset .PpI0$	
(3)	$\neg p\supset .pI\neg p$	A486
	A487	(2), (3)

A486 $Pp\supset .pIPp$

Prueba:

(2)	$Pp\supset .Np\to p$	df28
	$\sigma\supset .L(Np\to p)I1$	
	$\sigma 2\supset .L(Np\to p)\wedge pIp$	
	$\sigma 2\supset .PpIp$	A482

A488 $\neg p\supset .PpIp$

Prueba:

(2)	$\neg p\supset .\neg p\wedge\neg Pp$	A485
	$\sigma 2\supset .pI0\wedge .PpI0$	
	$\sigma 2\supset .pIPp$	

A489 Hp→Pp

Prueba:

(2)	Hp⊃.pI1	
	σ2⊃.Np→q	
	σ2⊃.Np→p∧p	A390
	σ2⊃Pp	df28
(3)	Hp∧Pp⊃.HpIp∧.PpIp	A486
	σ3⊃.HpIPp	
(4)	Hp⊃σ3	(2)
	σ4⊃.Hp→Pp	
	A489	(4), A379

A492 HpIPHp

Prueba:

(2)	Hp→HHp	
	σ2→PHp	A489
(3)	PHp→Hp	A484
	A492	(2), (3)

A494 PpIPPp

Prueba:

(2)	Pp⊃.PpIp	A486
	σ2⊃.PPpIPp	A220
	σ2⊃.Pp→PPp	
(3)	Pp→PPp	(2), A379
(4)	PPp→Pp	A484
	A494	(3), (4)

A490 p→PLp

Prueba:

(2)	p→Lp	
	σ2→HLp	
	σ2→PLp	A489

A491 HpIHPp

Prueba:

(2)	Hp→HHp	
	σ2→HPp	A489, A425
(3)	HPp→Hp	A484, A425
	A491	(2), (3)

A493 PpIp≡.Pp∨¬p

Prueba:

(2)	Pp∨¬p⊃.PpIp	A486, A488
(3)	PpIp⊃.p⊃Pp	
(4)	PpIp⊃.¬p⊃¬p	
(5)	PpIp⊃.δ3∧δ4	(3), (4)
	σ5⊃.p∨¬p⊃.Pp∨¬p	
(6)	p∨¬p⊃.PpIp⊃.Pp∨¬p	(5)
(7)	δ6	(6)
	A493	(2), (7)

A495 pINp≡.Pp∧PNp

Prueba:

(2)	pINp⊃.p→Np∧.Np→p	
	σ2⊃.p→Np&Np∧.Np→p&p	A389, A390
	σ2⊃.Pp∧PNp	df28
(3)	Pp∧PNp⊃.Np→p∧.NNp→Np	df28
	σ3⊃.Np→p∧.p→Np	
	σ3⊃.NpIp	
	A495	(2), (3)

A496 pINpI.pI½

Prueba:

(2)	pI½→.pINp	A371
(3)	pINp⊃.p→½⊃.Np→½∧.p→½	
	*σ3⊃.½→p∧.p→½	A366, A371
	*σ3⊃.½Ip	
(4)	pINp⊃.½→p⊃.½→p∧.½→Np	
	*σ4⊃.½→p∧.p→½	A365, A371
	*σ4⊃.½Ip	
(5)	pINp⊃.δ3∧δ4	(3), (4)
	σ5⊃.p→½∨(½→p)⊃.½Ip	
(6)	p→½∨(½→p)⊃.pINp⊃.½Ip	(5)
	σ6⊃.pINp→.½p	
(7)	δ6	(6), A369
	A496	(2), (7)

A497 Pp∧PNpI.pI½

Prueba:

(2)	Pp∧PNp≡.pI½	A495, A496
(3)	Pp∧PNp∧(pI½)⊃.PpIp∧.PNpINp∧.pI½∧.NpI½	A486, A371
	σ3⊃.PpI½∧.PNpI½	
(4)	⅓⊃.pI½	
	σ4⊃.pI½I½	A376
(5)	σ3⊃.PpI½∧.PNpI½∧.pNpI½∧.pI½I½	(3), (4)
	σ5⊃.PpPNpI.pI½	
(6)	¬(Pp∧PNp)∧¬(pI½)⊃.Pp∧.PNpI0∧.pI½I0	
	σ6⊃.Pp∧PNpI.pI½	
(7)	σ3∨σ6	(2)
	A497	(5), (6), (7)

A498 pINpI.Pp∧PNp (Prueba: A496, A497)

A500 p½∧PN½ (Prueba: A499, df11)

A499 P(pIp)∧PN(pIp) (Prueba: A498, A370)

A501 pIqIP(pIq)

Prueba:

(2)	pIq⊃.pIqI½	A376
	σ2⊃.P(pIq)IP½∧.P½I½	A500, A486
	σ2⊃.P(pIq)I½	
(3)	pIq⊃.pIqI½∧.P(pIq)I½	A376, (2)
	σ3⊃.pIqIP(pIq)	
(4)	¬(pIq)⊃.pIqI0∧.P(pIq)I0	A484, A416
	σ4⊃.pIqIP(pIq)	
	A501	(3), (4)

A502 (p\qIp(p\q) (Prueba similar, sólo que aduciendo A439 en lugar de A376)

A503 Pp\p≡.¬Pp∧p

Prueba:

(2)	Pp\p⊃¬(PpIp)	A434
	σ2⊃.¬Pp∧p	A493
(3)	¬Pp∧p⊃¬(PpIp)	A493
	σ3⊃.p\Pp∨.Pp\p	A438
	σ3⊃.Pp\p	A441, A484

A504 PN(pIq)

Prueba:

(2)	pIq⊃.pIqIN(pIq)	A378
	σ2⊃PN(pIq)	A498
(3)	¬(pIq)⊃HN(pIq)	
	σ3⊃PN(pIq)	A489
	A504	(2), (3)

A505 Np→p≡Pp (Prueba: A390, df28)

A507 Pp≡.pINp∨.Np\p (Prueba: A505, A440)

A508 PNp≡.pINp∨.p\Np (Prueba: A460, A507)

A509 p\NpI.p\½

Prueba:

(2)	Np→p≡.½→p	A388
(3)	¬σ2≡¬δ2	(2)
(4)	p\Np≡.p\½	(3), A441
	A509	(4), (+ rinf57)

A511 ½→p≡Pp (Prueba: A505, A388)

512 p→½≡PNp (Prueba: A506, A387)

Siguen varios corolarios fácilmente demostrables.

A513 ½\p≡¬PNp A514 p\Np≡¬Pp A515 p\½≡¬Pp

A516 Np\p≡¬PNp

A517 Np→p→Pp

Prueba:

(2)	Np→p⊃Pp	A505
	σ2⊃.PpIp	A486
	σ2⊃.Np→p→Pp	A241, A390
	A517	(2), A379

A518 p→Np→PNp (Prueba: A517)

A519 Pp⊃.p→q→Pq

Prueba:

(2)	Pp⊃.½→p	A511
	σ2⊃.p→q→.½→q	A384
	σ2⊃.σδ2→.Nq→q	A388
	σ2⊃.σδ2→Pq	A517

A520 p→q→.Pp→Pq

Prueba:

(2)	Pp⊃.p→q⊃.Pp∧Pq	A519
	*σ2⊃.PpIp∧.PqIq	A486
	*σ2⊃.Pp→Pq	A242
	σ2⊃.δσ2→.Pp→Pq	(M.E.)
(3)	¬Pp⊃.Pp→Pq	
	σ3⊃.p→q→.Pp→Pq	A420/1
	A520	(2), (3)

A520/1 p\q→.Pp→Pq (Prueba: df17, A520)

A520/2 Pp⊃.p\q→Pq

Prueba:

(2)	Pp⊃.½→p	A511
	σ2⊃.p\q→.½→q	A455, A461, A384
	σ2⊃.δσ2→.Nq→q	A388
	σ3⊃.δσ2→Pq	A517

A520/3 Pp∧¬Pq⊃.q\p

Prueba:

(2)	Pp∧¬Pq⊃.½→p∧.q\½	A511, A515
	σ2⊃.q\p	A453

A521 Pp∧PqIP(p∧q)

Prueba:

(2)	P(p∧q)→.Pp∧Pq	A520, A395
(3)	p→(p∧q)→.Pp→P(p∧q)	A520
(4)	q→(p∧q)→.Pq→P(p∧q)	A520

A520/4 Pp∧.PNq⊃.q→p

(Prueba: A511, A512, A363)

(5)	δ3∨δ4	A415,A377/2,(3),
(6)	Pp∧.Pq→P(p∧q)	(5), A396
	A521	(2), (6)

A522 Pp∨PqIP(p∨q)

Prueba:

(2)	Pp∨Pq→P(p∨q)	A520, A397
(3)	p∨q→p→.P(p∨q)→Pp	A520
(4)	p∨q→q→.P(p∨q)→Pq	A520
(5)	δ3∨δ4	(3), (4), A377/1, A415
(6)	P(p∨q)→.Pp∨Pq	(5), A394
	A522	(2), (6)

A523 P(p∨Np) (Prueba: A483, A522)

A524 PN(p∧Np) (Prueba: A523)

A525 PNp→NPp

Prueba:

(2)	Np→NPp	A484, A364
(3)	PNp→PNPp	(2), A520
	σ3→NPp	A484

A526 Pp→NPNp (Prueba: A525, A365)

Siguen varios corolarios, de fácil demostración.

A527 PN(p∧PNp)	A528 PN(Pp∧Np)	A529 P(Pp∨Np)
A530 P(PNp∨p)	A531 PN(p∧NPp)	A532 NP(p∧Np)
A533 NP(Pp∧Np)	A534 NP(p∧PNp)	

A535 P(p∧Np)I.pINp (Prueba: A498, A521)

A536 P(p∧Np∧q∧Nq)→.pIq

Prueba:

(2)	σA536→.Pp∧PNp∧.Pq∧PNq	A521
	σ2→.pI½∧.qI½	A414, A497
	σ2→.pIq	

A537 pINp∨¬Pp∨¬PNp

Prueba:

(2)	Pp∧PNp⊃.pINp	A498
(3)	¬(Pp∧PNp)∨.pINp	(2)
	A537	(3)

A538 P(p⊃q)I.p⊃Pq (Prueba: A522, A492)

Déjasele al lector la prueba de etos tres esquemas, con los cuales concluiremos este capítulo.

A539 Pp→P(p∨q), A540 PNp→PN(p∧q), A541 P(p∧q)→Pp

El functor ‘P’ (=‘Es más bien verdad que’) juega un papel importantísimo en nuestras afirmaciones e inferencias usuales. (A diferencia de muchos otros functores de *Aj*, que se han escogido arbitrariamente para significar lo que significan, 'P' ha sido escogido por ser la inicial de la palabra '**potius**').

Cuando un hecho alcanza un grado de verdad de a lo menos 50%, pisa el umbral del ámbito constituido por las cosas más bien verdaderas. En este ámbito se halla, en un momento o aspecto dado, cualquier cosa que, en ese momento o aspecto, es o tan real como irreal, o más real que irreal. Pero cada cosa más bien real (o sea: o tan real como irreal, o bien más real que irreal) es tal que su ser más bien real es su propio existir, e.d. ella misma: eso es lo que nos dice el esquema A486.

La importancia de ese umbral, de esa línea de demarcación de lo **más bien** verdadero o real puede ponerse de relieve con la consideración siguiente. Sin una lógica de lo difuso (de lo gradual) no parece viable ningún tratamiento adecuado de la teoría de la evolución, pues, en la evolución, todo es cuestión de grados. Algunos hablan de restos fósiles de un hombre de hace ocho millones de años, y, sin duda con razón, otros objetan que no cabe denominar a nuestro antepasado de ese período 'hombre' con la misma naturalidad o propiedad con la que sí cabe denominar con tal vocablo al *homo sapiens*. Cabría inventarse una arbitraria línea de demarcación, y, colocada la misma, decir que lo que está más allá es, totalmente, no-hombre, mientras que lo que está más acá es, totalmente, hombre; pero con ese modo de hablar la evolución resulta incomprensible, pues no se vería entonces cómo hay un tránsito gradual; no puede haber gradualidad donde no hay grados, donde cada propiedad es tal que, o bien se la posee totalmente, o bien se deja totalmente de poseerla. Una línea sí puede, y seguramente debe, trazarse, pero no una frontera que separe el absolutamente sí del absolutamente no poseer determinada propiedad (la de ser humano, p.ej.), sino, p.ej., el poseer la propiedad en cuestión en una medida de a lo menos 50% (e.d. el ser más bien poseedor de la citada propiedad) del poseerla en medida inferior al 50% (e.d. del ser bastante no poseedor de la misma). Dónde quepa trazar la línea, o si somos o llegaremos a ser capaces de trazarla de manera aproximada o no, es otro cantar. Pero, a lo menos exploratoriamente y como hipótesis de trabajo, todas nuestras investigaciones giran en torno a líneas aproximadas que se trazan; sólo que no hay por qué entenderlas en el sentido de los pensadores antigradualistas, de los adeptos de la lógica clásica (en su lectura habitual), para los cuales el **sí** y el **no**, la verdad y la falsedad, no se dan por grados, sino que cada hecho o pseudohecho es o totalmente real o totalmente irreal. Antes bien, esas líneas conviene, a veces, trazarlas allí donde se pasa, de ser más falso que verdadero que la cosa de que se trate posee la propiedad que se esté considerando, a ser a lo menos tan verdadero como falso que esa cosa posee dicha propiedad. En la conversación corriente (en algunos contextos o entornos comunicacionales) y, en algunos casos, también en las disciplinas particulares del saber, es ese umbral del 50% verdadero, de lo más bien verdadero, el que juega un papel primordial. (No se descarta, empero, el que en determinados contextos del habla común o del saber puedan jugar un papel central otros umbrales —p.ej., el de lo no mucho más irreal que real, mirando hacia abajo, o el de lo al menos 75% real, mirando en la otra dirección.)

Podrían invocarse otros ejemplos a favor de la tesis de que en muchos saberes científicos desempeña un papel el functor 'más bien', e.d. 'P' (y pocos son, si es que los hay, aquellos saberes en que puede trabajarse con propiedades que no se den por grados, o sea: aquellos saberes en que la única negación que intervenga sea la clásica, que es la **super**negación, omitiéndose, en cambio, la negación débil, simple o natural, el 'N'). Tomemos otro botón de muestra: la dialectología sincrónica o, mejor, diacrónica; sin duda hay una frontera entre el latín y el romance, pero ¿es una frontera tal que lo que se halle más acá de la misma es, total y completamente, romance, mientras que lo que se halle más allá será, plena y enteramente, latín? ¡No! La frontera separará lo que es todavía más latín que romance de aquello que es más bien romance, e.d. que posee en medida de al menos 50% la propiedad de ser romance.

El esquema A484 nos dice que el ser una cosa o un hecho algo más bien real implica a la existencia o verdad de dicha cosa o hecho. A491 y A492 nos muestran que el ser algo un hecho totalmente real equivale a que sea más bien cierto que es totalmente real, y también a que sea totalmente cierto que es más bien real. A494 nos muestra que el functor 'P' es iterable sin cambio de significado: que sea más bien verdadero o cierto que Licinio es más bien alto equivale a que Licinio sea más bien alto.

A496 nos muestra que el que un hecho equivalga a su negación equivale a que ese hecho equivalga a lo igualmente real o irreal (que es, no se olvide, la autoequivalencia). Y A497 nos muestra que el que un hecho sea más bien real y, a la vez, más bien irreal es lo mismo que el que ese hecho equivalga a lo igualmente real e irreal (y por consiguiente —como lo muestra A498— es lo mismo que el que ese hecho sea tan real como irreal). Cualquier autoequivalencia es más bien real y más bien irreal a la vez (A499); y (A500) lo igualmente real e irreal es más bien real y también más bien irreal. A504 nos muestra que cualquier equivalencia es más bien falsa (pues no puede ser más que, o bien tan verdadera como falsa, o bien totalmente falsa). A517 constituye una versión reforzada del principio implicacional de abducción A390. Similarmente, A518 es una versión reforzada del otro principio implicacional de abducción para la negación débil, a saber. A389. (Ya anteriormente hemos encontrado muchas otras versiones del principio de abducción que son válidas en *Aj*; cf. p.ej. lo dicho en el cap. 8º —acerca de principios condicionales de abducción— y, sobre todo, la larga discusión que figura en los caps. 13º y 14º sobre este tema de la abducción, y cómo la aceptación o el rechazo de la misma caracteriza a los sistemas de lógica.) Esta versión, A517, es particularmente interesante, pues nos muestra que el que la negación de un hecho implique al hecho implica que ese hecho es más bien verdadero. Recuérdese que el que un hecho implique a otra cosa significa que el hecho en cuestión es a lo sumo tan real como esa cosa.

A520 nos muestra que el que un hecho implique a otro implica que el ser el primero más bien verdadero o real implica que también lo es el segundo. A521 nos muestra que el functor ‘más bien’ es distributivo respecto a la conyunción, en tanto que A522 nos muestra que ese functor es distributivo con respecto a la disyunción; el que Virgilio sea más bien gandul y más bien manirroto equivale a que sea más bien cierto que Virgilio es gandul y manirroto; y el que el rey de Tailandia sea o más bien abúlico o más bien cruel equivale a que sea más bien cierto que ese rey es o abúlico o cruel. El esquema A523 nos muestra que cualquier instancia del principio (simple) de tercio excluso es más bien verdadera (lo que de ningún modo quiere decir que deba siempre ser totalmente verdadera, claro está). Y el esquema A524 nos dice lo propio con respecto a cualquier instancia del principio simple de no contradicción. Pero, de nuevo, el que sea más bien verdadera o real cualquier instancia del principio simple de no contradicción de ningún modo conlleva que cualquier contradicción haya de ser totalmente falsa; lo único que significa es que cualquier contradicción es **más bien falsa** pero de ser más bien falsa a ser del todo falsa puede haber, y hay en los más casos, una infinita distancia; las más contradicciones son verdaderas y falsas a la vez, y sólo algunas contradicciones extremas, las **super**contradicciones, son totalmente falsas. La verdad, pues, del principio de no contradicción —e incluso el hecho, enunciado mediante el esquema A524, de que cada contradicción es más bien falsa— de ninguna manera nos impone renunciar al reconocimiento de la verdad de muchísimas contradicciones, de un número infinito de contradicciones verdaderas que existen de hecho (verdad parcial, ciertamente, nunca superior al 50%, pero real en alguna medida y, a menudo, en medidas que o alcanzan el umbral del 50% o le andan rondando).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 19º.— LOS HECHOS BASTANTE VERDADEROS O REALES

Algunos hechos son, a la vez, más bien verdaderos o reales y más bien irreales o falsos. Eso le sucede, p.ej., a cualquier autoequivalencia.

En cambio, nada puede ser, a la vez, bastante verdadero y bastante falso, porque algo es bastante verdadero sólo si es más verdadero que falso; y algo es bastante falso sólo si es más falso que verdadero. (Ya a estas alturas sería ocioso recalcar que no porque algo sea bastante verdadero ha de ser totalmente verdadero; ni porque sea algo bastante falso ha de ser totalmente falso.) Por otro lado, para que una cosa sea verdadera, no le hace falta ser más bien verdadera, sino que es suficiente con que sea verdadera en uno u otro grado, por mínimo que sea.

Vamos ahora a estudiar este functor 'bastante' —en nuestra notación '℘'. Porque la utilidad del mismo es bastante considerable.

A542 ¬PNp∧pI℘p

Prueba:

(2)	¬PNp⊃Pp	A483
	σ2⊃.PpIp	A486
	σ2⊃.¬PNp∧pI.¬PNp∧Pp	
	σ2⊃.σδ2I℘p	df32
(3)	PNp⊃.¬PNpI0	
	σ3⊃.¬PNp∧PpI0∧.¬PNp∧pI0	
	σ3⊃.¬PNp∧pI.¬PNp∧Pp	
	σ3⊃.σδ3I℘p	df32
	A542	(2), (3)

A544 ℘p≡¬PNp

Prueba:

(2)	¬PNp⊃.¬PNp∧Pp	A483
	s2⊃℘p	df32
(3)	℘p⊃¬pNp	A542
	A544	(2), (3)

A548 ℘p⊃.℘pIp

Prueba:

(2)	¬PNp∧p⊃.¬PNp	
	σ2⊃.¬PNpI1	
	σ2⊃.¬PNp∧pI.1∧p	
(3)	σ2⊃.σδ2Ip	
	A548	(3), A542

A543 Np\p&pI℘p

Prueba:

(2)	L(Np\p)IL¬PNp	A516
	σ2I¬PNp	
(3)	σ2∧pI.δ2∧p	(2)
(4)	Np\p&pI.¬PNp∧p	(3)
	A543	(4), A542

A544/1 ℘Np≡¬Pp (Prueba: A544)

A545 ℘p→¬PNp (Prueba: A544)

A546 Np\p≡℘p (Prueba: A544, A516)

A546/1 ¬℘p≡.p→Np (Prueba: A546, A441)

A547 ½\p≡℘p (Prueba: A544, A513)

A547/1 ¬℘p≡.p→½ (Prueba: A547, A441)

A549 ℘p→p (Prueba: A548, A379)

A550 ℘℘pI℘p

Prueba:

(2)	℘℘p→℘p	A549
(3)	℘p⊃.℘pIp	A548
	σ3⊃.¬PN℘p∧℘pI.¬PNp∧p	
	σ3⊃.℘℘pI℘p	A542
(4)	℘p→℘℘p	(2), A379
	A550	(2), (4)

A552 Np\p→℘p (Prueba: A551, A510)

A551 ½\p→℘p

Prueba:

(2)	℘p⊃℘℘p	A550
	σ2⊃.½\℘p	A547
	σ2⊃.½→℘p	A461
(3)	℘p⊃.½\p	A547
	σ3⊃.½\pI½	A439
	σ3⊃.δ2⊃.½\p→℘p	A420/1
(4)	℘p⊃.½\p→℘p	(2), (3)
(5)	¬℘p⊃¬(½\p)	A547
	σ5⊃.½\p→℘p	
	A551	(4), (5)

A553 ℘p⊃.p→q→℘q

Prueba:

(2)	℘p⊃.½\p	A547
	σ2⊃.p→q→.½\q	A453
	σ2⊃.σδ2→℘q	A551

A554 p→q→.℘p→℘q

Prueba:

(2)	℘q\℘p⊃℘p	A463
	σ2⊃.p→q⊃.p→q∧℘p∧℘q	A553
	*σ2⊃.p→q∧.℘pIp∧.℘pIq	A548
	*σ2⊃.℘p→℘q	
(3)	p→q⊃.σ2⊃δδ2	(2)
	σ3⊃.℘p→℘q	A441
	σ3→.℘p→℘q	

A555 ℘p∨℘qI℘(p∨q)

Prueba:

(2)	℘p∨℘→℘(p∨q)	A554, A397
(3)	p∨q→p→.℘(p∨q)→℘p	A554
(4)	p∨q→q→.℘(p∨q)→℘q	A554
(5)	δ3∨δ4	(3), (4), A377/1, A415
(6)	℘(p∨q)→.℘p∨℘q	(5), A394
	A555	(2), (6)

A556 ℘p∧℘qI℘(p∧q)

Prueba:

(2)	℘(p∧q)→.℘p∧℘q	A554, A395
(3)	p→(p∧q)→.℘p→℘(p∧q)	A554
(4)	q→(p∧q)→.℘q→℘(p∧q)	A554
(5)	δ3∨δ4	(4), A377/2, A415
(6)	℘p∧℘q→℘(p∧q)	(5), A396
	A556	(2), (6)

A557 p\Np&NpI℘Np (Prueba: A543)

A558 ½\p&pI℘p (Prueba: A543, A510)

A559 HpIH℘p

Prueba:

(2)	H℘p→℘p	
	σ→p	A549
(3)	HH℘p→Hp	(2), A425
(4)	H℘p→Hp	(3)
(5)	Hp⊃.NpI0	
	σ5⊃.p⊃.Np\p	A466

A560 HpI℘Hp

Prueba:

(2)	℘Hp→Hp	A549
(3)	Hp⊃HHp	
	σ3⊃.NHpI0	
	σ3⊃.Hp⊃.NHp\Hp	A466
(4)	Hp→.NHp\Hp&Hp	(3), A395
	σ4→℘Hp	A543
	A560	(2), (4)

(6)	Hp⊃.Np\p&p	(5)
	σ6⊃℘p	A543
	σ6⊃.℘pIp	A548
	σ6⊃.H℘pIHp	
	σ6⊃.Hp→H℘p	
(7)	Hp→H℘p	(6), A379
	A559	(4), (7)

A559/1 Hp→℘p (Prueba: A559)

A561 ℘p→Pp (Prueba: df32)

A561/1 ℘p⊃.℘pIPp

Prueba:

(2)	℘p⊃.℘p∧Pp	A561
	σ2⊃.℘pIp∧.PpIp	A548, A486
	σ2⊃.℘pIPp	

A562 ℘PpI℘p

Prueba:

(2)	℘℘p→℘Pp	A554, A561
(3)	℘p→℘Pp	(2), A550
(4)	℘Pp→Pp	A549
	σ4→p	A484
(5)	℘℘Pp→℘p	(4), A554
(6)	℘Pp→Pp	(5), A550
	A562	(3), (6)

A563 P℘pI℘p

Prueba:

(2)	P℘p→℘p	A484
(3)	℘℘p→P℘p	A561
(4)	℘p→P℘p	(3), A550
	A563	(2), (4)

A564 ℘p∨PNp (Prueba: A544)

A565 PpI.℘p∨PSp

Prueba:

(2)	℘p∨P(p∧Np)→Pp	A561, A541, A397
(3)	℘p⊃.℘pIPp	A561/1
	σ3⊃.Pp→℘p	
(4)	¬℘p⊃.p→Np	A546/1
	σ4⊃.Np→p⊃.pINp	
	σ4⊃.Pp⊃.pINp∧.PpIp∧.pI½	A505, A486, A496
	σ4⊃.Pp⊃.PpI½∧.pINp	
	σ4⊃.Pp⊃.PpI½∧.½→.pINp	A420/1
	σ4⊃.Pp⊃.Pp→.pINp	
	σ4⊃.Pp→.pINp	A379
(5)	σ4⊃.Pp→P(p∧Np)	A498, A521
(6)	Pp→.℘p∨P(p∧Np)	(3), (5), A394
	A565	(2), (6), df09

A566 ℘p∨℘Np∨PSp (Prueba: A565, A544/1)

A567 Pp⊃.p\q→℘q

Prueba:

(2)	℘p⊃.p\q→(p→q)∧℘p	df17
	σ2⊃.p\q→℘q	A553
(3)	PSp⊃.pI½	df09, A521, A497
	σ3⊃.p\q→.½\q	
	σ3⊃.σδ3→℘q	A551
	A567	(2), (3), A565

A568 p\q→.Pp→℘q (Prueba: A567, A461, A420, A561/1)

Para clausurar este capítulo, conviene hacer notar el siguiente punto. En la clasificación que hicimos de los functores de afirmación [al comenzar el cap. 18º, págª 105], señalé un distingo que hay que hacer entre functores afirmativos fuertes (un functor afirmativo ♀ es **fuerte** ssi es válido el esquema ⌜♀p→p⌝, sin ser válido el esquema ⌜p→♀p⌝), functores afirmativos **débiles** (aquellos en que es lo inverso lo que sucede —tal es, p.ej., el caso del functor 'L') y functores afirmativos **redundantes** (aquellos en que son válidas ambas implicaciones; tal es el caso 'NN'); podríamos postular un cuarto grupo de functores afirmativos en que ninguna de las dos cosas sucede, pero tales functores ofrecerían menor interés.

Ahora bien, dentro de los functores afirmativos fuertes hay que hacer un distingo entre functores afirmativos **constrictivos** y functores afirmativos **inconstrictivos**. Un functor afirmativo fuerte, ♀, es constrictivo ssi para algún ⌜p⌝ (para cualquier ⌜p⌝ que no alcance determinado umbral veritativo, o sea: que sea verdadero en medida inferior a cierto umbral; o —dicho de otro modo— que supere cierto techo o tope de falsedad) ⌜p⌝ es verdadero, siendo ⌜♀⌝ del todo falso, e.d. se tiene —para **ese** ⌜p⌝: ⌜p∧¬♀p⌝. Que 'H' es un functor constrictivo lo revela el teorema siguiente: ⌜½∧¬H½⌝, cuya demostración se deja al lector. Que '℘' es constrictivo lo revela otro teorema similar ⌜½∧¬℘½⌝ (para su demostración utilícese: A371, A547/1). Que también es 'P' un functor constrictivo lo probaremos más tarde, al demostrar que hay fórmulas, p.ej. ⌜X½⌝ (que se lee: 'Existe (=es verdadero) el hecho de que es muy real lo igualmente real e irreal'), que, siendo verdaderas, son tales, sin embargo, que el resultado de prefijar 'P' es totalmente falso.

Otra clasificación que vale la pena hacer de los functores afirmativos fuertes es la división entre functores **amenguantes** y functores **inamenguantes**; un functor asertivo fuerte, ♀, es amenguante ssi, para algún ⌜p⌝, se tiene: ⌜♀p\p∧♀p∧p⌝: es verdad que p, y también lo dicho por ⌜♀p⌝, pero esto último es **menos** verdadero o real que el hecho de que p; 'H', 'P' y '℘' son inamenguantes, como se ve por la validez o teorematicidad de los esquemas: ⌜Hp⊃.HpIp⌝, ⌜Pp⊃.PpIp⌝. ⌜℘p⊃.℘pIp⌝. El functor 'X' que estudiaremos más tarde, es amenguante. (Una dilucidación ulterior de este tema de la clasificación de los functores afirmativos se encontrará más abajo —al comienzo del capítulo 22º, págᵃˢ 121ss.)

A partir de ahora se irán produciendo nuevos y más frecuentes cortes en nuestras cadenas demostrativas. Los eslabones perdidos así los reconstruirá el lector mediante el uso del Anejo 1 del libro. Un esquema teoremático que figure en tal anejo puede ser aducido en una prueba aunque él mismo no aparezca probado en el cuerpo del libro.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 20º.— EL FUNCTOR DE AFIRMACIÓN Y NEGACIÓN CONJUNTAS, ‘S’

Cada fórmula de la forma ⌜Sp⌝ es una contradicción. Algunas de esas fórmulas son absurdas, supercontradictorias, no en virtud del functor ‘S’, sino de la propia naturaleza de los conyuntos, dada la cual, en **esos** casos, la mera negación ‘N’ equivale a la supernegación ‘¬’. Otras son verdaderas.

El functor de contradictorialidad, ‘S’, puede leerse así: ⌜Sp⌝ se leerá tanto «Es, y no es, verdad que p» como «Ni es, ni deja de ser, verdad que p» (en virtud de las leyes de DeMorgan (A127 y A128) y de la ley de involutividad de la negación débil (A106)).

Vamos a exponer, en este breve capítulo, unos cuantos esquemas teoremáticos con ‘S’; en general, se deja al lector, como ejercicio, el probarlos y el encontrar lecturas apropiadas.

A621 SpISNp A622 SSpISp

A623 Sp→NSq

Prueba:

(2) Sp→N½ A405, df11, df09

σ2→½ A371

σ2→NSq df09, df11, A404

Mientras que los esquemas A106 (involutivdad), A127 y A129 (DeMorgan) caracterizan a la negación ‘N’ como una negación de DeMorgan, el esquema A623, sobreañadido a esos otros tres, caracteriza a la negación ‘N’ como una negación de Kleene.

Es interesante el esquema A623, porque nos muestra que una contradicción cualquiera **implica** a una instancia cualquiera del principio de no contradicción, e.d. a cualquier instancia del principio de tercio excluso, pues ambos principios son equivalentes. La teorematicidad de A623 hace de *Aj* un sistema de Kleene

A624 NSpI.p∨Np A625 Sp→½ (vide prueba de A623)

A626 S1I0 A627 S0I0 A628 ¬SpI.Hp∨¬p A628/1 Hp∨Sp∨¬p

A629 ¬SpIH(p∨Np) A630 ¬SpI¬(p∧Np) A631 ¬SHp A632 ¬S¬p

A633 ¬SLp A634 PNSp (Prueba: A483, A522, A624)

A635 ¬℘Sp (Prueba: A634, A544)

El esquema A624 nos muestra que cada negación de una contradicción es una instancia del principio (simple) de tercio excluso. De ahí que el sentido de A623 sea que, siendo una contradicción cualquiera verdadera **a lo sumo** en una medida del 50%, y siendo una instancia cualquiera del principio simple de tercio excluso verdadera **por lo menos** en una medida del 50%, cualquier contradicción implica a cualquier instancia del principio de tercio excluso. Nuestro sistema contradictorial permite la contradicción, y hasta postula la verdad de determinadas contradicciones (no, ciertamente, de cualesquiera contradicciones); pero es una verdad limitada, una minusverdad, pues no se trata nunca de verdad plena, ni siquiera de verdad en alguna medida superior al 50%; ¡no!, cualquier contradicción es más bien falsa (como lo muestra A364) —lo que no impide que algunas contradicciones sean también más bien verdaderas, a saber: aquellas que son exactamente tan verdaderas como falsas; es completamente falso, pues, que haya contradicciones **bastante verdaderas** —como lo muestra el esquema A635.

El esquema A626 nos muestra que es supercontradictorio decir que lo absolutamente real es verdadero y falso (que ese sea supercontradictorio se debe, no al functor de contradictorialidad, ‘S’, sino a la naturaleza propia de aquello acerca de lo cual, en ese caso, se afirmaría la contradicción, lo absolutamente real, lo cual, siendo real o verdadero absolutamente, es tal que su negación es absolutamente falsa o irreal). Otro tanto cabe decir con respecto a 0, e.d. a lo absolutamente irreal o falso (esquema A627). El esquema A628 nos muestra que el que sea completamente falso que determinado hecho sea, a la vez, verdadero y falso equivale a que o bien ese hecho sea totalmente real, o bien sea totalmente irreal.

El esquema A628/1 es uno de los principios de tricotomía que hay en *Aj* y, más concretamente, es un principio de alternatividad antagónica. Nos muestra ese principio que un hecho cualquiera dado es, o totalmente verdadero (real), o a la vez verdadero y falso (real e irreal), o sea: contradictorio), o totalmente falso (irreal); una instancia de A628/1 es: O Calomarde es totalmente servil, o es servil sin serlo, o no es servil en absoluto.

El esquema A629 nos muestra que el que sea de todo punto falso que un hecho es, a la vez, verdadero y falso equivale a que sea enteramente cierto que ese hecho es o real o irreal. Como cada hecho enunciable mediante una oración de la forma: ‘Es del todo falso que…’ (⌜¬p⌝) o de la forma ‘Es enteramente cierto que…’ (⌜Hp⌝), o de la forma ‘Es, hasta cierto punto por lo menos, verdad que…’ (⌜Lp⌝), es o totalmente verdadero o totalmente falso, los esquemas A631, A632 y A633 nos muestran que es siempre completamente falso decir de lo mentado por alguna oración de una de esas tres formas que es verdadero y falso, e.d. que no es ni verdadero ni falso (o que ni es ni deja de ser verdadero; pues esas tres lecturas son legítimas con respecto al functor ‘S’). Veamos ahora otros cuantos esquemas en que figura el functor ‘S’:

A636 Sp→p∧.Sp→Np (Prueba: df09, A395)

A637 SpIp≡PNp (Prueba: A506, df09)

A638 SpIN≡Pp (Prueba: A637)

A639 Sp\p≡℘p (Prueba: df09, A450/1, A546)

A640 p\NSp≡℘Np (Prueba: A624, A451/1, A546)

A641 p→Sp≡PNp (Prueba: A639, A544, A441)

A642 Np→Sp≡Pp (Prueba: A641)

A643 p→SpI.pISp

A644 pISp∨.Sp\p (Prueba:: A643, A44/1)

A645 NpISp∨.p\NSp (Prueba: A644, A621, A460)

A646 SpIp→PNp (Prueba: df09, A518)

A647 Sp\p→℘p (Prueba: df09, A552)

A648 SpINp→Pp (Prueba: A646, A621)

A649 p\NSp→℘Np (Prueba: A647, A460, A621)

A650 pINpIPSp (Prueba: A498, A521, df09)

A651 ℘p∨℘NpI℘NSp (Prueba: A555, A624)

A652 PS½ (Prueba: A650, A371)

A653 S½I½ (Prueba: A371)

A654 S½INS½ (Prueba: A653, A371)

A655 S½ (Prueba: A652, A484)

A656 ½∧N½ (Prueba: A655, df09)

A657 pIp∧N(pIp) (Prueba: A656, A372)

A658 PS(pIp) (Prueba: A652, A372)

A659 S½∧NS½ (Prueba: A655, A656)

A660 S(pIp)∧NS(pIp) (Prueba: A659, A372)

El esquema A655 es una de las infinitas contradicciones verdaderas que son teoremas del sistema *Aj*; el esquema A656 dice lo mismo de modo más explícito: lo igualmente real e irreal es real (verdadero) e irreal (falso); con otras palabras: es, a la vez, verdadero y falso que existe lo igualmente real e irreal; o también. Ni es ni deja de ser verdad (y, asimismo, ni es ni deja de ser falso) que existe lo igualmente real e irreal. Además, como lo muestra el esquema A657, cada autoequivalencia es, a la vez, verdadera y falsa, o sea: ni es ni deja de ser verdadera (y: ni es falsa ni deja de serlo).

Por otro lado —y como lo muestran el teorema A659 y el esquema teoremático A660— de cada fórmula que diga que una autoequivalencia es verdadera y falsa hay que decir que lo dicho por tal fórmula es, a la vez, verdadero y falso, o sea: lo igualmente real e irreal es real e irreal, y, a la vez, no es verdad que sea real e irreal. Y naturalmente tenemos la siguiente cadena de teoremas de *Aj*.

½∧N½

S½

NS½

S½∧NS½

SS½

NSS½

SS½∧NSS½

SSS½

NSSS½

SSS½∧NSSS½

SSSS½

Nssss½

SSSS½∧NSSSS½

SSSSS½

NSSSSS½

SSSSS½∧NSSSSS½

SSSSSS½

etc. etc. hasta el infinito.

(Para finalizar este capítulo diremos que el motivo por el que se ha escogido ‘S’ para representar la conyunción de la afirmación y de la negación —e.d. la contradictorialidad de un hecho— es el deseo de evocar la **semi**verdad de cualquier hecho que sea efectivamente contradictorio.)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 21º.— LA SUPERCONYUNCIÓN

Tuvimos ya anteriormente ocasión de demostrar un par de esquemas teoremáticos en los cuales figuraba el functor de superconyunción ‘•’, a saber: A362 y A367.

La diferencia entre la superconyunción ‘no sólo… sino también’ (o ‘no sólo… sino que además’ o ‘así como también es verdad que’) y la mera conyunción ‘y’, en sus usos más normales, estriba en lo siguiente. Al unir dos oraciones por una mera conyunción, se está diciendo algo que será tan verdadero como el menos verdadero de los dos conyuntos, si es que uno es menos verdadero que otro; y, si son igualmente verdaderos, se estará diciendo, al unirlos con una mera conyunción, algo tan verdadero como cada uno de ellos. En cambio, al unir dos oraciones mediante una superconyunción se estará diciendo algo que puede ser menos verdadero que cada uno de los conyuntos. En efecto: el ‘no sólo… sino también’ envuelve una insistencia en una verdad **correlacionada** de ambos conyuntos, en un darse lo dicho por el uno junto con lo dicho por el otro. Algunos usos —menos frecuentes, salvo en determinados contextos— de ‘y’ vehiculan esa misma idea; p.ej., cuando un superior dice: ‘Lo vas a hacer y lo vas a hacer’, parece probable que no se trate de una redundancia que, por la idempotencia de la mera conyunción (esquema teoremático A119), querría decir lo mismo que ‘Lo vas a hacer’. El ‘y’ parece, en ese caso, no ser idempotente, e.d. una oración de la forma «p y p», donde el ‘y’ es de ese tipo peculiar, puede diferir, en su contenido de verdad y de sentido, de ⌜p⌝. (Probablemente sean **super**conyuntivas las ocurrencias acentuadas de ‘y’, como cuando decimos ‘Me gusta el teatro ý el cine’; el acento, como los otros elementos prosódicos o suprasegmentales, es de difícil tratamiento lingüístico). Asimismo, en algunas ocasiones, la insistencia, la correlación o interacción de los conyuntos propia de la superconyunción, puede expresarse por mera repetición de la oración o de un constituyente de la misma: ‘¡Es un agua limpia, limpia!’ no parece significar lo mismo que ‘¡Es un agua limpia!’ sino que marca una insistencia, o sea: un correlacionarse su limpieza consigo misma en cierto modo, en virtud del alto grado de realidad de la limpieza del agua en cuestión. Así pues, lo dicho con esa oración es ‘No sólo está limpia esa agua, sino que también es verdad que está limpia’, indicándose con el ‘no sólo… sino que también’ esa misma insistencia. Y, como vamos a ver en el capítulo siguiente, «no sólo p, sino que también p» o «p así como p», para abreviar, equivale a «Es muy cierto que p». Con lo cual la oración sobre el agua equivale a ‘Es un agua muy limpia’. Cuándo, en qué contextos, esa idea de verdad intercorrelacionada entre los conyuntos se vehicula mediante la partícula discontinua ‘no sólo… sino (que) también’, o ‘así como también (es verdad que)’; cuándo, en cambio, se vehicula por el ‘y’ —al cual viene asignada entonces una función diferente de la mera conyunción—, o por repetición del constituyente de la oración que se quiere realzar; todo eso constituye materia para una indagación que no entra en los límites de este libro.

¿En qué consiste esa intercorrelación veritativa entre los miembros de una superconyunción? En lo siguiente: si ambos conyuntos son, a la vez, un tanto falsos y también un tanto verdaderos, entonces lo dicho por la superconyunción de ambos es menos verdadero que lo dicho por la mera conyunción; y también es menos verdadero lo dicho por la superconyunción que lo dicho por la mera conyunción si uno de los dos miembros es, a la vez, un tanto verdadero y un tanto falso, mientras que el otro es sólo infinitesimalmente falso. El decir de algo que es un tanto verdadero o real —o, respectivamente, un tanto falso o irreal— es decir que su grado de verdad o realidad excede a lo meramente infinitesimal. Ahora bien: al ser, en los casos especificados, la superconyunción entre los dos miembros menos verdadera que la conyunción entre ambos, quiere decirse que esa superconyunción es menos verdadera que cada uno de esos dos miembros conyuntivos (en virtud del esquema A448). Mas ¿por qué es menos verdadera, en esos casos, la superconyunción que cada uno de los dos miembros? Justamente por la insistencia que supone o envuelve la superconyunción en la verdad **conjunta** de ambos miembros, y por no ser éstos ni totalmente verdaderos ni totalmente falsos ni ambos a una separados de la verdad completa tan sólo por una diferencia infinitesimal, ínfima; dada esta circunstancia, la insistencia en la verdad conjunta, intercorrelacionada, de ambos miembros conyuntivos da por resultado un mensaje menos verdadero que la afirmación de cada uno de los conyuntos por separado; el darse ambos conjunta e intercorrelacionadamente es un hecho menos real que cada uno de los dos hechos así conjuntados, puesto que, en esa conyunción intercorrelacionante, la falsedad o irrealidad, un tanto existente, de uno de los dos conyuntos afecta al otro, repercutiéndose en esa baja del valor de verdad del resultado superconyuntivo.

Veámoslo con un ejemplo; supongamos (es un suponer) que tanto Juan de Mena como el Marqués de Santillana son, ambos, poetas un tanto buenos pero sin llegar, ni con mucho, a ser totalmente buenos poetas; entonces, lo dicho por 'No sólo es un buen poeta Juan de Mena sino que también lo es el Marqués de Santillana' (al insistir en la calidad poética conjunta o intercorrelacionada de ambos escritores —y no sucediendo que sean esas dos calidades poéticas ni totalmente ni casi totalmente reales) es algo menos verdadero tanto que lo dicho por 'Juan de Mena es un buen poeta' como que lo dicho por 'El Marqués de Santillana es un buen poeta'. De ahí que, en el caso de un ⌜p⌝ y un ⌜q⌝ tales que, siendo ambos verdaderos en algún grado no infinitesimal (e.d., siendo ambos un tanto verdaderos), no sean, en absoluto, ambos infinitamente verdaderos, resulta que el valor de verdad de ⌜p•q⌝ ha de ser diferente de (menor que) el valor de verdad de ⌜p⌝ y también diferente de (menor que) el valor de verdad de ⌜q⌝; ha de ser un *tertium quid*, que no puede deducirse del valor de verdad de uno de los conyuntos con sólo saber, p.ej., que el otro conyunto es igual de verdadero o más que el conyunto dado (mientras que, sabiendo cuál es el valor de verdad de ⌜p⌝ y sabiendo que ⌜q⌝ es igual de verdadero, o más verdadero, que ⌜p⌝, sabemos cuál es el valor de verdad de ⌜p∧q⌝, a saber: el mismo que el de ⌜p⌝). Quizá con respecto a la superconyunción '•' tenga aplicación alguna de las opiniones emitidas sobre la irreducibilidad de «p y q» tanto a ⌜p⌝ como a ⌜q⌝; pero el principio de simplificación (p•q→p y p•q→q) vale también para la superconyunción (cf. A367).

Dicho todo eso, a título de consideraciones preliminares, pasemos a abordar la demostración de esquemas teoremáticos en que esté involucrada la superconyunción.

A661 p∧q⊃.p•q (Prueba: A03, df23) A661/1 p•q≡.p∧q (Prueba: A661, A362)

A661/2 p¹∧pIq⊃.q•r•sI.s•r•p∧.s•p¹•r (Prueba: A05)

A661/3 qIp⊃.q•r•sI.s•r•p∧.s•p•r (Prueba: A661/2)

A661/4 pIq⊃.p•r•sI.s•r•q∧.s•p•r

Prueba:

(2) pIq⊃.p∧qIq

σ2⊃δA661/4 A661/2

A661/5 p•r•sI.s•r•p∧.s•p•r

(Prueba: A661/4)

A661/6 pIq⊃.q•r•s→.s•p•r

Prueba:

(2)	pIq⊃.p•r•sI.s•r•q∧.s•q•r	A661/3
	σ2⊃.s•r•p∧(s•p•r)I.s•r•q∧.s•q•r	A661/5
	σ2⊃.s•p•rI.s•r•q∧(s•q•r)∨.q•p•r	
	σ2⊃.s•p•rI.q•r•s∨.s•p•r	A661/5
	σ2⊃.q•r•s→.s•p•r	

A661/7 p•q•r→.q•r•p

Prueba:

(2)	p•q•r→.r•p•q	A661/5
	σ2→.q•r•p	A661/5

A661/8 p•q•r→.p•r•q

Prueba:

(2)	p•q•r→.r•q•p	A661/5
	σ2→.p•r•q	A661/5

A662 pIq⊃.s•p•r→.s•r•q

Prueba:

(2)	pIq⊃.qIp	
	σ2⊃.p•r•s→.s•q•r	A661/6
	σ2⊃.σδ2→.s•r•q	A661/8
(3)	s•p•r→.p•r•s	A661/7
(4)	δ2⊃.s•p•r→.s•r•q	A363, (3)
	A662	(2), (4)

A663 p•q•rI.q•p•r

Prueba:

(2)	p•q•r→.q•r•p	A661/7
	σ2→.q•p•r	A661/8
(3)	p•p•r→.p•q•r	como (2)
	A663	(2), (3)

A664 p•q•rI.q•r•p

Prueba:

(2)	q•r•p→.r•p•q	A661/7
	σ2→.p•q•r	A661/7
	A664	A661/7, (2)

A665 p•q•rI.r•p•q

Prueba:

(2)	p•q•r→.q•r•p	A661/7
	σ2→.r•p•q	A661/7
(3)	r•p•q→.p•q•r	A661/7
	A665	(2), (3)

A666 p•1Ip (Prueba: A04)

A667 1•pIp

Prueba:

(2)	p•1•1I.1•p•1	A663
(3)	p•1I.1•p•1	(2), A666
	σ3I.1•p	A666
	1•pIp	(3), A666

A668 p•q•rI.p•r•q

Prueba:

(2)	p•r•q→.p•q•r	A661/8
	A668	(2), A661/8

A668/2 p∧q•rI.r•p∧.r•q

Prueba:

(2)	p∧q•r•1I.1•r•q∧.1•p•r	A661/2
	σ2I.r•q•1∧.1•p•r	A664
	σ2I.r•q•1∧.r•p•1	A668/1
	σ2I.r•q∧.r•p	A666
	σ2I.r•p∧.r•q	
	A668/2	(2), A666

A671 pIq→.p•rI.q•r

Prueba:

(2)	pIq→.r∧r•pI.r∧r•q	A670
	σ2→.p•rI.q•r	A668/3

A673 p•q•rI.p•.q•r

Prueba:

(2)	p•rI.r•p	A672
(3)	p•r•qI.r•p•q	(2), A671
(4)	r•qI.q•r	A672
(5)	r•q•pI.q•r•p	(4), A671
(6)	p•q•rI.p•r•q	A668
	σ6I.r•p•q	(3)
	σ6I.r•q•p	A668
	σ6I.q•r•p	(5)
	σ6I.p•.q•r	A672

A676 p→q∧(r→s)→.p•r→.q•s

A668/1 p•q•rI.r•q•p

Prueba:

(2)	p•q•I.r•p•q	A665
	σ2I.r•q•p	A668

A668/3 p∧p•qI.q•p (Prueba: A668/2)

A669 p•1•qI.p•q (Prueba: A668, A666)

A670 pIq→.r•pI.r•q

Prueba:

(2)	pIq⊃.r•p•1→.r•1•q	A662
	σ2⊃.r•p→.r•q	A666, A669
(3)	qIp⊃.r•q→.r•p	como (2)
	A670	(2), (3)

A672 p•qI.q•p

Prueba:

(2)	p∧pIp⊃.p∧p•qI.p•q	A671
	σ2⊃.q•pI.p•q	A668/3
	A672	(2)

A674 p→q→.p•r→.q•r

Prueba:

(2)	p∧qIp→.p∧q•rI.p•r	A671
	σ2→.r•p∧(r•q)I.p•r	A668/2
	σ2→.p•r∧(q•r)I.p•r	A672

A675 p→q→.r•p→.r•q (Prueba: A674, A672)

A677 p•0I0 (Prueba: A362)

A678 0•pI0 (Prueba: A362)

A679 Hp∨¬p⊃.p•qI.p∧q

(Prueba: A671, A677, A666)

A680 ¬Sp⊃.p•qI.p∧q (Prueba: A628, A679)

A681 ¬Sp⊃.q•pI.q•p (Prueba: A680, A672)

Prueba:

(2) p→q→.p•r→.q•r A674

(3) r→s→.q•r→.q•s A675

(4) σ2∧σ3→.δ2∧δ3 (2), (3), A414

σ4→.p•r→.q•s A386

A683 p•(q∨r)I.p•q∨.p•r

Prueba:

(2) q∨rIq⊃.p•(q∨r)I.p•q A670

(3) q∨rIr⊃.p•(q∨r)I.p•r A670

(4) p•(q∨r)→.p•q∨.p•r (2), (3), A377, A394

(5) p•q→.p•.q∨r A675

(6) p•r→.p•.q∨r A675

(7) p•q∨(p•r)→.p•.q∨r (5), (6), A397

A683 (4), (7)

A682 p•(q∧r)I.p•q∧.p•r

(Prueba: A668/2, A672)

A684 p•¬pI0 (Prueba: A362)

A685 Hp•qI.Hp∧q

Prueba:

(2) HpI1⊃.Hp•qI(1•q)∧.Hp∧qI.1∧q A671

σ2⊃.Hp•qIq∧.Hp∧qIq A667

σ2⊃.Hp•qI.Hp∧q

(3) HpI0⊃.Hp•qI(0•q)∧.Hp∧qI.0∧q A671

σ3⊃.Hp•qI0∧.Hp∧qI0 A678

σ3⊃.Hp•qI.Hp∧q

A685 (3), (2)

A686 ¬p•qI.¬p•q (Prueba: A685 (+ df03))

A687 pIq∧(rIs)→.p•rI.q•s

Prueba:

(2) pIq→.p•rI.q•r A671

(3) rIs→.q•rI.q•s A670

(4) σ2∧σ3→.δ2∧δ3 (2), (3), A414

σ4→.p•rI.q•r

A688 P(p•q)→.Pp•Pq

Prueba:

(2) P(p•q)→.Pp∧Pq A362, A521, A520

σ2⊃.PpIp∧.PqIq A486

σ2⊃.p•qI.Pp•Pq A687

(3) P(p•q)⊃.P(p•q)I(p•q)∧.p•qI.Pp•Pq (2), A486

σ3⊃.P(p•q)→.Pp•Pq

A688 (3), A379

A688/1 ℘(p•q)→.℘p•℘q (Prueba similar, sólo que aduciendo: en lugar de A521, A556; y, en lugar de A486, A548; y en vez de A520, A554)

A689 H(p•q)I.Hp∧Hq

Prueba:

(2) H(p•q)→.Hp∧Hq A362, A425

(3) Hp∧Hq⊃.p•qI.p∧q A679

σ3⊃.H(p•q)I.Hp∧Hq

σ3⊃.Hp∧Hq→H(p•q)

σ3⊃.Hp∧Hq→H(p•q)

A689 (3), (2), A379

A690 ¬p•¬qI¬(p∨q) (Prueba: A686) A690/1 ¬(p•q)I.¬p∨¬q (Prueba: A661/1, A342)

A691 L(p•q)I.Lp∧Lq (Prueba: A661/1, A341) A692 Lp•qI.p&q (Prueba: A685, A671)

A693 p•q∧r≡.p∧r•.q∧r (Prueba: A661/1 (+ A315))

A694 p•q∨r≡.p∨r•.q∨r (Prueba: A661/1 (+ A316))

Los esquemas A670 y A671 nos permiten extender —demostrando lo correcto de la extensión mediante inducción matemática— al functor '•' la regla de inferencia rinf32. La prueba por inducción matemática es exactamente igual —a partir de esos esquemas— que la que dimos, al probar la corrección de rinf32, con respecto a los functores 'I', 'B' y '↓'. Por eso, en adelante, entenderemos rinf32 como autorizando el reemplazamiento de ⌜p⌝ por ⌜q⌝ en una fórmula ⌜r⌝ siempre que tengamos como premisa dada ⌜pIq⌝ y siempre que ⌜p⌝ sólo esté afectado en ⌜r⌝ por functores, cada uno de ellos «definido», trivialmente, a partir de sí mismo. Y, como —a estas alturas— omitimos ya cualquier mención explícita de rinf32 (nos abstenemos de aducirla al probar nuevos esquemas teoremáticos), quiere decirse que se dará por sentada la intercambiabilidad de dos fórmulas equivalentes también en un contexto en que estén afectadas por '•'.

A672 expresa la conmutatividad exacta (o simetría) de la superconyunción. A673 expresa la asociatividad exacta de la superconyunción. A682 expresa la distributividad exacta de la superconyunción respecto de la mera conyunción; y A683 expresa la distributividad exacta de la superconyunción respecto de la disyunción. Otra serie de esquemas teoremáticos que hemos demostrado en este capítulo nos muestran que, cada vez que uno de los miembros de la superconyunción es o totalmente verdadero o totalmente falso, la superconyunción equivale a la mera conyunción. Y ése es el caso, en particular, en lo tocante a conyuntos que empiezan por '¬', 'H', 'L', puesto que tales conyuntos, de ser verdaderos, lo son enteramente, y, si no, son del todo falsos.

El esquema A688 nos muestra que el que sea lo dicho por una superconyunción más bien verdadero implica que no sólo es más bien verdadero lo dicho por el primer conyunto, sino que también es más bien verdadero lo dicho por el segundo conyunto; similarmente, el esquema A668/1 nos muestra que el que sea bastante real un hecho conyuntivo implica que no sólo es bastante real lo dicho por el primer conyunto, sino que también sea bastante real lo dicho por el segundo. Una instancia de A688/1 es ésta: El que sea bastante cierto que Quintana fue, no sólo un patriota revolucionario, sino también un gran poeta implica que no sólo es bastante cierto que Quintana fue un patriota revolucionario, sino que asimismo es bastante cierto que Quintana fue un gran poeta. Nótese bien que no son válidos los esquemas inversos a A688 y A688/1: puede que dos hechos sean, ambos más bien verdaderos (o, respectivamente, bastante verdaderos), sin que sea más bien verdadera o real (respectivamente, bastante verdadera o real) la superconyunción de ambos.

Por último, hay que señalar que los esquemas inversos a A682 y A683 no son teoremáticos, e.d. no son válidos, pues —como ya se podrá comprobar ulteriormente— muchas instancias de los mismos son del todo falsas. De ahí que no exista distributividad **exacta** ni de la mera conyunción con respecto a la superconyunción ni tampoco de la disyunción con respecto a superconyunción. Lo que sí hay, empero —como muestran los esquemas teoremáticos A693 y A694—, es una distributividad inexacta, con respecto a la superconyunción, tanto de la mera conyunción (esquema A693) como de la disyunción (esquema A694); esa distributividad inexacta consiste en la validez del nexo bicondicional entre una fórmula con la conyunción (respectivamente, la disyunción) no distribuida respecto de la superconyunción y la fórmula correspondiente en que sí está distribuida la conyunción (respectivamente, la disyunción), como lo muestran claramente los esquemas teoremáticos aludidos. Mas téngase bien presente que el nexo bicondicional es muchísimo más débil que el equivalencial: el nexo bicondicional, expresado por '≡', nos dice que lo expresado por la fórmula a la izquierda de '≡' es verdadero (en uno u otro grado) ssi lo expresado por la fórmula a la derecha de '≡' es también verdadero (en uno u otro grado); en tanto que el nexo equivalencial, expresado por 'I', nos dice que, en el aspecto de lo real que se esté considerando, lo expresado por la fórmula a la izquierda de 'I' y lo expresado por la fórmula a la derecha de 'I' son igualmente verdaderos, **tan** verdadero lo uno **como** lo otro, ni más ni menos. En las consideraciones expuestas más arriba se reserva la denominación de 'exacto' al caso en que hay equivalencia, y no mero nexo bicondicional.

Antes de cerrar el capítulo, conviene decir un par de palabras sobre cómo podemos evaluar a la superconyunción, qué valor de verdad debe corresponder a una superconyunción cuyos miembros tienen valores de verdad dados. Parece razonable representar a cada valor de verdad como un hiperreal perteneciente al intervalo comprendido entre el número 0 y el número 1, ambos inclusive (0 como total falsedad, y 1 como verdad total). Los hiperreales son los reales (estándar) más, para cada real, u, un hiperreal mayor que u, pero infinitamente cercano a u (o sea, más cercano a u que cualquier número real menor que u) y otro hiperreal menor que u pero infinitamente cercano a u (más cercano a u que cualquier número real menor que u). Sentado eso, diremos que, mientras que el valor de ⌜p∧q⌝ es el mínimo entre los valores de ⌜p⌝ y de ⌜q⌝, en cambio el valor de ⌜p•q⌝ es el producto multiplicativo del valor de ⌜p⌝ con el de ⌜q⌝.

Como pauta para percatarse del perfil de la superconyunción y de sus diferencias respecto de la mera conyunción indiquemos algunos esquemas que no son teoremáticos (respecto de la superconyunción): ⌜p•pIp⌝ (idempotencia); ⌜p∨q•pIp⌝ (absorción de la superconyunción respecto de la disyunción); ⌜p•q∨rI.p∨r•.q∨r⌝ (distributividad de la disyunción respecto de la superconyunción); ⌜p→(p•q)∨q→.p•q⌝ (principio de alternativa implicacional de la superconyunción por uno u otro de los conyuntos). Todos esos esquemas son inválidos, en tanto que, si, en ellos, se reemplaza cada ocurrencia de '•' por una ocurrencia de '∧', el resultado sería un esquema teoremático válido.

La superconyunción difiere también de la mera conyunción en otras propiedades, de modo sistemático, a saber: para una amplia gama de hechos denotados por sentencias ⌜p⌝ y ⌜q⌝, lo denotado por ⌜p•q⌝ es **menos real** que lo denotado por ⌜p∧q⌝.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 22º.— VERDADERO Y MUY VERDADERO

Un functor de afirmación es un símbolo monádico, ☼, que cumple las condiciones siguientes:

1ª) Para algún ⌜p⌝, es verdad ⌜☼p⌝.

2ª) Para cualquier ⌜p⌝ es verdad ⌜☼p⊃p⌝

Como ya dije más atrás (al comenzar el cap 18º y al final del cap.19º), cabe dividir a los functores afirmativos en fuertes, débiles, redundantes y otros que no caen en ninguno de esos tres grupos; cabe dividir a los functores afirmativos fuertes en **constrictivos** e **inconstrictivos;** y en **amenguantes** e **inamenguantes**.

Un rasgo común de todos los functores afirmativos que hasta ahora hemos estudiado —un rasgo que permitiría caracterizar a los **functores afirmativos regulares**— es el siguiente: Si es verdad ⌜p→q⌝, también es verdad ⌜☼p→☼q⌝ (siendo ☼ el functor afirmativo de que se trate).

Otro grupo de functores afirmativos lo constituyen los functores internos; es **interno** un functor afirmativo '⌂' ssi, para cualquier ⌜p⌝, se tiene: ⌜⌂⌂pI⌂p⌝.

No nos interesan aquí todas las combinaciones de esos diversos rasgos, e.d. las intersecciones posibles de tales agrupaciones de functores afirmativos. Pero sí nos interesa establecer otro grupo de tales functores, a los que llamaré **catafánticos**: un functor afirmativo, µ, es catafántico ssi, además de ser regular, cumple las tres condiciones siguientes para cualesquiera ⌜p⌝ y ⌜q⌝:

1ª) ⌜µp→µq⌝ es verdad sólo si: o bien es verdad ⌜p→q⌝, o bien es verdad ⌜¬µp⌝. 2ª) ⌜µ(p∧q)I.µp∧µq⌝ es verdad. 3ª) ⌜µ(p∨q)I.µp∨µq⌝ es verdad.

El functor 'L' no es catafántico (no cumple la primera condición, aunque sí es regular y sí cumple las condiciones 2ª y 3ª). Functores catafánticos son, p.ej.: H, P, ℘. Esos tres functores son, además, inamenguantes, internos y constrictivos. A un functor afirmativo con esos cuatro rasgos (catafántico, inamenguante, constrictivo e interno) lo llamaré 'functor filtrante', porque filtra a los hechos, reteniendo sólo a los que alcanzan un umbral veritativo. (Cabe demostrar que todo functor catafántico, constrictivo e inamenguante es interno); por lo cual basta con estipular los tres primeros rasgos).

Un functor catafántico, ⌂, puede cumplir la condición siguiente (para cualesquiera ⌜p⌝ y ⌜q⌝):

4ª) ⌜⌂p→⌂q⌝ es verdad sólo si ⌜p→q⌝ también es verdad.

(Eso equivale a reforzar la condición 1ª de los functores catafánticos, excluyendo que baste el que sea verdad ⌜¬⌂p⌝ para que sea verdad ⌜⌂p→q⌝). Un functor catafántico que cumpla esa 4ª condición será llamado 'functor uniforme'; nótese que un functor uniforme, ⌂, será tal que, para cualesquiera ⌜p⌝ y ⌜q⌝: ⌜⌂p→⌂qI.p→q⌝ (a la validez de este último esquema se la llama '**propiedad de uniformidad**'); esta propiedad de uniformidad se desprende de la condición 4ª y de la condición de regularidad.)

Si un functor afirmativo fuerte, ⌂, es uniforme, y si no es redundante en absoluto, no puede ser en absoluto interno. Porque, por ser fuerte, será tal que, para cualquier ⌜p⌝, será verdad ⌜⌂p→p⌝; y, por consiguiente, también ⌜⌂⌂p→⌂p⌝; por ser uniforme, se tendrá: ⌂p→⌂qI.p→q. Si un functor así fuera interno, se tendría: ⌂⌂pI⌂p; por tanto: ⌂p→⌂⌂p, de donde resulta (por la propiedad de uniformidad): p→⌂p; mas entonces, ⌂ sería redundante, pues se tendría tanto ⌂p→p como p→⌂p, y, por ende, pI⌂p. Ahora bien, si un functor afirmativo fuerte, ⋙, no es, en absoluto, interno, tiene que ser amenguante; pues, para cualquier ⌜p⌝, tendremos ⌜⋙p→p⌝; para algún ⌜p⌝, ⌜¬(⋙⋙pI⋙p)⌝; y, por ende (como se tendrá ⌜⋙⋙p→⋙p⌝), resultará verdad ⌜⋙⋙p\⋙p⌝. De todo lo cual se desprende que un functor afirmativo fuerte que sea uniforme ha de ser amenguante (salvo si es redundante).

Tal es el caso del functor 'X', que leemos: 'Es muy cierto que' o 'Es muy real el hecho de que'. Trátase de un functor afirmativo fuerte, uniforme (y, por ello, también catafántico; y, por ello, también regular); y, por consiguiente, de un functor que no es en absoluto interno, sino que es amenguante.

Por otro lado, un functor uniforme, ♂, no puede ser constrictivo: no puede haber ningún ⌜p⌝ tal que, siendo verdad ⌜p⌝, sea del todo falso ⌜♂p⌝; porque entonces se tendría, para **ese** ⌜p⌝: ⌜♂pI0⌝; pero, por ser afirmativo '♂', se tiene: ⌜♂0I0⌝; luego resultará: ⌜♂p→♂0⌝, sin que sea verdad, en absoluto (por hipótesis) que ⌜p→0⌝.

Así tenemos: por un lado un grupo de functores filtrantes (no uniformes, pero, en cambio, internos y constrictivos), tales que colocan un tamiz y sólo reconocen como aceptables a los hechos que alcancen cierto umbral veritativo (e.d. sólo es verdadera la fórmula resultante de prefijar el functor en cuestión a una oración dada que sea verdadera en una medida igual o superior a la que marca ese umbral veritativo); pero, una vez reconocido un hecho como aceptable, no se altera lo dicho por una oración que denote a tal hecho al prefijarle a la misma un functor filtrante; en cambio, las oraciones que denoten a hechos que, aun siendo verdaderos, no alcancen ese umbral veritativo son tales que, al prefijarles un functor filtrante, el resultado será del todo falso. Por otro lado tenemos otros functores, también afirmativos fuertes y catafánticos, que por ser uniformes no son constrictivos, sino que el resultado de prefijar uno de estos functores a una oración verdadera será otra oración verdadera; pero, para diferenciarse de un functor meramente redundante como 'NN', uno de estos functores tendrá que ser amenguante; o sea: lo que hará un functor así será que, al ser prefijado a una determinada oración, podrá dar como resultado una oración que, aun siendo verdadera, sea **menos** verdadera que la dada.

No tiene mayor importancia la jerga que he introducido para explicar ese perfil de un functor (afirmativo fuerte y uniforme) como 'X' ('muy'), a diferencia de los functores filtrantes. Según el modo que el autor de este libro tiene de entender expresiones de la lengua castellana (y de otras lenguas indoeuropeas), el 'muy' es afirmativo, fuerte y uniforme, e.d. respeta o cumple las condiciones siguientes.

1) Que sea muy cierto que p implica que p;

2) El que el ser muy cierto que p implique al ser muy cierto que q es verdad si, pero también **sólo** si, la verdad de que p implica a la de que q;

3) Hay oraciones ⌜p⌝ tales que lo vehiculado por «Es muy cierto que p» difiere de (es menos verdadero que) lo vehiculado por ⌜p⌝;

4) No haya, por consiguiente, equivalencia siempre entre «Es muy cierto que p» y «Es muy (cierto que es) muy cierto que p».

En cambio —a tenor de ese modo de entender expresiones de la lengua natural—, 'completamente', 'más bien' y 'bastante' (así como 'infinitamente' y 'un tanto') son filtrantes, en el sentido de que (tomando a 'bastante' como botón de muestra):

1) «Es bastante real el hecho de que p» implica a ⌜p⌝;

2) Si ⌜p⌝ no es más verdadero que falso, entonces «Es bastante real el hecho de que p» es totalmente falso;

3) El que el ser verdad que p implique el ser cierto que q implica que el ser bastante cierto que p implica el ser también bastante cierto que q;

4) Lo inverso de (3) no siempre es verdad;

5) Hay siempre (para cualquier ⌜p⌝) equivalencia entre que sea bastante cierto que p y que sea bastante cierto que es bastante cierto que p (no se cambia nada al iterar la palabra 'bastante').

Es, claro está, debatible que el 'muy' y el 'bastante' del castellano corriente funcionen según esas regulaciones. Además, no en todos los dialectos de nuestra lengua se usa la palabra, 'bastante' del mismo modo; digamos que —según estudio y encuesta del autor—, más o menos así parece comportarse el 'bastante' de un dialecto particular (el quiteño). En general, no he encontrado a nadie que diga 'Esa casa es bastante bastante grande' (el no iterar el vocablo 'bastante' se explica por la condición (5) de las que rigen el uso de esa palabra); pero sí se dice 'Demetria es una persona muy muy generosa' (iteración que se explica por la condición (4) de las que rigen el uso del 'muy'). Por otro lado, si algo es real, pero de ninguna manera más real que irreal, sería de todo punto falso decir que es bastante real; en cambio, no será de todo punto falso decir que es muy real (aunque —eso sí— la afirmación de que tal algo es muy real será bastante falsa, y más falsa que la mera afirmación de que el algo en cuestión es real (sin el ‘muy’).

Si el lector no está de acuerdo con esas normas de uso del ‘bastante’ y del ‘muy’, tan sumamente divergentes, busque él mismo otras lecturas para ‘℘’ y para ‘X’.

¿En qué casos varía lo dicho por «Es muy cierto que p» con respecto a lo dicho por ⌜p⌝? La respuesta más plausible parece ser ésta: cuando el hecho de que p, aun siendo un tanto real o verdadero, no es, en absoluto, **infinitamente** real; o sea: cuando el hecho de que p es verdadero en medida mayor que infinitesimal, pero, sin embargo, ni es totalmente real ni dista sólo infinitesimalmente de ser totalmente real. En cambio, cuando un hecho es sólo infinitesimalmente real, ya no puede otro hecho ser menos verdadero o real que él —se precipitaría ya en total y completa falsedad; cuando un hecho es totalmente verdadero o real, lo dicho al decirse que es muy verdadero no puede ir en desmedro de la verdad, pues, siendo totalmente real, su ser muy real es lo mismo que su verdad a secas, algo totalmente verdadero; y lo propio es cierto también respecto de un hecho infinitamente verdadero aunque no lo sea totalmente (e.d. de un hecho que sólo dista infinitesimalmente de ser totalmente real).

Esas afirmaciones con respecto al ‘muy’ irán quedando plasmadas, con notación simbólica, en esquemas teoremáticos que iremos probando.

A695 $Xp\to p$ (Prueba: df13, A367)

A696 $p\supset.Xp$ (Prueba: df13, A661/1)

A697 $Xp\equiv p$ (Prueba: A695, A696)

A698 $XNp\to NXp$

Prueba:

(2)	$XNp\to Np$	A695
(3)	$Np\to NXp$	A695, A364
	A698	(2), (3), A386

A699 $X1I1$ (Prueba: A666, df13)

A700 $X0I0$ (Prueba: A677, df13)

A701 $Hp\lor\neg p\supset.XpIp$ (Prueba: A699, A700)

A702 $XXp\to p$ (Prueba: A695, A386)

A703 $XHpIHp$ (Prueba: A701)

A704 $HXpIHp$ (Prueba: A689, df13)

A705 $X\neg pI\neg p$ (Prueba: A703)

A706 $\neg XpI\neg p$ (Prueba: A690/1, df13)

A707 $LXpILp$ (Prueba: A697, A341)

A708 $XLpILp$ (Prueba: A692, A280, df13)

A709 $Sp\equiv SXp$

Prueba:

(2)	$\neg SpI.\neg p\lor Hp$	A628
	$\sigma 2I.\neg Xp\lor HXp$	A704, A706
	$\sigma 2I\neg(Xp\land NXp)$	df09
	$\sigma 2I\neg SXp$	
	A709	(2)

A710 $XSp\equiv SXp$ (Prueba: A697, A709)

A711 $Xp\to NXNp$ (Prueba: A698, A365)

A712 $p\to NXNp$ (Prueba: A695, A365)

A713 $p\to q\to.Xp\to Xq$ (Prueba: A676, df13)

A714 $Xp\to Xq\to.Xp\to q$ (Prueba: A695, A385)

A715 Xp→q→.Xp→NXNq (Prueba: A385, A712) A716 pIq→.XpIXq (Prueba: A713)

A717 Xp\Xq→.p\q (Prueba: A713, A441)

A718 X(p∧q)I.Xp∧Xq

Prueba:

(2)	X(p∧q)→Xp	A713
(3)	X(p∧q)→Xq	A713
(4)	X(p∧q)→.Xp∧Xq	(2),(3),A395
(5)	p→(p∧q)⊃.Xp→X(p∧q)	A713
(6)	q→(p∧q)⊃.Xq→X(p∧q)	A713
(7)	δ5∨d6	(5),(6),A377/2
(8)	Xp∧Xq→X(p∧q)	(7),A396
	A718	(4), (8)

A719 Xp∨XqIX(p∨q)

Prueba:

(2)	Xp→X(p∨q)	A713
(3)	Xq→X(p∨q)	A713
(4)	Xp∨Xq→X(p∨q)	(2), (3), A397
(5)	p∨q→p⊃.X(p∨q)→Xp	A713
(6)	p∨q→q⊃.X(p∨q)→Xq	A713
(7)	δ5∨δ6	(5),(6),A377/1
(8)	X(p∨q)→.Xp∨Xq	(7), A394
	A719	(4), (8)

A720 PXp→XPp

Prueba:

(2)	PXp→Pp	A695, A520
(3)	PXp⊃.PXp∧Pp	(2), A412
	σ3⊃.PXpIXp∧.PpIp	A486
	σ3⊃.PXpIXp∧.XPpIXp	A716
	σ3⊃.PXpIXPp	
	σ3⊃.PXp→XPp	
	A720	(3), A379

A721 ℘Xp→X℘p (Prueba similar, aduciendo en lugar de A520, A554; y en lugar de A486, A548)

A722 Xp•XqIX(p•q) (Prueba: df13, A672, A673)

A723 X(p⊃q)I.p⊃Xq (Prueba: A719, A705)

A723/1 p&XqIX(p&q) (Prueba: A718, A708, A259)

Los esquemas teoremáticos que acabo de probar no hacen sino poner de relieve cómo pueden demostrarse, con rigor, dentro del sistema lógico aquí propuesto propiedades del functor ‘X’ (o sea ‘Es muy cierto que’) reseñadas y discutidas, en lengua natural y de modo menos riguroso, al comienzo de este capítulo. Vemos que ese functor no altera nada en el caso de oraciones que son —o que, por su propia naturaleza, no pueden por menos de ser— o totalmente verdaderas o completamente falsas. Vemos también que algo es muy verdadero o real ssi es verdadero o real; pero no en la misma medida (salvo casos como los de hechos o totalmente verdaderos o totalmente falsos, y otros de hechos infinitamente falsos o verdaderos que más tarde estudiaremos). El esquema A698 nos dice que el ser algo muy falso implica su no ser muy verdadero. También hemos visto (esquemas A709 y A710) que algo es verdadero y falso a la vez ssi es, a la vez, verdadero y falso que tal algo es un hecho muy real; y que es muy cierto que algo es, a la vez, verdadero y falso ssi es, a la vez, verdadero y falso que ese algo es muy verdadero. El esquema A713 nos muestra que un hecho es a lo sumo tan real como otro sólo si el que el primero sea muy real es algo a lo sumo tan verdadero como el que sea muy real el segundo; y el esquema A717 nos muestra que un hecho es menos real que otro si el ser muy real el primero es menos verdadero que el ser muy real el segundo. A716 nos muestra que el functor 'muy' es exactamente distributivo con respecto a la conyunción, mientras que A719 nos muestra que ese functor es exactamente distributivo con respecto a la disyunción.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 23º.— LO INFINITESIMALMENTE REAL; GENERALIZACIÓN ULTERIOR DE LA SUSTITUIBILIDAD DE LOS EQUIVALENTES

Hay hechos que, siendo verdaderos, son, sin embargo, lo menos verdaderos posible, e.d. tales que cualquier otro hecho verdadero o real es por lo menos tan real como uno de aquéllos. Hay quienes, aun reconociendo que se dan grados de verdad o existencia, ponen en duda o hasta parecen recusar que se dé un grado ínfimo de verdad o realidad. Implícitamente adoptan esa postura los elaboradores de cuantas lógicas infinivalentes se han construido antes de la erección del sistema *Aj*, aquí presentado; citemos, en particular, a Łukasiewicz y Gödel, por ser las lógicas de esos autores las más influyentes, y ello no sin razones; y también cabe citar las teorías estándar de conjuntos difusos, como las de Lofti Zadeh, quien utiliza como base la lógica infinivalente de Łukasiewicz. Ahora bien, el rechazo de un grado ínfimo de verdad acarrea consecuencias desastrosas. En un sistema infinivalente en que no se reconozca un grado ínfimo de verdad —llamémoslo 'sistema desfondado'—, se tendrá que, o bien hay que renunciar a admitir como **designados** (e.d. **verdaderos**) todos los grados de verdad (o sea: todos los valores de verdad diferentes de 0); o bien se tendrán resultados absurdos, sobre todo para el cálculo cuantificacional (que vamos a estudiar en la Sección II). Ambas alternativas son perniciosas. Luego un sistema desfondado es insatisfactorio. En efecto: la primera alternativa, la de no aceptar como **designados** o verdaderos a todos los valores de verdad diferentes de 0 lleva: a abandonar el principio fuerte de tercio excluso (⌜$p\lor\neg p$⌝); a no poder ya entonces definir ⌜$p\supset q$⌝ como ⌜$\neg p\lor q$⌝ —so pena de perder la validez del esquema ⌜$p\supset p$⌝— y, en consecuencia, a despeñarse en un abismo en que, por haberse escogido algún functor condicional no clásico, se pierden esquemas válidos y útiles (eso sucede, sobre todo, con el condicional łukasiewicziano, para el que no valen ni los principios de abducción —ni siquiera para la negación débil— ni la ley de Peirce, ni el principio del buen entrañamiento, ni el de importación —la pérdida de éste último es particularmente grave y desconcertante; con el condicional gödeliano se logran evitar las más de esas consecuencias catastróficas, pero, así y todo, se pierde la ley de Peirce y el principio del buen entrañamiento, así como uno de los principios de abducción); a abandonar el principio de apencamiento según el cual cuanto es más o menos verdadero (verdadero por lo menos hasta cierto punto) es verdadero; a arrojar así por la borda la idea de grados de verdad, sustituyéndola por la de grados de aproximación a la verdad (que es dudosa e incluso incomprensible —salvo subjetivísticamente interpretada, como grados de certeza o firmeza de opinión— sin el respaldo de la de grados reales, objetivos, **de verdad**, grados de posesión de la propiedad de ser verdadero o real). La segunda alternativa, la de aceptar como **designados** infinitos valores de verdad —todos los diferentes de 0—, pero sin reconocer que uno de ellos es el ínfimo, nos lleva al siguiente absurdo: sin duda hemos de reconocer la verdad de la oración ‘todo existe’; pues, si fuera esa oración totalmente falsa, existiría algo que no existiría **en absoluto**, lo cual es **super**contradictorio, absurdo; luego es verdad que todo existe; pero una oración verdadera de la forma «Todo es tal que…» debe ser **a lo sumo** tan verdadera como cualquier **aplicación** o instanciación de la misma, e.d. que cualquier oración de la forma «x es tal que…», donde ‘x’ es cualquier expresión designadora. Pues bien, en un sistema desfondado en que, sin embargo, son designados todos los valores de verdad diversos de 0, dada una oración verdadera cualquiera, ⌜p⌝, habrá otra **menos** verdadera, que diga que es verdadero o existente algo con un valor de verdad o existencia inferior al que tiene lo dicho por ⌜p⌝. Luego habrá algo —e incluso infinitamente numerosos algos—, x, tal que «x existe» será verdadero, pero **menos** verdadero que «Todo existe». Mas eso es absurdo; nos llevaría a abandonar la **implicación** por «Todo ente es tal que p» de una oración **cualquiera** de la forma «x es tal que p». Y ese abandono traería consigo otras funestas consecuencias, como podrá verse en la Sección II. Admitido, pues, el principio de que «Todo es tal que p» **implica** «x es tal que p», y admitido que cuanto no es totalmente falso es verdadero, vémonos obligados, por consiguiente, a aceptar que hay un grado ínfimo de verdad o existencia, que es el que posee el hecho de que todo existe.

Aclarado ese punto central para la consideración de lo que se va a exponer en este capítulo, no está de más señalar que el modo como puede expresarse adecuadamente el que algo tenga ese grado ínfimo de verdad o existencia es diciendo que tal algo es **infinitesimalmente** verdadero o real; y que hay indicios de que esa expresión es sinonímica con respecto a éstas otras: ‘Es un sí es no verdad (o cierto) que’ (=‘Es un sí es no real el hecho de que’); ‘Es verdad, pero sólo en el grado (más) ínfimo (=en el grado más exiguo (de todos)) que’. A esa tesis de la sinonimia entre tales expresiones cabe oponer el siguiente reparo: una persona que, en un contexto dado, esté dispuesta a proferir una oración que contenga una de tales expresiones puede muy bien no estar dispuesta a proferir otra oración resultante de la primera por intercambio de la expresión que la persona en cuestión iba a usar por otra de las expresiones presuntamente sinonímicas. Nuestra respuesta a tal reparo es que eso sólo prueba que esas diversas expresiones pueden tener diferentes valores estilísticos, pese a ser sinonímicas; el valor estilístico resulta de la utilizabilidad de una expresión en diferentes y determinados contextos situacionales y comunicacionales.

(‘Padre’, ‘papá’ y ‘papi’ son sinónimos, pero tienen diversos valores estilísticos, otro tanto sucede con ‘cabezota’ y ‘obstinado’.)

En nuestra notación simbólica ‘a’ expresa o denota lo infinitesimalmente real o verdadero (e.d. el único ente que es, **en todos los aspectos**, infinitesimalmente verdadero o real, y que es ese mismo grado ínfimo de verdad o existencia; llegados al cálculo cuantificacional, podremos definir ‘a’ —en vez de tomar a esa fórmula como un símbolo primitivo, que es lo que hemos hecho en esta Sección— como una abreviación de ‘Todo existe’ —en notación simbólica ⌜∀xx⌝). ‘a’ es la única fórmula u oración atómica que figura en el sistema *Aj*; y es que ‘a’ no es una letra esquemática, sino una verdadera fórmula; y, por ende, todo resultado de constituir fórmulas con ‘a’, y sin letras esquemáticas, según las reglas de formación de *Aj* da por resultado auténticas fórmulas, no esquemas. Fórmulas u oraciones —que no esquemas— son, pues, entre otras : ⌜Na⌝, ⌜aIa⌝, ⌜¬(aIa)⌝, ⌜Ha⌝, ⌜a\Na⌝, etc. (de esas fórmulas, unas son verdaderas y otras son totalmente falsas, claro está).

Por otro lado, la constante definida ‘å’ denota a lo **infinitesimalmente irreal**, e.d. al grado ínfimo de falsedad, a ese grado de falsedad tan pequeño que es, a la vez, un grado de verdad tan elevado que sólo infinitesimalmente dista de lo totalmente verdadero o real.

Para expresar que algo es infinitesimalmente verdadero o real usaremos el functor definido ‘Y’.

¡Adentrémonos, pues, en este apasionante y encantador paraje de lo infinitesimalmente real y de lo infinitesimalmente irreal!

A753 a\½

Prueba:

(2)	¬0	A157
(3)	¬(aIa↓aI.a↓a)	(2), df01
(4)	¬(N(aIa∨a)IN(a∨a)	(3), A127/1
(5)	¬(aIa∨aI.a∨a)	(4), A112
(6)	¬(aIa∨aIa)	(5), A118
(7)	¬(aIa→a)	(6), A228
(8)	¬(½→a)	(7), df11
	a\½	(8), A436

A754 mp→np≡.Yp∨YNp (Prueba: A06)

El functor ‘m’ significa —recuérdese— lo mismo que ‘Viene a ser cierto que’; para una oración cualquiera ⌜p⌝, lo dicho por ⌜mp⌝ es, o igual de verdadero que lo dicho por ⌜p⌝, o sólo infinitesimalmente más verdadero —según los casos, ya iremos viéndolo. El functor ‘n’ significa: ‘Es supercierto que’; y, para una oración cualquiera ⌜p⌝, lo dicho por ⌜np⌝ es o igual de verdadero que lo dicho por ⌜p⌝ o sólo infinitesimalmente menos verdadero —según los casos, que ya iremos viendo. El esquema A754 nos muestra, pues, que el que algo venga a ser verdadero implica el que tal algo sea superverdadero ssi el algo en cuestión es o bien infinitesimalmente verdadero o bien infinitesimalmente falso.

A755 a

Prueba:

(2)	¬a⊃.aI0	
	σ2⊃.N(N½•1)→(½•1)⊃.½I0∧½∨.N½I0∧N½	df08, A754, df18, df19, df20, df24
	σ2⊃.½→½⊃.¬½∧½∨.N½I0∧N½	A666, A268/1
	σ2⊃.σδ2⊃.N½I0∧N½	A233
	σ2⊃.σδ2⊃.N½I0	
	σ2⊃.σδ2⊃.½I0	A371
	σ2⊃.σδ2→¬½	A268/1
	a	(2), A656, A202

A756 å (Prueba: A464, A753, df18)

A757 Np⊃.p→å

Prueba:

(2)	1→p∨.p→(1•å)∨.1IN(Np•å)	A368, df19, df20
(3)	Hp∨(p→å)∨.1IN(Np•å)	(2), A667
(4)	Hp∨(p→å)∨¬(Np•å)	(3)

(5)	Np⊃.p→å∨¬(Np•å)	(4)
	σ5⊃.p→å∨.¬Np∨¬å	A690/1
	σ5⊃.Np⊃.p→å	A756, A228, A234
	A757	(5)

A758 p⊃.a→p (Prueba: A757, A364, df18)

A759 a→p≡p (Prueba: A758, A755, A430)

A760 p→å≡Np (Prueba: A759, A365, df18)

A761 Yp⊃.p→q≡q (Prueba: A759, df24)

A762 Ya (Prueba: df24, A755)

A763 Yp→p (Prueba: df24)

A764 Yp⊃.YpIp

Prueba:

(2)	Yp⊃.Yp→p∧.p→Yp≡Yp∧Yp	A763, A761
	σ2⊃.p→Yp∧.Yp→p	
	σ2⊃.pIYp	

A765 YaIa (Prueba: A764, A762)

A766 pIa≡Yp (Prueba: df24, A762)

A767 YYpIYp

Prueba:

(2)	Yp⊃.pIa	A766
	σ2⊃.YpIYa	
	σ2⊃.YpIa∧.YpIYa	A765
	σ2⊃.YYpIYa∧.YpIYa	
	σ2⊃.YYpIYp	
	σ2⊃.Yp→YYp	
(3)	Yp→YYp	(2), A379
(4)	YYp→Yp	A763
	A767	(3), (4)

A768 pIå≡YNp (Prueba: A766, df18)

A768/1 YNå (Prueba: A768)

A769 p→å≡p\1 (Prueba: A760, A468)

A770 a→p≡.0\p (Prueba: A759, A466)

A772 p→å≡.0\Np (Prueba: A760, A466)

A773 ½\å

Prueba:

(2)	a\N½	A753, A371
(3)	½\Na	(2), A460
	½\å	

A773/1 a\å (Prueba: A753, A773, A437)

A774 SaIa (Prueba: A773/1, A461, df09, df18)

A775 Sa (Prueba: A755, A774)

A776 a∧Na (Prueba: A775, df09)

A777 å∧Nå (Prueba: A776, df18)

A778 Så (Prueba: df09, A777)

A779 aISå (Prueba: df18, A621, A775)

A779/1 aINå (Prueba: df18)

A779/2 ℘å (Prueba: A546, A773/1, A779/1)

A779/3 ℘Na (Prueba: A779/2, df18)

A779/4 YN℘å (Prueba: A779/2, A548, A768)

A779/5 N℘åIa (Prueba: A779/4, A766)

A779/6 N℘NaIa (Prueba: A779/5, df18)

A779/7 ¬Pa (Prueba: A544/1, A779/3)

A779/8 Yp→¬Pp (Prueba: A779/7, A766)

A779/9 YN⊃℘p (Prueba: A779/2, A768)

A780 a\p∨¬p≡¬Yp

Prueba:

(2)	¬Yp⊃.¬p∨¬(pIa)	df24
	σ2⊃.¬p∨.p∧¬(pIa)	
	σ2⊃.¬p∨.a→p∧¬(pIa)	A759
	σ2⊃.¬p∨.a\p	A434
(3)	¬p⊃¬Yp	df24
(4)	a\p⊃¬(aIp)	A434
	σ4⊃¬Yp	df24
	A780	(3), (4), (2)

Los teoremas A776 y A777 no presentan una nueva contradicción verdadera (porque son mutuamente contradictorias las dos verdades expresadas, respectivamente, por los teoremas A755 y A756), a saber: que lo infinitesimalmente real es verdadero y no es verdadero; o —lo que equivale a lo mismo— que lo infinitesimalmente irreal es verdadero y no lo es (la equivalencia en cuestión se da porque ‘lo infinitesimalmente irreal es verdadero’, e.d. ‘å’ equivale a ‘lo infinitesimalmente real no es verdadero’, e.d. ‘a’; y ‘lo infinitesimalmente real es verdadero’, e.d. ‘a’, equivale a ‘lo infinitesimalmente irreal no es verdadero, e.d. ‘Nå’).

El teorema A774 nos dice que lo infinitesimalmente verdadero o real equivale al hecho de que, a la vez, existe y no existe lo infinitesimalmente real; con otras palabras: la existencia de lo infinitesimalmente real equivale a la contradictoria conyunción entre dicha existencia y su negación; una contradictoria conyunción que, como acabamos de ver, es verdadera —si bien tan sólo infinitesimalmente verdadera, o sea: verdadera en el grado ínfimo.

Volviendo la vista atrás, conviene poner de relieve que el teorema A753 nos muestra que la existencia de lo infinitesimalmente real es menos verdadera que la de lo igualmente real e irreal; que el esquema teoremático A761 nos muestra que si algo es infinitesimalmente verdadero, entonces un hecho cualquiera dado es real ssi tal hecho es a lo menos tan real como el algo en cuestión.

El teorema A762 nos muestra que lo infinitesimalmente real es infinitesimalmente verdadero. El esquema A763 nos muestra que el functor ‘Y’ es un functor afirmativo fuerte; y el esquema A767 nos muestra que es un functor interno —por lo cual no es ni amenguante, como ‘X’, ni aumentante, como ‘K’.

Por último, el esquema A780 nos muestra que ‘Y’ es un functor anticonstrictivo: para que sea verdad lo dicho por ⌜Yp⌝ es menester que se cumplan dos condiciones: 1ª, es verdad que p; 2ª, es sólo infinitesimalmente verdad que p, e.d. el hecho de que p no es, en absoluto, más verdadero o real que lo infinitesimalmente real. De lo cual se desprenden varios corolarios.

A781 ¬Y½ (Prueba: A780, A753) A782 ¬Yå (Prueba: A780, A773)

A783 ¬Y0 (Prueba: A780, A157) A784 ¬Y1 (Prueba: A753, A471, A437, A780)

Así pues, es totalmente falso que sea infinitesimalmente verdadero lo igualmente verdadero y falso; es totalmente falso también que sea infinitesimalmente verdadero lo infinitesimalmente irreal; es totalmente falso también que sea infinitesimalmente verdadero lo absolutamente irreal; y, por último, es totalmente falso que sea infinitesimalmente verdadero lo absolutamente real.

Antes de seguir adelante, conviene aclarar que, a partir de ahora, la regla de inferencia rinf32 así como los esquemas y reglas a ella asociados (A220, A239, A240, A241, A242, A243; rinf 52) se entenderán sin otra restricción que la siguiente: con tal que los enunciados cuya equivalencia se presupone (en la prótasis del esquema, o de su apódosis —esto último, p.ej., en A241; o en la premisa —como en rinf32; o en la prótasis de la conclusión —como en rinf52) no están afectados, en el contexto al cual se aplique la sustitución, por el functor 'B' o por otro functor en cuya definición intervenga 'B'. Lo que ganamos con esa nueva formulación es permitir que los equivalentes uno de los cuales venga a sustituir al otro estén afectados por un functor en cuya definición intervenga la constante 'a' (siempre que, en cambio, no intervenga 'B'). ¿Cómo es eso?

Porque, siendo 'a' una constante sentencial, no puede por sí sola constituir el *definiens* de una expresión en que figure una letra esquemática. Sólo es posible construir el definiens de una fórmula en la cual figure una letra esquemática afectando a ésta por uno de los functores primitivos. Descartando 'B', sólo queda, pues, que el *definiens* de una expresión en que figure a lo menos una letra esquemática 'p' y en que también figure la constante 'a' sea una fórmula en que 'p' esté afectado, en última instancia, sólo por functores en cuya definición no intervenga 'a'. Tomemos como ejemplo el caso de 'n'. Tenemos que, por definición ⌜np⌝ equivale a ⌜p•å⌝, lo cual, por definición, equivale a ⌜p•.a↓a⌝. En esa fórmula 'p' está afectado únicamente por '•', y no por 'a', ni por la fórmula que se halla a la derecha de la ocurrencia de '•'.

Por inducción matemática se puede probar rigurosamente este **Metateorema de la Definición**, a saber que, en cualquier fórmula en que haya una letra esquemática 'p' afectada por un functor en cuya definición intervenga la constante 'a', se tendrá, una vez expandido el *definiens* de tal fórmula —eliminando todos los signos definidos y dejando sólo signos indefinidos y letras esquemáticas—, que dicha letra sentencial se halla afectada únicamente por functores primitivos en cuya definición no interviene 'a'. Las pautas para la prueba son como sigue:

Sea ⌜q⌝ la fórmula total en que figura la letra esquemática 'p' afectada por algún functor en cuya definición interviene 'a'.

Paso 1º.— Supongamos que se dan las condiciones siguientes: 1ª, ⌜q⌝ sólo contiene una ocurrencia de 'a', una ocurrencia de 'p'; 2ª, ⌜q⌝ no contiene ocurrencia alguna de ninguna otra letra esquemática; 3ª, para cada ocurrencia de 'a' y de 'p' hay en ⌜q⌝ una sola ocurrencia de alguno de los functores primitivos. Entonces, obviamente, el único functor que afecta a 'a' y a 'p' será un functor diádico, e.d. o bien 'I', o bien '↓', o bien '•', de suerte que ⌜q⌝ será: o bien 'aIp', o bien 'pIa', o bien 'a↓p', o bien 'p↓a', o bien 'a↓p', o bien 'p•a'. En todos esos casos, se cumple lo que se trata de probar; e.d. el Metateorema vale para este primer paso.

Paso 2º.— Se demuestra que, si el Metateorema vale para el caso en que, cumpliéndose la 2ª y la 3ª condiciones del primer paso, hay en ⌜q⌝ n ocurrencias de 'p', entonces también se cumple cuando hay n+1 ocurrencias de 'p' y se cumplen esas dos condiciones. Y luego se demuestra que, si el metateorema vale para el caso en que, cumpliéndose las condiciones 2ª y 3ª, hay en ⌜q⌝ n ocurrencias de 'a' y m ocurrencias de 'p', entonces vale también (siempre que se cumplan las condiciones 2ª y 3ª para el caso de que haya en ⌜q⌝ n+1 ocurrencias de a y m+1 ocurrencias de 'p'.

Paso 3º.— Se demuestra que, si el metateorema vale para el caso en que, cumpliéndose la condición 2ª (la 1ª es innecesario postularla, en virtud de lo demostrado en el paso 2º), 'p' está afectado en $\ulcorner q \urcorner$ por n ocurrencias de functores primitivos y ‘a’ está afectado en $\ulcorner q \urcorner$ por m ocurrencias de functores primitivos, entonces vale también para el caso en que, cumpliéndose la condición 2ª, sucede que ‘p’ está afectado en $\ulcorner q \urcorner$ por n+1 ocurrencias de functores primitivos, y ‘a’ esté afectada en $\ulcorner q \urcorner$ por m+1 ocurrencias de functores primitivos.

Paso 4º.— Se demuestra que (dado que la 1ª condición y la 3ª no necesitan postularse, en virtud de lo demostrado en los pasos 3º y 4º): 1º) el metateorema vale para el caso de que haya en $\ulcorner q \urcorner$ una sola ocurrencia de alguna otra letra esquemática; y 2º) que, si el metateorema vale para el caso de que haya en $\ulcorner q \urcorner$ n ocurrencias de otras letras esquemáticas, también vale para el caso en que haya en $\ulcorner q \urcorner$ n+1 ocurrencias de otras letras esquemáticas.

Habiendo así troceado lo que hay que probar, se va demostrando trozo por trozo. La prueba es simple de lo más, pero —hay que reconocerlo— un poquillo engorrosa; y no vale la pena desarrollarla en detalle, toda vez que resulta obvio lo que se quiere probar. Basten, pues, las pautas que se acaban de exponer.

Llegados aquí, hemos de hacer por última vez la advertencia de que, habiéndose producido muchos y grandes cortes en el texto por conveniencia editorial, le toca al lector colmar los hiatos resultantes. Lo que el lector pierde en deleitosa y plácida exploración de esos parajes lógicos lo gana en la estimulante comezón que sentirá así, ansioso de reconstruir, él mismo, esas cadenas demostrativas.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 24º.— LO VERDADERO EN TODOS LOS ASPECTOS

Para agilizar más las demostraciones en lo restante de esta Sección I, omitiré en adelante menciones justificatorias explícitas de esquemas ya probados cuyos números sean inferiores a A753 (así como también —según venía haciéndolo desde hace rato— a reglas de inferencia que sean o rinf01 o alguna de las reglas de inferencia hasta ahora derivadas). Tampoco mencionaré explícitamente, en lo restante de esta Sección, ninguna de las definiciones ya aducidas; daré las demás por sentadas y por bien conocidas. (El lector a quien asalte alguna duda puede siempre consultar la lista de definiciones, en el capítulo 1º.) No obstante, a fin de recordar al lector que la inferencia se hace en virtud de resultados ya obtenidos pero, a estas alturas, dados por supuestos, reemplazaré, en los casos mencionados, referencias concretas a las instancias justificatorias en cuestión por la indicación general ‘Aa’.

Todos los functores que hemos considerado hasta este momento son functores que evalúan los hechos dentro de un determinado aspecto último de lo real, e independientemente de qué ocurra o deje de ocurrir en los demás aspectos de lo real. ¡Precisemos esto! Dentro de cada aspecto último de lo real, un hecho tiene o bien un grado de verdad definido o bien carencia de todo grado de verdad (y, para este último caso, fingimos el valor 0 como un grado nulo de verdad, a fin de facilitar la exposición. Digamos, así, que para un hecho dado cualquiera, el hecho de que p, un aspecto último de lo real es una **función alética**, ϕ, tal que $\phi(p)$ (o sea aquello que la función alética ϕ hace corresponder al hecho de que p) es un definido grado de verdad (así sea nulo). Los functores hasta ahora considerados asignan a un hecho, p, o a dos hechos, p y q —según que el functor en cuestión sea monádico o diádico— un determinado grado de verdad con respecto a una determinada función alética, ϕ, según cuál sea el grado o valor de verdad que ϕ hace corresponder a p —o, en el caso de un functor diádico, según cuáles sean los grados de verdad que ϕ hace corresponder, respectivamente, a p y a q. Y ello independientemente de qué valores asigne a los hechos de que p y de que q cualquier otra función alética dada, ψ.

Explicitando un poco más lo que precede, diremos que, para un aspecto último de lo real, o función alética, ϕ, y para dos hechos cualesquiera, el de que p y el de que q, se tendrá:

1º.— El grado de verdad que ϕ asigna al hecho de que no sólo p, sino también q (e.d. a lo significado por ⌜p•q⌝) será el producto multiplicativo de los grados de verdad que ϕ asigne, respectivamente, a p y a q.

2º.— El grado de verdad que asigne ϕ al ser equivalente el hecho de que p con el de que q (e.d. a lo significado por ⌜pIq⌝) será: ½ (que es el grado de verdad equidistante entre el grado de verdad máximo o pleno, 1, y el nulo o 0) ssi ϕ(p)=ϕ(q) (o sea: ssi ϕ hace corresponder el mismo grado de verdad al hecho de que p que al hecho de que q); y, en caso contrario, ϕ(pIq) será 0 (e.d, en caso contrario ϕ no hará corresponder grado alguno de verdad al ser equivalente el hecho de que p con el de que q).

3º.— El grado de verdad que ϕ asigne al hecho de que ni p ni q (a lo significado por ⌜p↓q⌝) será el mínimo de entre los grados de verdad inversos a aquellos que haga ϕ corresponder respectivamente al hecho de que p y al de que q. (El grado de verdad inverso a 1 es 0; el inverso a 0 es 1; el inverso al grado de verdad de $(½)^x$ será 2 elevado a 1/-x, o sea la raíz x de ½; así el inverso de 0,125 (=$(½)^3$) es $1/\sqrt[3]{2}$, =0,7937.

4º.— El grado de verdad que asigna ϕ al hecho de que es totalmente verdad que p (e.d. a lo significado por ⌜Hp⌝) será: 1 ssi ϕ(p)=1; y, en caso contrario, 0.

5º.— ϕ(a) (e.d. el grado de verdad que ϕ asigna a la existencia de lo infinitesimalmente verdadero) será, siempre, el grado de verdad ínfimo, que será infinitesimal (supongo que sólo existe un único grado infinitesimal).

Las indicaciones que preceden permiten darse una idea aproximada de cómo funciona la semántica que brindo para el sistema *Aj*, en lo tocante a todos los signos primitivos de este sistema, salvo ‘B’. Mas ¿qué pasa con ‘B’?

⌜Bp⌝ se lee así: «Es afirmable con verdad que p». Para que sea algo afirmable con verdad es menester que sea verdadero —poco o mucho— en todos y cada uno de los aspectos de lo real. No basta con que algo sea verdadero, ni siquiera verdaderísimo, o incluso completamente verdadero, en unos cuantos aspectos de lo real para que sea afirmable con verdad; en cambio es afirmable —en algún grado— con verdad siempre que sea verdadero, a lo menos infinitesimalmente, en cada uno de los aspectos de lo real.

Pero es menester introducir dos aclaraciones a este respecto. La primera se refiere a qué sean los aspectos de lo real. La segunda a una dificultad que parece surgir a este respecto y que será esgrimida por los adversarios de la óptica plasmada en el sistema aquí propuesto.

Con respecto al primer punto, cabe decir que un aspecto de lo real es una perspectiva **objetiva** de lo real, un ángulo, un punto de vista (en sentido objetivo, e.d. un punto de vista coherente legítimamente fundado en la realidad, o sea: que refleja el cómo **son** las cosas en un plano o bajo un prisma determinado). Con otras palabras: un aspecto de lo real es un ámbito, una esfera, un plano de lo real. Un aspecto de lo real es cualquier cosa que permite relativizar, con respecto a ella, la verdad de los hechos, e.d. cualquier cosa tal que tiene sentido decir que un hecho es tanto o cuanto verdadero con respecto a, o desde el ángulo de, dicha cosa. Aspectos de lo real son, entre otros: los lugares, los lapsos de tiempo, los ángulos de consideración; y, en general, aquellos aspectos de los cuales se habla al decirse «en algunos aspectos…». Así, se dice que en algunos aspectos la prosa de Marcel Proust supera a la de otros escritores, y si preguntamos en cuáles aspectos sucede eso, acaso nos contesten que en el aspecto del ensimismamiento, en el de la morosidad, en el de la minuciosidad. Y si se dice que, en algunos aspectos, Francia era todavía una gran potencia durante los años 50 de este siglo, probablemente se aluda al aspecto de la extensión de los territorios bajo su autoridad, al aspecto del volumen relativo de su producción agrícola e industrial, a la fuerza de su organización militar y armamento, etc. En verdad, para cada propiedad parece que debe de haber un aspecto **correspondiente a** la misma. Unas personas son excelentes en unos aspectos, como el de la compasión para con los pobres, siendo poco apreciables en otros aspectos, como el de la fuerza de voluntad, en el empeño y el tesón en un esfuerzo que valga la pena. Además, dados dos aspectos de lo real, hay un aspecto que es el entrecruzamiento de ambos; p.ej., como los lugares y los lapsos de tiempo son, unos y otros, aspectos de lo real, también es un aspecto de lo real un lapso en un lugar (o, lo que seguramente es lo mismo, un lugar en un lapso). Y también es un aspecto de lo real el aspecto correspondiente a la ironía dentro de un lugar, o dentro de un lapso, o dentro, a la vez, de un lugar y lapso determinados; y, como son aspectos de lo real el de la emotividad y el de la delicadeza, también son aspectos de lo real el de la emotividad delicada y el de la delicadeza emotiva.

También son aspectos de lo real los llamados «mundos posibles», que son ángulos o perspectivas de lo real descritos por «novelas completas» coherentes (una **novela completa** suele definirse como un «libro» tal que, para cada oración ⌜p⌝, la novela contiene o bien ⌜p⌝ o bien ⌜no-p⌝; más tarde puntualizaré esto, introduciendo una modificación oportuna); para que una novela completa refleje un mundo posible no es condición suficiente, aunque sí necesaria, que la novela sea coherente —e.d. que se atenga a las leyes de determinado sistema lógico— puesto que no todas las leyes que rigen, necesariamente, a lo real, en todos sus aspectos, son contenidas en un sistema de lógica; al revés, lo mismo que cada teoría física sólo refleja algunas de las leyes físicas, cada teoría refleja o reproduce tan sólo algunas de entre las leyes (onto)lógicas, de entre las leyes que rigen la realidad en su conjunto, en todos los planos y aspectos.

En verdad, podemos identificar a cada aspecto de lo real con un mundo-posible; si el aspecto dado está definido por una propiedad que en él es lo hegemónico, ese aspecto será, precisamente, aquel mundo en el que sea hegemónica dicha propiedad. Si el aspecto en cuestión es un lapso de tiempo, o un lugar, será también un mundo-posible, a saber: aquel en que todo quede relativizado respecto de ese lapso, o de ese lugar.

La aclaración que precede debe ser desarrollada mediante un esclarecimiento de la relación entre aspectos de lo real o mundos-posibles y aspectos **últimos** de lo real o funciones aléticas. Supondré que las funciones aléticas están bien ordenadas, e.d. que a cada una de ellas le corresponde un número de orden (entero positivo finito) y sólo uno: una función alética dada, sea cual fuere, es la i-ésima, para algún entero positivo finito, i.

Postulo ahora **secuencias** infinitas de funciones aléticas. Cada una de tales secuencias selecciona un subconjunto de la secuencia de todas las funciones aléticas pero respetando el orden de las mismas; esto último quiere decir que, si en una secuencia, s, figuran las funciones aléticas ϕ y ϕ', siendo ϕ el i-ésimo componente de s y siendo ϕ' el j-ésimo componente de s, dándose el caso de que $i\leq j$, entonces es que hay dos enteros positivos finitos, k y k', tales que $k\leq k'$ y ϕ es la k^{a} función alética, y ϕ' es la k'^{a} función alética. Cada secuencia de funciones aléticas, s, es tal que, si la función alética ϕ figura en s, también figuran en s infinidad de otras funciones aléticas equipolentes con ϕ; siendo equipolentes dos funciones aléticas, ϕ y ϕ', ssi, para cualquier estado de cosas, p, $\phi(p)=\phi'(p)$ —siendo $\phi(p)$ el grado de verdad que al hecho de que p le haga corresponder ϕ.

A cada mundo-posible le **corresponde** una de tales secuencias de funciones aléticas, s, así como cualquier otra secuencia, s', tal que, para cada i, el i^{o} componente de s es equipolente con el i^{o} componente de s'. Cada función alética que sea componente de una secuencia de tales funciones correspondiente a un mundo-posible, w, está **englobada** por w. Si w es un mundo-posible o aspecto **no último** de lo real, y p es un estado de cosas dado, $w(p)=p_{w}$ será el **contenido veritativo** que a p le asigna w, siendo este contenido veritativo como sigue: tal **contenido veritativo** será $\langle u_1,u_2,u_3,\ldots\rangle$, donde, para cada u_i, $u_i=\phi_i(p)$, e.d. el grado de verdad (o falta total de verdad) que a p le asigne la i^{a} función alética; pues bien, el contenido veritativo p_w será $\langle u_{w^1}, u_{w^2}, u_{w^3}, \ldots\rangle$, donde, para cada i, w^i es la i^{a} componente de una secuencia correspondiente a w, y u_{w^i} es el grado de verdad que a p le haga corresponder la función alética w^i. $p_w=w(p)$ será: el ser verdad que p en w $\approx$ el suceder que p en w $\approx$ la verdad del hecho de que p relativizada al mundo w; y esa verdad será un contenido veritativo. Y voy a identificar a cada hecho con su contenido veritativo.

Un mundo posible, w, **subsume** a otro mundo-posible, w', ssi al primero le corresponde una secuencia de funciones aléticas, s, y al segundo le corresponde una secuencia, s', tales que cada componente de s' es también un componente de s. (Ejemplos de mundos que subsumen a otros son: el mundo del patetismo subsume al del patetismo trágico, al del patetismo heroico, etc.; el mundo del patetismo heroico subsume al mundo del patetismo heroico desgarrador).

Al postular que cada secuencia que contenga a cierta función alética ϕ contiene infinidad de funciones equipolentes con ϕ aseguramos que, si dos estados de cosas diferentes, difieren en sus grados o medidas de existencia o realidad en una infinidad de puestos o aspectos últimos de lo real.

El **mundo real**, la Realidad o la Existencia, es aquel mundo-posible al que corresponde la secuencia de todas las funciones aléticas, tal como están éstas ordenadas de suyo (o sea: sin restringir su buen orden a ningún aspecto particular de lo real). Así pues, el mundo-real, la Realidad, subsume a todos los mundos posibles.

Pasemos ahora a la segunda aclaración. Muchos pensadores, los **contingentistas**, argüirían que no es menester, para que algo sea afirmable con verdad, que sea verdadero en todos los aspectos de lo real; dirán que, para que sea afirmable, como efectivamente lo es, que el Níger es un país bastante escasamente fértil es suficiente que así suceda en este mundo, en el que aquí he llamado **de la experiencia cotidiana**, ocurra lo que ocurriere en otros mundos, en otros aspectos de lo real.

A esa objeción cabe responder, desde el horizonte necesitarista (moderado) que inspira al planteamiento plasmado en nuestro sistema, que, hablando con propiedad, no es afirmable sino aquello que es verdadero en todos y cada uno de los aspectos de lo real; como los mundos-posibles, si son algo —si hay posibilidades, si tiene sentido la palabra 'posible'—, son aspectos, ángulos o ámbitos de la realidad, resulta que sólo se refleja la realidad, la verdad, diciendo algo que sucede en cada aspecto de la misma: un aspecto particular no puede acaparar la realidad, la verdad, si no es (como efectivamente no es) nada más que un ángulo, una región particular de lo real.

El error de los contingentistas estriba en que, para ellos, la realidad se agota en lo «actual» —en lo que pasa en el mundo de la experiencia cotidiana, e incluso, dentro de él, en el momento presente (y, ¿por qué no?, también podrían decir que, dentro de ellos, lo real es sólo lo que sucede **aquí**, dondequiera que uno esté, y sea cual fuere la extensión que uno decida conferir a esa expresión). Lo que queda fuera de lo «actual» no es nada real, aunque sí es posible, meramente posible. El reparo al que está sujeto ese planteamiento contingentista es obvio: si no son, en absoluto, **reales** esos aspectos o mundos diferentes de, o ajenos a, lo actual, a este mundo de la experiencia cotidiana, entonces ¿cómo pueden ser **algo**? Y, si no es en absoluto verdad que sean algo, es que no son nada de nada, es que no tienen en absoluto existencia alguna; y, entonces, no hay posibilidades —más que lo actualizado en este mundo. Precisamente para que haya posibilidades inactualizadas es menester que existan otros mundos posibles, que éstos sean —para existir— **de lo real**, que estén **en la realidad**, que sean reales. Pero, si son reales esos otros mundos, entonces ¿con qué derecho va este mundo particular de la experiencia cotidiana a monopolizar el privilegio de la verdad (o sea: de la realidad)? Y, si no monopoliza el privilegio de la verdad, si no acapara por sí solo la verdad de los hechos, si lo que sucede en —o con respecto a— él es tan sólo una parte, un fragmento, de lo que sucede en la realidad en su conjunto, es que la verdad a secas es la verdad con relación a la realidad en su conjunto.

Lo que sí sucede, efectivamente, es que, en las más ocasiones, cuando decimos algo, sobreentendemos (elípticamente) una expresión prefijada a nuestras afirmaciones, a saber 'Es verdad en este mundo que'. Y, eso sí, puede ocurrir que, aunque no sea afirmable con verdad que p (para algún ⌜p⌝), sí sea afirmable con verdad que, en este mundo, p; o sea: aunque la verdad de que p (a secas) no se dé en todos los aspectos, aunque deje por completo de darse en algún aspecto de lo real, en cambio sí sea afirmable con verdad, sí sea existente en todos y cada uno de los aspectos de lo real, la verdad de que p **con relación a este mundo** (dicho de otro modo: el darse ese hecho de que p **en** este mundo, e.d. la relativización del hecho de que p respecto de este mundo, e.d. la pertenencia a este mundo del hecho de que p.

Los contingentistas cometen los siguientes errores: 1º) Identifican lo afirmable con verdad con lo verdadero en el mundo actual —como ellos lo llaman—, e.d., en el mundo de la experiencia cotidiana. (Esa identificación es un corolario de la tesis contingentista de la absoluta irrealidad de los mundos posibles inactualizados que, sin embargo, serían «algo» (¿¡!?). 2º) Sostienen que cada mundo posible engloba a una única función alética, de suerte que, una vez precisado un mundo, cualquier hecho dado tiene, en ese mundo, un único valor o grado de verdad; por lo cual el hecho dado es, con relación a ese mundo, o afirmable resueltamente, o resueltamente negable. Un corolario de esos dos errores es que, en virtud del principio de tercio excluso, un hecho cualquiera es o afirmable o negable —e.d. o es afirmable él o es afirmable su negación. Por lo siguiente; sea un hecho dado, p; qué suceda a ese hecho fuera de este mundo no debe afectar —según el contingentismo— a la afirmabilidad de p; pero, en este mundo, o bien p tiene verdad, o bien tiene falsedad —dicho de otro modo: o bien es verdad que p, o bien es verdad que Np; ése es el principio simple de tercio excluso—, y ello (lo uno o lo otro) en un grado definido, puesto que este mundo, como cualquier otro, es, según el contingentismo, uniaspectual. Luego o bien es afirmable que p, o bien es afirmable que no p. Esa tesis viene rechazada por el enfoque presentado en este libro, según vamos a verlo en los próximos capítulos.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 25º.— EL FUNCTOR ‘B’; LA REGLA DE AFIRMABILIDAD

El functor ‘B’ tiene en nuestro sistema propiedades similares a las que tiene el operador de necesidad en el sistema de lógica modal S5 basado en la lógica clásica. La diferencia principal estriba en que ‘B’ es un operador del cálculo sentencial, un functor de verdad; pues, en nuestro sistema, se conceptúa como contenido veritativo de un enunciado, no al valor o grado de verdad que tenga en un determinado aspecto, sino al cúmulo de sus valores o grados de verdad. Por ello, el contenido veritativo de ⌜Bp⌝ (de «Es afirmable con verdad que p») es una función del contenido veritativo de ⌜p⌝, como sigue. Para un enunciado dado, ⌜p⌝, designo al contenido veritativo del mismo como *v*(p) —donde *v* es aquella **valuación** (en el sentido de ‘valuación’ que vendrá explicado en el Apéndice de la presente sección) que envía a cada enunciado sobre el contenido veritativo que efectivamente posee; y, dado un contenido veritativo, *v*(p), ‘$v(\mathrm{p})_i$’ designará al i-ésimo componente de *v*(p), e.d. al valor o grado de verdad que al hecho de que p asigna la i-ésima función alética):

$$v(\mathrm{Bp})_i = \begin{cases} v(\mathrm{p})_i, & \text{si } v(\mathrm{p}) \text{ no contiene ningún 0;} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así pues, si el contenido veritativo del enunciado ⌜p⌝ —el contenido veritativo correspondiente al hecho de que p— no tiene ningún 0 (o sea: si cada función alética le asigna algún grado de verdad no nulo), entonces el contenido veritativo de ⌜Bp⌝ (de «Es afirmable con verdad que p») es exactamente el mismo que el de ⌜p⌝; pero, en cambio, si el contenido veritativo de ⌜p⌝ contiene algún 0, entonces el contenido veritativo de ⌜Bp⌝ es (0,0,0,0,0,0, …), e.d. una secuencia monótona de **ceros**.

(Podemos suponer, además, que, si un contenido veritativo contiene al menos un cero, entonces contiene una infinidad de ceros).

Así pues, el contenido veritativo de ⌜Bp⌝ está en función del contenido veritativo de ⌜p⌝. En cambio, a juicio de los contingentistas, el contenido veritativo de «Es necesariamente verdad que p» no depende del de ⌜p⌝, pues éste último es un grado de verdad definido, a saber: el que —según su enfoque uniaspectual— tenga el hecho de que p en este mundo no más (recuérdese que —como dije al final del capítulo anterior— para los contingentistas un hecho cualquiera tiene un solo y único valor de verdad en cada mundo posible, e.d. cada mundo posible es, según ellos, una función alética, y no algo caracterizado por una secuencia de diversas funciones aléticas).

Voy a examinar dos consecuencias importantes de esa divergencia: la primera se relaciona con la regla de afirmabilidad, y la segunda con la significación del principio de tercio excluso.

Con relación al primer punto, es menester precisar la diferencia que existe entre una regla de inferencia **sistémica** y una regla **no sistémica**. Una regla de inferencia de un sistema es sistémica si sólo permite extraer teoremas a partir de otros teoremas **del sistema** —y, en última instancia, a partir de axiomas del sistema. En cambio, una regla de inferencia no sistémica permite extraer conclusiones de premisas, sean o no éstas últimas teoremas del sistema en cuestión. Así, tomemos un sistema S, y supongamos que vamos a ampliar o extender S añadiéndole nuevos símbolos primitivos y acaso también nuevos axiomas. Sea S' el resultado de tal extensión. Supongamos ahora que S contiene una regla de inferencia sistémica, *r*; esa regla es sistemática dentro de S únicamente; y, por consiguiente, ya no es una regla de inferencia de S', aunque sí sea una regla de inferencia de un fragmento de S', a saber: S.

Pues bien, el sistema *Aj* contiene la regla de afirmabilidad, rinf02, a saber: p $\vdash$ Bp (para cualquier $\ulcorner p \urcorner$ que sea una fbf). Como la regla es no sistémica, vale, no ya dentro de *Aj*, sino en cualquier extensión de *Aj*. Un sistema de lógica modal como S5 contiene una regla parecida, llamada de **necesitación**, a saber: p $\vdash$ Es necesariamente verdad que p; sólo que esa regla de necesitación (también llamada 'de Gödel') es, en esos sistemas modales, **sistémica** no más; el significado de la regla, en esos sistemas es: si $\ulcorner p \urcorner$ es un teorema, entonces «Es necesariamente verdad que p» también es un teorema. En cambio, el significado de nuestra regla **no** sistémica rinf02 es: Si es afirmable con verdad lo dicho por $\ulcorner p \urcorner$, entonces es afirmable con verdad lo dicho por «Es afirmable con verdad que p» (en notación simbólica, lo dicho por $\ulcorner Bp \urcorner$). Y eso equivale a decir: «Si cabe afirmar $\ulcorner p \urcorner$, entonces es lícito también afirmar $\ulcorner Bp \urcorner$; o sea: de la premisa $\ulcorner p \urcorner$ vale (es correcto) deducir la conclusión $\ulcorner Bp \urcorner$».

Con relación a ese punto, hay que señalar que, en el sistema *Aj*, el sentido de la inferencia o deducción no es que, si es verdadera la conyunción de las premisas, también es verdadera la conclusión. Sabemos, ciertamente, por el metateorema de la deducción, que de $p^1, p^2, \ldots, p^n \vdash q$ (o sea: de que haya una inferencia válida de las premisas $\ulcorner p^1 \urcorner, \ulcorner p^2 \urcorner, \ldots, \ulcorner p^n \urcorner$ a la conclusión $\ulcorner q \urcorner$) cabe derivar la afirmación de que «Si p^1 y p^2 y… y p^n, entonces q» es un teorema de *Aj*; pero eso vale con una restricción, como recordará el lector, a saber: siempre que las reglas que permiten inferir $\ulcorner q \urcorner$ a partir de las premisas $p^1, p^2, \ldots, p^n$ sean reglas en cuya derivación no haya intervenido rinf02. Lo cual quiere decir que el que valga la inferencia de unas premisas a una conclusión no equivale a que sea cierto que la conyunción de las premisas entraña a la conclusión, aunque esto último puede ser —y es de hecho— un corolario de lo primero en una vastísima gama de casos. Mas no siempre es verdad que, si vale la inferencia p $\vdash$ q, entonces es verdadero el enunciado condicional «Si p, entonces q».

Lo que sí es cierto, en cambio, es que, si Γ es un cúmulo de enunciados y si $\ulcorner p \urcorner$ es un enunciado, entonces: de Γ, p $\vdash$ q se desprende $\Gamma \vdash Bp \supset Bq$; y, por ende, si $\ulcorner r \urcorner$ es la conyunción de todas las fórmulas que hay en Γ, tenemos $\Gamma \vdash$ q ssi es verdad $\ulcorner Br \supset Bq \urcorner$. O sea: la conclusión $\ulcorner q \urcorner$ se infiere del cúmulo de fórmulas Γ ssi es verdadero el enunciado condicional siguiente: «Si es afirmable con verdad que r, entonces es afirmable con verdad que q» (siendo $\ulcorner r \urcorner$ la conyunción de todas las fórmulas que hay en Γ).

La diferencia entre 'es verdad que' y 'es afirmable con verdad que' estriba en que, para un $\ulcorner p \urcorner$ cualquiera, «Es verdad que p» dice exactamente lo mismo que $\ulcorner p \urcorner$ solo; en tanto que «Es afirmable con verdad que p» (e.d. $\ulcorner Bp \urcorner$, en notación simbólica) dice algo más fuerte, a saber: dice que el hecho de que p es afirmable con verdad (para lo cual hace falta que sea verdadero en todos y cada uno de los aspectos); si el hecho de que p es afirmable con verdad (si es verdadero en todos y cada uno de los aspectos de la realidad), entonces lo dicho por $\ulcorner p \urcorner$ es lo mismo que lo dicho por «Es afirmable con verdad que p»; y también son lo mismo si es absolutamente falso que haya tal hecho de que p, e.d.

si es, en cada aspecto de lo real, totalmente falso que exista o sea verdadero el hecho de que p; pero si el hecho de que p es verdadero en unos aspectos y totalmente falso en otros, entonces lo dicho por ⌜p⌝ es ese hecho de que p, mientras que lo dicho por «Es afirmable con verdad que p» no será nada en absoluto, sino que será absolutamente falso (completamente falso en cada aspecto de la realidad) que sea afirmable con verdad que p. (Para cualquier oración ⌜p⌝, lo dicho por ⌜Bp⌝ será, o bien afirmable con verdad, o bien absolutamente falso; pero nunca podrá ser verdadero en algunos aspectos y totalmente falso en otros.)

Resumiendo: la regla de afirmabilidad comparte con la regla de necesitación o de Gödel de ciertos sistemas modales clásicos fuertes, como S5, la propiedad de que, cuando interviene esa regla en una inferencia, no se aplica a tal inferencia el metateorema de la deducción (en la forma que le habíamos dado, a saber: que si $p^1, p^2, \ldots, p^n \vdash q$, entonces es teoremático el enunciado ⌜$p^1 \wedge p^2 \wedge \ldots \wedge p^n \supset q$⌝). Pero son muy diversos los motivos por los cuales falla la aplicación de dicho metateorema tanto para el caso en que intervenga nuestra regla de afirmabilidad como para el caso en que intervenga la regla de necesitación. En el caso de ésta última, el motivo es que la regla es no sistémica, y no es, por tanto, una regla de inferencia, en sentido estricto, sino una regla meramente de engendramiento de teoremas a partir de otros teoremas (incluyendo a los axiomas entre los teoremas). En cambio, en el caso de nuestra regla de afirmabilidad, la razón de la inaplicabilidad del metateorema de la deducción —en la versión simple que le habíamos dado— cuando, en la inferencia cuya validez se supone, interviene esa regla, rinf02, estriba en que el sentido de la inferencia o deducción que se reconoce en nuestro sistema es que, si todas las premisas son **afirmables** con verdad, también es entonces la conclusión **afirmable** con verdad. La diferencia entre esta nuestra concepción de 'inferir' o 'deducir' y la concepción usual (en que, en vez de decirse 'afirmable con verdad' se dice 'verdadero' a secas) es que, mientras que 'verdadero' es redundante («Es verdadero el hecho de que p» no dice ni más ni menos que ⌜p⌝), no es en cambio redundante la locución 'Es afirmable con verdad que' (no lo es para todo ⌜p⌝, aunque sí lo es para una amplia gama de oraciones); pero esa diferencia no tiene cabida desde el enfoque contingentista, para el cual sí es redundante la locución 'Es afirmable', siendo así esa locución sinónima de 'Es verdad'. Porque, en el enfoque contingentista, nada puede servir para diferenciar lo dicho por ⌜p⌝ de lo dicho por «Es afirmable que p», toda vez que el contenido veritativo de ⌜p⌝ es un valor de verdad definido único, no una secuencia infinitamente numerosa de valores de verdad (en unos casos idénticos, en otros no), que es lo que sucede según nuestro enfoque.

Una puntualización que no debe omitirse es que una regla no sistémica se aplica, naturalmente, también a los teoremas del sistema al que pertenezca. Lo único que sucede es que se aplica no sólo a ellos, sino a cualesquiera premisas, por lo cual se aplicará en cualesquiera extensiones del sistema. Por eso, y en virtud de rinf02, dado un teorema o esquema teoremático de *Aj*, ⌜p⌝, tenemos automáticamente también el teorema o esquema teoremático ⌜Bp⌝.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 26º.— DIFERENTE COMPORTAMIENTO DE LA CONYUNCIÓN Y DE LA DISYUNCIÓN RESPECTO DEL FUNCTOR DE AFIRMABILIDAD 'B'

Como he dicho en el capítulo anterior, para que sea algo afirmable con verdad es condición necesaria y suficiente que tal algo sea verdadero en todos y cada uno de los aspectos de la realidad. Ahora bien, una conyunción es verdadera en todos los aspectos ssi cada uno de sus conyuntos es verdadero en todos los aspectos; en cambio, una disyunción puede ser verdadera en todos los aspectos aun cuando ninguno de sus dos disyuntos sea verdadero en todos los aspectos.

Hay aquí un paralelismo entre aspectos y momentos (los cuales son, al fin y al cabo, aspectos de la realidad). De que sea cierto que siempre va Sebastián a clase o con gabán o con gabardina (e.d. que cada día va a clase con gabán o con gabardina) no se desprende que o bien va siempre a clase con gabán o bien va siempre a clase con gabardina. Y de que siempre esté Hababuc o bien en el trabajo o bien en su casa no se desprende que o bien está Hababuc siempre en el trabajo o bien está siempre en casa; ¡no! lo único que es verdad es que está, en cada momento, o en el trabajo o en casa; no que en cada momento esté en el trabajo ni tampoco en cada momento esté en casa.

Así pues, y como vamos a ver, de cualquier teorema conyuntivo de *Aj* de la forma $\ulcorner p\land q\urcorner$ podemos inferir, en primer lugar, en virtud de rinf02, $\ulcorner B(p\land q)\urcorner$; y luego, en virtud de A1508, $\ulcorner Bp\land Bq\urcorner$. En cambio, de un teorema de la forma $\ulcorner p\lor q\urcorner$, si bien podemos inferir $\ulcorner B(p\lor q)\urcorner$, de ningún modo podemos inferir $\ulcorner Bp\lor Bq\urcorner$. Por eso, aunque es correcto el principio de tercio excluso (tanto el fuerte, $\ulcorner \neg p\lor p\urcorner$, como el simple $\ulcorner Np\lor p\urcorner$), hay muchas oraciones que no son afirmables y cuyas negaciones tampoco lo son. P.ej., la oración 'Es bastante cierto que Grecia es una República' no es afirmable; sí es afirmable el resultado de prefijar a esa oración 'En este mundo y en 1928' o 'En este mundo y en 1982', pero también es afirmable la oración 'En este mundo y en 1964 no es en absoluto bastante cierto que sea Grecia una República'; o sea la oración inicialmente dada es verdadera en algunos aspectos y completamente falsa en otros aspectos de la realidad; y no es, tampoco, afirmable la negación (por lo menos la negación fuerte o supernegación) de esa oración inicial.

Son enormes la significación y la importancia de esa constatación. Porque, si bien nuestro sistema entroniza tantas versiones del principio de tercio excluso, de ninguna manera reconoce $\ulcorner Bp\lor BNp\urcorner$, ni $\ulcorner Bp\lor B\neg p\urcorner$, a los cuales podríamos denominar 'principios de afirmabilidad alternativa de los contradictorios'. Rescher utiliza, a este respecto, la feliz dualidad terminológica de principio interno vs principio externo de tercio excluso; un sistema puede contener el principio interno, sin contener al externo, y eso es lo que sucede en nuestro sistema; el principio interno dice que, dentro de cada situación —o de cada aspecto, o de cada punto legítimo de referencia—, o bien p o bien no-p; mientras que el externo —que es el principio de afirmabilidad alternativa de los contradictorios— dice que, dado un $\ulcorner p\urcorner$ cualquiera, o bien debe éste poder ser afirmado (porque vale en todos los aspectos, a lo menos en todos los pertinentes), o bien debe poder afirmarse su negación (por idéntica razón). (Ese 'debe' se refiere a un sujeto omnisciente hipotético, claro está.) El cúmulo de todas las verdades, de todo lo afirmable, puede, pues —y eso es lo que de hecho sucede— dejar de contener a determinadas oraciones, aun sin contener tampoco a las negaciones de las mismas. Así, el cúmulo de todas las verdades puede no ser —y, de hecho, no es— una novela completa, en el sentido definido más atrás. A la luz de nuestra presente dilucidación, convendría reformular la definición de 'novela completa', como sigue: una novela completa es tal que, para cualquier oración $\ulcorner p\urcorner$, contiene, o bien $\ulcorner p\urcorner$, o bien «Es del todo falso que sea afirmable con verdad que p». (Porque $\ulcorner p\lor\neg Bp\urcorner$ sí es un esquema válido, como vamos a ver.) En **este** sentido sí ha de ser el cúmulo de todas las verdades una novela completa.

Similarmente, aunque —por la validez del principio interno de tercio excluso— es correcto preguntar '¿Sí o no?', en un asunto cualquiera, puede, sin embargo, suceder que ni '¡sí!' ni '¡no!' sean respuestas correctas, afirmables; puede que lo que haya que responder sea 'En unos aspectos sí, y en otros no', precisando después, si cabe, en qué aspectos sí y en cuáles no es verdad aquello de lo que se trate.

Tras las aclaraciones que preceden, abordemos la tarea de probar esquemas válidos en los que figura el functor 'B'.

A1501 $Bp\supset .BpIp$ (Prueba: A02)

A1501/1 $p\Rightarrow q\rightarrow .Bp\rightarrow Bq$

Prueba:

(2)	p⇒q⊃.Bp→Bq	A02
(3)	p⇒q⊃.p⇒qI(p→q)∧.p⇒q⊃(Bp→Bq)∧p→q	(2), A1501, df27, Aa
	σ3⊃.p⇒qI½∧.Bp→BqI½	Aa
	σ3⊃.p⇒q→.Bp→Bq	Aa
	p⇒q→.Bp→Bq	(3), Aa

A1502 Bp→p

Prueba:

(2)	Bp⊃.BpIp	A1501
	σ2⊃.Bp→p	Aa
	Bp→p	(2), Aa

A1502/1 LPp→BLp

Prueba:

(2)	Bp→BLp	Aa,rinf02,df27,A1501/1
(3)	LBp→LBLp	(2), Aa
(4)	LBp⊃.LBp→LBLp∧BLp	(3), Aa
	σ4⊃.LBp→LBLp∧.BLpILp	Aa, A1501
	σ4⊃.LBp→LBLp∧.BLpILBLp	Aa
	σ4⊃.LBp→BLp	Aa
	LBp→BLp	(4), Aa

Acabamos de hacer uso, por primera vez, de la regla rinf02, regla de afirmabilidad comentada en el capítulo anterior. Y también he hecho uso por primera vez de la definición df27, que define a la implicación **estricta**, '⇒', de tal modo que: el que un hecho implique estrictamente a otro equivale a que sea afirmable con verdad que la verdad del primero implica a la del segundo.

En lo sucesivo, haré un uso implícito de rinf02; con lo cual —y dada la definición df27— cada teorema o esquema teoremático cuyo functor central sea '→' podrá leerse como si su functor central fuera '⇒'; y similarmente cada teorema o esquema teoremático cuyo functor central sea '⊃' podrá leerse —dada la definición df21— como si su functor central fuera 'G'. 'G' es el functor de entrañamiento estricto, y —en virtud de df21— el que un hecho entrañe estrictamente a otro equivale a que sea afirmable con verdad que la verdad del primero entraña a la del segundo.

A1503 ¬Bp→B¬Bp

Prueba:

(2)	Bp∨B¬BLp	A02
(3)	¬Bp⊃B¬BLp	(2), Aa
(4)	Bp→BLp	Aa, A1501/1
(5)	¬BLp→¬Bp	(4), Aa
(6)	B¬BLp→B¬Bp	(5),df27,A1501/1
(7)	¬Bp⊃B¬Bp	(3), (6), Aa
(8)	B¬Bp⊃.¬BpIB¬Bp	A1501
	σ8⊃.¬Bp→B¬Bp	Aa
(9)	¬Bp⊃.¬Bp→B¬Bp	(7), (8), Aa
	A1503	(9), Aa

A1504 p⇒q⇒.Bp→Bq (Prueba, A02, rinf02, df27)

A1505 p⇒q→.p→q (Prueba: df27, A1502)

A1506 pGq→.p⊃q (Prueba: df21, A1502)

En adelante, haré uso implícito de A1505 y A1506, como sigue: cada vez que tengamos demostrado un esquema teoremático o teorema de la forma $\ulcorner p\Rightarrow q\urcorner$; tendremos también demostrado el teorema o esquema $\ulcorner p\longrightarrow q\urcorner$ —el resultado de reemplazar, en el esquema demostrado, la ocurrencia central de '$\Rightarrow$' por una ocurrencia central de '$\longrightarrow$'; y cada vez que tengamos demostrado un esquema teoremático o teorema de la forma $\ulcorner p\mathrm{G}q\urcorner$, tendremos también demostrado un esquema o teorema $\ulcorner p\supset q\urcorner$, e.d. el resultado de reemplazar, en el esquema demostrado, la ocurrencia central de 'G' por una ocurrencia de '$\supset$'.

A1506/1 $\mathrm{BL}p\supset\mathrm{B}q$

Prueba:

(2)	$\mathrm{B}\neg\mathrm{BL}p\supset\neg\mathrm{BL}p$	A1502, Aa
(3)	$\mathrm{BL}p\supset\neg\mathrm{B}\neg\mathrm{BL}p$	(2), Aa
(4)	$\neg\mathrm{B}\neg\mathrm{BL}p\supset\mathrm{B}p$	A02, Aa
	A1506/1	(3), (4)

A1507 $p\mathrm{G}q\supset.\mathrm{B}p\supset\mathrm{B}q$

Prueba:

(2)	$\mathrm{B}(\neg p\vee q)\longrightarrow\mathrm{BL}(p\longrightarrow\mathrm{L}q)$	Aa, A1501/1
(3)	$\delta2\supset\mathrm{B}(p\longrightarrow\mathrm{L}q)$	A1506/1
(4)	$\sigma2\supset\delta3$	(2), (3), Aa
	$\sigma4\supset.\mathrm{B}p\longrightarrow\mathrm{BL}q$	A1501/1, df27
	$\sigma4\supset.\mathrm{B}p\supset\mathrm{BL}q$	Aa
	$\sigma4\supset.\mathrm{B}p\supset\mathrm{B}q$	A1506/1
	A1507	(4), df21

A1508 $\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q\mathrm{I}\mathrm{B}(p\wedge q)$

Prueba:

(2)	$\mathrm{B}(p\wedge q)\longrightarrow\mathrm{B}p$	Aa, A1501/1
(3)	$\mathrm{B}(p\wedge q)\longrightarrow\mathrm{B}q$	idem
(4)	$\mathrm{B}(p\wedge q)\longrightarrow.\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q$	(2), (3), Aa
(5)	$\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q\supset.\mathrm{B}p\mathrm{I}p\wedge.\mathrm{B}q\mathrm{I}q$	A1501, Aa
	$\sigma5\supset.\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q\mathrm{I}.p\wedge q$	Aa
(6)	$\mathrm{B}p\supset.q\mathrm{G}\mathrm{B}(p\wedge q)$	Aa, df21, A1507
	$\sigma6\supset.\mathrm{B}q\supset\mathrm{B}(p\wedge q)$	A1507
(7)	$\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q\supset\mathrm{B}(p\wedge q)$	(6), Aa
	$\sigma7\supset.\mathrm{B}(p\wedge q)\mathrm{I}.p\wedge q$	A1501
(8)	$\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q\supset.\mathrm{B}(p\wedge q)\mathrm{I}.\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q$	(7), (5), Aa
	$\sigma8\supset.\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q\longrightarrow\mathrm{B}(p\wedge q)$	Aa
(9)	$\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q\longrightarrow\mathrm{B}(p\wedge q)$	(8), Aa
	A1508	(9), (4), Aa

A1509 $p\mathrm{G}q\longrightarrow.\mathrm{B}p\supset\mathrm{B}q$

Prueba:

(2)	$p\mathrm{G}q\wedge\mathrm{B}p\supset.p\mathrm{G}q\mathrm{I}(p\supset q)\wedge.p\mathrm{I}\mathrm{B}p\wedge\mathrm{B}q$	A1507, Aa, A1501, df21
	$\sigma2\supset.p\mathrm{G}q\mathrm{I}(p\supset q)\wedge.p\mathrm{I}\mathrm{B}p\wedge.q\mathrm{I}\mathrm{B}q$	A1501

	σ2⊃.pGqI(p⊃q)∧.p⊃qI.Bp⊃Bq	Aa
	σ2⊃.pGqI.Bp⊃Bq	Aa
	σ2⊃.pGq→.Bp⊃Bq	Aa
(3)	Bp⊃.pGq⊃.pGq→.Bp⊃Bq	(2), Aa
	σ3⊃.pGq→.Bp⊃Bq	Aa
(4)	¬Bp⊃.Bp⊃BqI1	Aa
	σ4⊃.pGq→.Bp⊃Bq	Aa
	A1509	(3), (4), Aa

A1510 BLpILBp

Prueba:

(2)	BLp→LBp	A1506/1
	A1510	(2), A1502/1

Ahora voy a derivar las dos siguientes reglas de inferencia:

rinf60 p⊃q ⊦ Bp⊃Bq (Derivación: rinf02, A1509, df21)

rinf61 p→q ⊦ Bp→Bq (Derivación: rinf02, df27, A1504)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

APÉNDICE DE LA SECCIÓN I

PERFIL DEL SISTEMA *Aj* ENTRE DIVERSOS SISTEMAS DE LÓGICA

En este Apéndice voy a estudiar algunos aspectos de la caracterización propia del sistema *Aj* con relación a diferentes sistemas de lógica y algunas de las relaciones que guarda *Aj* con otros sistemas de lógica.

En el Acápite 1º considero algunas nociones acerca de la paraconsistencia. En el Acápite 2º expondré nociones de teoría de modelos con las cuales probaré en el Acápite 3º un importante metateorema, según el cual *Aj* contiene o engloba a cualquier lógica finivalente. En el Acápite 4º mostraré que *Aj* también engloba al sistema gödeliano $G_{\aleph}$, siendo, por ello, una extensión (aunque no conservativa) de la lógica intuicionista de Heyting. En el Acápite 5º haré algunas puntualizaciones. Alguna noción, como la de extensión recia, que se usa en el Acápite 1º es aclarada en el Acápite 2º.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Acápite 1º.— Caracterización de Aj como sistema contradictorial y proficuo a la vez

Aj es un sistema contradictorial. Eso es obvio, dado que, para algunas fórmulas, tanto la fórmula como su negación (débil, eso sí) de la misma son, ambas, teoremas de *Aj*. Ahora bien, para dar mayor precisión y rigor a nuestra afirmación, es menester estipular condiciones que debe cumplir un sistema con respecto a determinado functor para que éste sea una negación. Porque, de no estipularse condiciones al respecto, resulta ambigua la afirmación de que un sistema contiene, como teoremas, a dos fórmulas una de las cuales es negación de la otra.

Postulo, pues, las condiciones siguientes. En un sistema son [mutuamente] **intercambiables** dos fórmulas $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner q \urcorner$ ssi el sistema tiene reglas de inferencia que permiten reemplazar, en cualquier contexto, a $\ulcorner p \urcorner$ por $\ulcorner q \urcorner$ y viceversa.

Defino '**sistema eucrático**' como un sistema S que contenga un functor de disyunción '$\vee$', un functor de conyunción '$\wedge$', y un functor monádico 'N' tales que, para cualesquiera fbfs de S, $\ulcorner p \urcorner$, $\ulcorner q \urcorner$ y $\ulcorner r \urcorner$, cumplen las nueve condiciones siguientes:

1ª.— $p \wedge q \vdash p$ es una regla de inferencia de S;

2ª.— $p \vdash p \vee q$ y $q \vdash p \vee q$ son reglas de inferencia de S;

3ª.— $\ulcorner p \vee q \vee r \urcorner$ y $\ulcorner q \vee r \vee p \urcorner$ son intercambiables en S;

4ª.— $\ulcorner p \urcorner$, $\ulcorner p \vee p \urcorner$, $\ulcorner p \wedge p \urcorner$ y $\ulcorner p \vee q \wedge p \urcorner$ son intercambiables en S;

5ª.— $\ulcorner p \vee q \wedge r \urcorner$ y $\ulcorner p \wedge r \vee . q \wedge r \urcorner$ son intercambiables en S;

6ª.— $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner NNp \urcorner$ son intercambiables en S;

7ª.— ⌜N(p∧q)⌝ y ⌜Np∨Nq⌝ son intercambiables en S;

8ª.— ⌜p∨Np⌝ es un teorema de S;

9ª.— p , q ⊦ p∧q es una regla de inferencia de S.

Un sistema eucrático S será **contradictorial** con respecto a 'N' ssi, para alguna fórmula ⌜s⌝, S contiene los teoremas ⌜s⌝ y ⌜Ns⌝. Por consiguiente, si S es contradictorial, S contendrá, para algún ⌜s⌝, como teorema la contradicción ⌜s∧Ns⌝.

Un sistema que sea contradictorial con respecto a algún functor de negación 'N' será llamado **contradictorial**, a secas.

Un sistema S es **superconsistente** ssi cualquier extensión recia de S que sea contradictorial con respecto a un functor de S es delicuescente. (Es delicuescente un sistema S tal que el cúmulo de sus teoremas es idéntico al de sus fbfs —fórmulas sintácticamente bien formadas).

Un sistema es **paraconsistente** ssi no es superconsistente.

La lógica clásica y los más sistemas no clásicos de lógica son superconsistentes. En cambio, son paraconsistentes las lógicas relevantes. Otros sistemas paraconsistentes, pero en un sentido lato, son los sistemas *C* de da Costa (lo son sólo en un sentido lato porque esos sistemas no son eucráticos; las condiciones 6ª y 7ª no se aplican a la negación «débil» de ese sistema).

El motivo que nos hace interesarnos aquí sólo por sistemas eucráticos es el siguiente: las condiciones estipuladas para los sistemas coinciden con las que sirven para caracterizar a un álgebra DeMorgan más la teorematicidad del principio de tercio excluso. Las lógicas łukasiewiczianas cumplen las nueve condiciones salvo la 8ª (teorematicidad del tercio excluso); pero no son paraconsistentes, ni siquiera en un sentido lato, porque contienen la regla de Cornubia: p , Np ⊦ q. Las características que mediante las nueve condiciones se asignan a '∧', '∨' y 'N' parecen las naturales con respecto a 'y', 'o' y 'no', respectivamente. Cualquier desviación respecto de esas nueve condiciones parece deber prestarse a serios reparos.

Por otro lado, quienes se oponen a sistemas paraconsistentes dicen que no es una negación un functor monádico, 'N' p.ej., con relación al cual se tolere en ciertos sistemas que se afirmen o que sean teoremas a la vez cierta fórmula ⌜p⌝ y el respectivo ⌜Np⌝. Pero, si no es una negación un functor como 'N' de un sistema eucrático, ¿qué es? Es más: sólo algo que cumpla con esas condiciones puede denominarse **la** negación por antonomasia, porque no satisface la condición 6ª, si bien sí satisface una condición parecida, pero un poquito más débil).

Un sistema S será denominado **proficuo** ssi S cumple las condiciones 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª y 9ª de los sistemas eucráticos y, además, contiene un functor monádico '¬' tal que, para cualesquiera ⌜p⌝ y ⌜q⌝:

10ª.— ⌜p∨¬p⌝ es un teorema de S;

11ª.— ⌜¬(p∨q)⌝ y ⌜¬p∧¬q⌝ son intercambiables en S;

12ª.— ⌜¬(p∧q)⌝ y ⌜¬p∨¬q⌝ son intercambiables en S;

13ª.— p∨q, ¬q ⊦ p es una regla de inferencia de S;

14ª.— ⌜p∧¬¬p⌝ y ⌜p⌝ son intercambiables en S.

Un sistema proficuo será una extensión de la lógica clásica porque un sistema con esas once condiciones contiene todos los teoremas y todas las reglas de inferencia de la lógica clásica.

La razón por la cual se postulan esas condiciones es que, para la supernegación, para el 'no **en absoluto**', parecen obviamente verdaderas, y sirven para caracterizar a un álgebra de Stone —junto con las condiciones sobre la conyunción y la disyunción de los sistemas eucráticos.

Pocos sistemas no clásicos de lógica son proficuos. *Aj* lo es (resulta ello obvio, dada la validez evidente de esas once condiciones en *Aj*). También lo son varios de los sistemas de da Costa (todos los de la secuencia C_n, para n finito). Entre los no proficuos figuran los sistemas gödelianos (vide infra, Acápite 4º), así como la lógica intuicionista; el sistema *C* de da Costa (donde ‘ω’ expresa infinidad), las lógicas relevantes, las lógicas łukasiewiczianas.

El sistema *Aj* es el único hasta ahora construido que sea, a la vez, contradictorial, en sentido estricto —no en sentido meramente lato, como los sistemas NF_n de da Costa— y proficuo. (Un sistema trivalente, proficuo y paraconsistente a la vez, ha sido esbozado en un trabajo conjunto de da Costa e Itala d’Ottaviano, quien ha estudiado después algunas facetas de dicho sistema; en ese sistema trivalente hay dos valores de verdad designados, 1 y ½, siendo 0 el único valor no designado. Ese sistema es un fragmento de *Aj*, como cualquier otro sistema de lógica finivalente —vide infra, Acápite 3º de este Apéndice). (Las consideraciones esbozadas aquí en torno a la comparación entre diversos sistemas paraconsistentes vendrán desarrolladas en el último capítulo de la Sección IV.)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Acápite 2º.— Aclaración de nociones básicas de teoría de modelos

Un sistema es un cúmulo formado por tres cosas, a saber: 1) un cúmulo de sentencias o fbfs, engendradas de acuerdo con ciertas reglas de formación; 2) un cúmulo de teoremas que son, de entre las fbfs del sistema, aquellas que vienen afirmadas en el sistema (normalmente, el cúmulo de los teoremas es engendrado a partir de un cúmulo de axiomas mediante las reglas de inferencia de que ahora voy a hablar); 3) un cúmulo de reglas de inferencia.

Un sistema S es una **extensión** de un sistema S’ ssi: 1º) todo signo de S’ es un signo de S (o bien: cabe establecer una función que haga corresponder a cada signo de S’ un signo de S, y sólo uno; para simplificar, supondré que, si *t* es una traducción de S’ hacia S, y ϕ es un signo de S’, entonces *t*(ϕ)=ϕ, e.d. que la traducción es homográfica; nada se perdería —salvo un poco de simplicidad en la exposición— de abandonarse tal suposición); 2º) cada teorema de S’ es un teorema de S (para esos signos de S que son, o iguales a los de S’, o traducciones de los mismos). Y S es extensión **recia** de S’ si además contiene cada regla de inferencia de S’.

Un sistema S es una **extensión conservativa** de un sistema S’ ssi: S es una extensión de S’ y, además, todo teorema de S que contenga sólo signos de S’ (o traducciones de los mismos) es también un teorema de S’. Así pues, si S es una extensión conservativa de S’, cualesquiera teoremas de S que no sean teoremas de S’ involucran signos adicionales que tenga S y de los cuales carezca S’.

Un sistema S es una extensión **cuasiconservativa** de un sistema S’ ssi: o bien: 1º) S es una extensión conservativa de S’; o bien 2º) S es una extensión de S’, y S contiene un functor monádico de afirmación ‘▾’ tal que, prefijándolo a cada teorema de S que sea una [traducción de una] fórmula de S’, el resultado es un teorema de S’. (Recordemos que, para que sea ‘▾’ un functor de afirmación, tienen que cumplirse estas dos condiciones: 1ª) para algún ⌜p⌝, es verdad —o es un teorema— ⌜▾p⌝; 2ª) ⌜▾p⊃p⌝ es un teorema —siendo ‘⊃’ un functor condicional con la condición del *modus ponens*, o sea tal que, para ⌜r⌝ y ⌜s⌝ cualesquiera, el sistema contiene la regla de inferencia: r⊃s , r ⊢ s.)

Un sistema S es una lógica finivalente ssi: 1º) S no contiene más que constantes sentenciales, variables sentenciales y functores, e.d. signos monádicos o diádicos que, prefijados a una oración —en cualquier caso—, o colocados entre dos oraciones —en el segundo caso— dan por resultado una oración, y que son tales que el valor de verdad de la oración resultante de tal colocación está unívocamente determinado por cuál[es] sea[n] el o los valores de verdad de la[s] oracion[es] afectada[s]; 2º) S tiene algún modelo característico con número finito de elementos. ¡Expliquemos esto!

Dado un sistema, S, y dado un cúmulo (o dominio) cualquiera de elementos, *D*, cabe establecer una función que tome como argumentos a sentencias o fbfs de S y como valores funcionales a elementos de *D*. (Recordemos lo siguiente: una función es una relación, r, entre miembros de un cúmulo, C, y miembros de otro cúmulo, C', tal que a cada miembro de C le hace corresponder un miembro, y uno solo, de C'; los miembros de C son los **argumentos** de r y, para un miembro dado, x, de C, r(x) será un miembro de C' que será llamado un **valor funcional** de r, a saber el valor funcional de r para el argumento x; C será el **campo de argumentos** de r, y C' será el **campo de valores** de r.) Una función, r, cuyo campo de argumentos sea el cúmulo de fbfs de un sistema, S, y cuyo campo de valores sea un dominio o cúmulo de elementos cualquiera *D* será una **valuación** de S en *D*. Supongamos ahora que algunos elementos de *D* son **designados**, pero que no todos ellos lo son; ésta será la condición de no saturación del dominio (y un dominio que la cumple será llamado 'no saturado'). De entre las valuaciones de S en *D* se escogerá a las **valuaciones admisibles**, que serán aquellas que cumplan determinadas condiciones prescritas.

Una fórmula, $\ulcorner p \urcorner$, de S es **válida con respecto a** un dominio, *D*, ssi: 1º) hay valuaciones admisibles de S en *D*; 2º) cada valuación admisible, v, de S en *D* es tal que $v(p)$ es un elemento designado de *D*.

Un dominio, *D*, es un modelo de un sistema, S, ssi: 1º) hay valuaciones admisibles de S en *D*; 2º) cada teorema de S es una fórmula válida con respecto a *D*.

Un dominio, *D*, es un modelo característico de un sistema S ssi: 1º) *D* es un modelo de S; 2º) cada fórmula válida de S con respecto a *D* es un teorema de S. Un sistema que tiene al menos un modelo característico es un sistema *completo*.)

He aquí un ejemplo. La lógica clásica —lógica bivalente verifuncional— tiene las siguientes matrices características (siendo 1 el elemento designado).

∧	1	0	∨	1	0	⊃	1	0	p	~p
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

La significación de esas matrices es simple de lo más: para cualquier valuación admisible, v, y para cualesquiera $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner q \urcorner$, si $v(p)=0$, entonces $v({\sim}p)=1$ y, si $v(p)=1$, entonces $v({\sim}p)=0$; si $v(p)=v(q)=1$, entonces $v(p\wedge q)=v(p\vee q)=v(p\supset q)=1$; si $v(p)=0=v(q)=0$, entonces: $v(p\wedge q)=0=v(p\vee q)$, pero $v(p\supset q)=1$; si $v(p)=0$ y $v(q)=1$, entonces: $v(p\wedge q)=0$, $v(p\vee q)=1=v(p\supset q)$; si $v(p)=1$ y $v(q)=0$, entonces $v(p\wedge q)=v(p\supset q)=0$, mientras que $v(p\vee q)=1$.

Llamaré '**matriz**' a una combinación de hileras y columnas, como las arriba expuestas; es n-valente una matriz si cada casilla está ocupada por uno de entre n elementos del dominio de n elementos que se considere. El caso más simple es el de los functores monádicos, cuyas matrices tienen una sola columna. En general, el significado obvio de una matriz para un functor diádico (el caso de los monádicos es más simple y se saca por eliminación) es que: si el functor es ♪, entonces cada valuación admisible v tal que $v(p)=u$ y $v(q)=u^1$ (siendo u y u^1 dos elementos del dominio considerado) será tal que $v(p♪q)=u^2$, y estando u^2 indicado en la matriz según sean u y u^1.

Decir que un sistema S tiene matrices características finitas n-valentes es decir que existe un dominio *D*, con un número finito de elementos, n, que es un modelo característico de S (lo cual puede expresarse por el procedimiento de las matrices, de modo compendiado o visualmente más claro).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Acápite 3º.— Prueba del metateorema del englobamiento

Pruebo primero el **Lema de Rescher**, LR; (en honor a la verdad, hay que decir que el presente Lema está muy alejado de la formulación originaria de Rescher).

Llamemos ‘sistema n-potente’ a un sistema S con las cinco condiciones:

1ª.— S contiene un functor condicional ‘$\supset$’ dotado de la condición del *modus ponens* (e.d. p , $p\supset q \vdash q$). Y, además, ‘$\supset$’ es tal que, si $\ulcorner p \urcorner$ es un teorema de S, entonces S contiene una regla de inferencia que permite intercambiar mutuamente, en **todos** los contextos, a $\ulcorner p\supset q \urcorner$ y a $\ulcorner q \urcorner$ —para cualquier fórmula $\ulcorner q \urcorner$.

2ª.— S contiene un functor de conyunción ‘$\wedge$’ tal que S contiene tanto las reglas de simplificación ($p\wedge q \vdash p$ y $p\wedge q \vdash q$) como la regla de adjunción p , $q \vdash p\wedge q$).

3ª.— S contiene un functor de disyunción ‘$\vee$’ tal que S contiene las reglas de adición ($p \vdash p\vee q$ y $q \vdash p\vee q$), así como la regla $p\supset r$, $q\supset r \vdash p\vee q\supset r$.

4ª.— S contiene un esquema teoremático de la forma $\ulcorner p^1\vee p^2\vee\ldots\vee p^n \urcorner$, sucediendo que hay en cada uno de esos disyuntos una letra esquemática [o variable sentencial —si el sistema tiene variables sentenciales] común a saber: ‘p’, y sucediendo también que, para cualesquiera i y j tales que $i\neq j$ ($1\leq i\leq n$), $\ulcorner p^i\wedge p^j\supset q \urcorner$ es también un esquema teoremático de S. (Quiere decirse que $\ulcorner p^1\vee p^2\vee\ldots\vee p^n \urcorner$ es un principio de n+1 excluso, y, concretamente, de alternatividad antagónica).

5ª.— Para cada i tal que $1\leq i\leq n$, hay alguna fórmula de S, $\ulcorner q \urcorner$, tal que $\ulcorner q^i \urcorner$ es un teorema que resulta de reemplazar, en $\ulcorner p^i \urcorner$, cada ocurrencia de la letra esquemática ‘p’ por la fórmula $\ulcorner q \urcorner$. Obsérvese bien que, para cada i, habrá una $\ulcorner q \urcorner$ diferente; e.d., si $i\neq j$, entonces la fórmula $\ulcorner q \urcorner$ tal que $\ulcorner q^i \urcorner$ sea un teorema diferirá de la fórmula $\ulcorner r \urcorner$ tal que $\ulcorner r^j \urcorner$ sea un teorema. ($\ulcorner p^i \urcorner$ es el iº disyunto del esquema teoremático contemplado en la condición anterior.)

(LR) En un sistema n-potente es posible definir cualquier functor de un sistema lógico que tenga matrices características n-valentes.

Prueba: sea ☼ un functor diádico de un sistema n-valente, S, y sea S’ un sistema n-potente. (Por ‘sistema n-valente’ entiendo un sistema con un modelo característico de n elementos). Las condiciones para que sea admisible una valuación de S en el dominio de n-elementos considerado pueden expresarse en forma de matrices, lo cual puede parafrasearse diciendo que: si $v(p)=u$ y $v(q)=u^1$, entonces $v(p☼q)=u^2$ —variando u^2 según varíen u y u^1 (e.d. debiendo escribirse, en el lugar de ‘u^2’, un nombre de uno u otro elemento, según qué se haya escrito en el lugar de ‘u’ y qué se haya escrito en el lugar de ‘u^1’). Ahora bien, esos u, u^1 y u^2 estarán tomados de entre los n elementos del dominio considerado; sean éstos 1, 2, …, n.

La fórmula metateórica «Si $v(p)=i$ y $v(q)=j$, entonces $v(p☼q)=k$» puede ser traducida al sistema n-potente S’ como sigue: $\ulcorner p^i\wedge q^j\supset r \urcorner$, siendo $\ulcorner r \urcorner$ una fórmula de S’ tal que $\ulcorner r^k \urcorner$ sea un teorema (y, para cualquier k tal que $1\leq k\leq n$, hay al menos una fórmula $\ulcorner r \urcorner$ así, en virtud de la condición 5ª de los sistemas n-potentes).

Luego se define ‘☼’ en S’ mediante la conyunción de todas las traducciones de las fórmulas metateóricas «Si $v(p)=i$ y $v(q)=j$, entonces $v(p☼q)=k$», para cualesquiera i y j de 1 a n (lo que quiere decir que la definición de '☼' en S' será una conyunción con n^2 conyuntos; en ocasiones, puede simplificarse, claro, en virtud de ciertos teoremas de equivalencia que haya en S').

La traducción así obtenida de cada fórmula metateórica del tipo indicado cumple las condiciones siguientes:

1ª) Del mismo modo que una valuación, v, no puede enviar a una fórmula sobre dos valores diferentes (sobre dos elementos diferentes del modelo), tampoco puede suceder que, para un mismo $\ulcorner p \urcorner$, se tenga en S', $\ulcorner p^i \wedge p^j \urcorner$, si $i \neq j$ (por lo dicho en la condición 4ª de los sistemas n-potentes), a menos, claro, que S' sea delicuescente.

2ª) Al igual que cada valuación, *v*, envía a una fórmula dada, $\ulcorner p \urcorner$, sobre uno u otro de los n elementos del sistema, para cualquier $\ulcorner p \urcorner$ se tiene en S' que es verdad respecto de $\ulcorner p \urcorner$ lo dicho por uno u otro de los n disyuntos del principio de n+1 excluso. (Eso no quiere forzosamente decir que, en S', se tenga que, para cualquier $\ulcorner p \urcorner$, o bien es un teorema $\ulcorner p^1 \urcorner$, o bien es un teorema $\ulcorner p^2 \urcorner$, etc. ¡No! Sólo quiere decir que es un teorema la disyunción entre esas n fórmulas).

En cuanto a la traducción de '☼' obtenida en S' tiene las características siguientes: para cualesquiera $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner q \urcorner$ de S, supongamos que, si una valuación admisible cualquiera de S envía a $\ulcorner p \urcorner$ sobre un valor de verdad —o elemento del modelo de S—, i, y envía a $\ulcorner q \urcorner$ sobre un valor de verdad, j, entonces enviará a $\ulcorner p☼q \urcorner$ sobre k; supuesto eso, será un teorema de S' el siguiente: $\ulcorner p^i \wedge q^j \supset r \urcorner$ (siendo $\ulcorner r^k \urcorner$ un teorema de S'); luego, si en S', o en cualquier extensión de S', es un teorema $\ulcorner p^i \urcorner$ y es un teorema $\ulcorner q^j \urcorner$, entonces es también un teorema $\ulcorner (p☼q)^k \urcorner$ (definido '☼' según las pautas de traducción indicadas). Porque, suponiendo que sean teoremas de [una extensión] de S' $\ulcorner p^i \urcorner$ y $\ulcorner q^j \urcorner$, entonces, por la definición de '☼', $\ulcorner p☼q \urcorner$ equivaldrá —por lo dicho al final de la condición 1ª— a $\ulcorner r \urcorner$ (siendo $\ulcorner r \urcorner$ esa fórmula de S' tal que $\ulcorner r^k \urcorner$ es un teorema de S'). Y, a la inversa, si esto sucede en S', se cumplirá lo indicado con respecto a las valuaciones admisibles de S. O sea, habrá forzosamente un nexo bicondicional entre el que suceda en S' lo apuntado sobre la relación entre $\ulcorner p \urcorner$, $\ulcorner q \urcorner$ y $\ulcorner p☼q \urcorner$ (siendo '☼' la traducción del '☼' originario de S) y el que sucede, con respecto a S, lo indicado sobre las valuaciones admisibles de S en el modelo característico en cuestión.

Pruebo ahora otro lema:

Definamos primero la noción de '**sistema n-potente vigoroso**' así: S' es un sistema n-potente vigoroso ssi S' es un sistema n-potente y, además, cumple las dos condiciones siguientes: 1ª) para el esquema del tipo considerado arriba (condición 4ª) $\ulcorner p^1 \vee p^2 \vee \ldots \vee p^n \urcorner$ se tiene como esquemas teoremáticos de S' a todos los de la forma $\ulcorner p^i \supset p \urcorner$, siendo $1 \leq i \leq n$; 2ª) es también un esquema teoremático de S' el siguiente: $\ulcorner p \supset . p^1 \vee p^2 \vee \ldots \vee p^{n-1} \urcorner$.

Lema 2.— Si S' es un sistema n-potente vigoroso, entonces, sean cuales fueren los elementos designados de un modelo característico de un sistema n-valente no delicuescente, S, S' es una extensión cuasiconservativa de S.

(Como un sistema no delicuescente es aquel cuyo cúmulo de fbfs es más amplio que su cúmulo de teoremas, resulta que elementos designados de un modelo de un sistema no delicuescente no pueden ser todos los elementos del modelo.)

Prueba.— **Primera parte**. Supongamos que los elementos designados del modelo característico del sistema n-valente S son: 1, 2, …, m (siendo $m \langle n$). Entonces, para cualquier functor ☼ (suponiendo, para simplificar, que ☼ sea diádico —la aplicación al caso de un functor monádico es obvia), se tendrá que $\ulcorner p☼q \urcorner$ es un esquema teoremático o teorema de S ssi cualquier valuación admisible, *v*, es tal que *v*(p☼q) es designado (por ser ese modelo característico de S). Pero también se tendrá, por ser S' un sistema n-potente vigoroso (y dada la condición 3ª de los sistemas n-potentes), y en virtud de la traducción prescrita en la prueba de LR, que $\ulcorner p☼q \urcorner$ será un teorema o esquema teoremático de S' ssi también lo es $\ulcorner (p☼q)^1 \vee . (p☼q)^2 \vee \ldots \vee (p☼q)^{n-1} \urcorner$. Con ello he probado que S' es una extensión de S.

Segunda parte. Voy a probar que S' es una extensión **cuasiconservativa** de S (siendo, por hipótesis, S' un sistema n-potente vigoroso y siendo S un sistema con un modelo característico n-valente). Puede S’ no ser una extensión conservativa de S sólo si alguna fórmula o esquema, ⌜p☼q⌝, que sea teoremático en S’ no es teoremático en S. Sin embargo, siendo los elementos designados del modelo característico de S 1, 2, … m (con m〈n), y teniéndose (por hipótesis) que, en S’, ⌜p^1⊃p⌝ y ⌜p^2⊃p⌝ y… y ⌜p^n⊃p⌝, puede definirse en S’ otro functor monádico afirmativo, ▾, así: ⌜▾p⌝ eq ⌜p^1∨…∨p^m⌝. Que ese functor es afirmativo se prueba fácilmente. Cumple la primera condición de los functores afirmativos, a saber: que, para algún ⌜q⌝, ⌜▾q⌝ es un teorema; en efecto, por ser S’ un sistema n-potente vigoroso, es un teorema, para algún ⌜p⌝ determinado, ⌜p^1⌝; y, por lo tanto, para ese ⌜p⌝ también es un teorema ⌜p^1∨…∨p^m⌝ (en virtud de la condición 3ª de los sistemas n-potentes), e.d. ⌜▾p⌝. Cumple también la condición segunda, a saber: ⌜▾p⊃p⌝ para cualquier ⌜p⌝ (por ser S’ n-potente vigoroso y por la condición 3ª de los sistemas n-potentes en general). Entonces, se prefijará a functores que sean traducciones de functores de S con el functor monádico ▾; y, obviamente, se tendrá que el resultado será un esquema teoremático o teorema de S’ ssi la fórmula o el esquema dado es en S.

Ahora pruebo el siguiente Metateorema:

Metateorema del Englobamiento, ME.— El sistema *Aj* es una extensión cuasiconservativa de todo sistema no delicuescente de lógica que sea n-valente (para algún n finito).

Prueba: Por el Lema 2, sabemos que un sistema n-potente vigoroso es una extensión cuasiconservativa de cualquier lógica n-valente dada. Pero el sistema *Aj* cumple las tres primeras condiciones de un sistema n-potente y, además, *Aj* contiene una infinidad de teoremas que afirman, cada uno de ellos, la verdad o existencia de un hecho menos verdadero que los anteriores de la serie, pero, con todo, verdadero. Esos teoremas forman la secuencia siguiente:

0\½∧.½\1

0\½∧.½\K½∧.K½\1

0\½∧.½\K½∧.K½\KK½∧.KK½\1

0\½∧.½\K½∧.K½\KK½∧.KK½\KKK½∧.KKK½\1

etc. Para **cualquier** n tal que 2≤n, se tiene en *Aj* un principio (de alternatividad antagónica) de n+1 excluso, como sigue. Si n=2, el principio es ⌜p∨¬p⌝; si n=3, el principio es ⌜Hp∨Sp∨¬p⌝; si n=4, el principio es ⌜Hp∨.½→p∧Np∨.p\½∧p∨¬p⌝; si n≥5, se tienen los siguientes principios:

5) Hp∨.K½→p∧Np∨.½→p∧(p\K½)∨.p\½∧p∨¬p

6) Hp∨.KK½→p∧Np∨.K½→p∧(p\KK½)∨.½→p∧(p\K½)∨.p\½∧p∨¬p

7) Hp∨.KKK½→p∧Np∨.KK½→p∧(p\KKK½)∨.K½→p∧(p\KK½)∨.½→p∧(p\K½)∨.p\½∧p∨¬p

y así sucede sucesivamente, hasta el infinito (la generalización se obtiene por inducción matemática).

Para cada uno de esos principios de n+1 excluso se cumplen en *Aj* todos los requisitos estipulados en la condición 4ª de los sistemas n-potentes: la conyunción de dos disyuntos de uno de esos principios entraña cualquier cosa (e.d. escribiendo como prótasis la conyunción de dos de esos disyuntos e inmediatamente después ‘⊃q’, el resultado es un esquema teoremático de *Aj*); y hay una letra esquemática común a todos los disyuntos de cada uno de esos principios de n+1 excluso, a saber: la letra ‘p’.

Además, para cada uno de esos principios de n+1 excluso, *Aj* cumple la condición 5ª de los sistemas n-potentes, a saber: para cada uno de los esquemas disyuntos hay una fórmula que, colocada en el lugar de la letra esquemática p de ese disyunto, da por resultado que el disyunto en cuestión se convierta en un teorema de *Aj*. En efecto: los siguientes son teoremas de *Aj*: ⌜H1⌝, ⌜S½⌝, ⌜¬0⌝, ⌜K½→K½∧NK½⌝, ⌜½→½∧(½\K½)⌝, ⌜X½\½∧X½⌝, etc. Por inducción matemática se prueba que el procedimiento a seguir para encontrar una fórmula apropiada a cada disyunto es el siguiente: para cualquier disyunto que contenga un conyunto implicacional (e.d. cuyo functor sea ‘→’) la fórmula será la prótasis de ese conyunto implicacional; y para el penúltimo disyunto de cada uno de los principios de n+1 excluso, siendo n≥4, la fórmula es ‘X½’. Y, para un disyunto de la forma ⌜r\s∧(s\r¹)⌝, la fórmula buscada será ⌜K(r•r¹)⌝ (vide A1006/25).

Además, *Aj* cumple las dos condiciones de un sistema n-potente vigoroso, para n≥2. 1) En cada uno de esos principios, se tiene que el resultado de escribir como prótasis uno cualquiera de los disyuntos, salvo el último de cada principio, seguido de ‘⊃p’ es un esquema teoremático de *Aj*. 2) También es un esquema teoremático de *Aj* el resultado de escribir ‘p⊃’ seguido de todos los disyuntos (de uno cualquiera de esos principios de n+1 excluso) salvo el último.

Así pues, *Aj* es un sistema n-potente vigoroso para n≥2. Con ello y con el Lema queda probado el Metateorema del Englobamiento.

Para una amplia gama de sistemas n-valentes cabe probar algo más fuerte, a saber: que *Aj* es una extensión conservativa (y no sólo cuasiconservativa) de tales sistemas. Tal es el caso, en particular, de la lógica clásica. La prueba de esto último (o sea: de que *Aj* es una extensión conservativa de la lógica clásica) es simplicísima: he probado que *Aj* es una extensión cuasiconservativa de la lógica clásica, siendo el principio de 2+1 excluso ⌜p∨¬p⌝; el functor monádico de aserción que se prefijará a cada teorema de *Aj* con sólo símbolos clásicos (∧,∨,⊃,¬) para que el resultado sea también un teorema de la lógica clásica será un functor definido como la disyunción de los primeros n-1 disyuntos de ese principio. Lo cual nos da: ⌜▾p⌝ eq ⌜p⌝. ‘▾’ es, pues, un functor meramente redundante, y, por ende, prescindible. Y, así, queda probado este **Corolario**: *Aj* es una extensión conservativa de la lógica clásica.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Acápite 4º.— Relaciones de Aj con la lógica intuicionista y el sistema infinivalente de Gödel

Entre los sistemas de lógica no clásicos el más afamado es la lógica intuicionista, LI[1].

He de decir a este respecto que no he hallado prueba alguna de que *Aj* sea una extensión cuasiconservativa de LI; probablemente no lo es. Pero *Aj* es una extensión cuasiconservativa de $G_{\aleph}$, que es el sistema infinivalente de Gödel[2]. Michael Dummett ha probado (en un artículo publicado en el *Journal of Symbolic Logic*, vol. 34 (1959), pp. 97-106) que $G_{\aleph}$ es el resultado de añadir a LI el esquema axiomático ⌜p↪q∨.q↪p⌝, siendo ‘↪’ el functor condicional de $G_{\aleph}$.

1 Acerca de la lógica intuicionista, LI, vale la pena leer el libro de A. Heyting, *Introducción al intuicionismo* (trad. Víctor Sánchez de Zavala), Madrid: Tecnos, 1976; si bien es un libro más para matemáticos que para lógicos de vertiente filosófica, no faltan en él sabrosas disputas que dilucidan las bases metafísicas de esa lógica; vide, en particular, las pp. 13-22 y 111-8; cf. también el libro de Susan Haack *Deviant Logic*, Cambridge U.P., 1974 (del cual hay una traducción castellana en la editorial Paraninfo); la discusión de S. Haack es empero un poco demasiado estrecha de miras, en el sentido de que despacha el enfoque intuicionista con el alegato de que no ha sido capaz de presentar una base «intuitiva» y **presistemática** neta y clara de aquello que trata de captar el sistema LI; pero ese argumento no es muy decisivo, sino que el principal motivo para aceptar o rechazar el intuicionismo estriba en la aceptación o el rechazo del verificacionismo, o sea: de la tesis de que es verdad sólo todo aquello que yo puedo constatar; que el ser verdad es serlo para mí. Vide también —para ver tratamientos de problemas teórico-lógicos en relación con el intuicionismo—: de Hilbert & Ackermann, *Elementos de lógica teórica* (trad. V. Sánchez de Zavala), Tecnos, 1962, pp. 41ss.; de Helena Rasiowa, *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*, Amsterdam: North Holland, 1974, cap. XI; y de Alonzo Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, Princeton U.P., 1956, pp. 41-7.

2 Vide de Kurt Gödel *Obras completas* (trad. J. Mosterín), Alianza, 1981, p. 111; de N. Rescher, *Many-Valued Logic*, Nueva York: McGraw-Hill, 1969, pp. 44-5; el libro de Church cit. en la nª precedente, p. 145, ejercicio 26.10.

$G_{\aleph}$ es un sistema de enorme interés. En primer lugar, $G_{\aleph}$ es una aproximación de LI más inteligible y plausible que la propia LI —dígase lo que se dijere; así, p.ej., $G_{\aleph}$ contiene principios obvios, incluso desde cierto enfoque constructivista (el constructivismo es la filosofía que inspira a la LI, y se caracteriza por un punto de vista idealista, según el cual la verdad es una construcción mental nuestra, y es verdadero algo ssi nosotros podemos comprobarlo; e.d.: es verdadero para mí, para mis capacidades constructivas mentales); entre esos principios está una de las leyes de DeMorgan para la negación fuerte, a saber: $\ulcorner\neg(p\wedge q)\hookrightarrow.\neg p\vee\neg q\urcorner$. Verdad es que, por contener tal teorema, $G_{\aleph}$ contiene un principio parecido al de tercio excluso, a saber: $\ulcorner\neg p\vee\neg\neg p\urcorner$; y ese principio no parece muy constructivístico que digamos, puesto que puede que yo no esté en condiciones de probar ni que es del todo falso que p, ni tampoco que sea en uno u otro grado verdad que p (e.d. ni tampoco que sea del todo falso que es del todo falso que p). El constructivismo subyacente en $G_{\aleph}$ es, pues, más laxo que el subyacente en LI. Pero, así y todo, puede hablarse, con respecto a $G_{\aleph}$, de un cierto constructivismo; en efecto, los teoremas de $G_{\aleph}$ de la forma $\ulcorner p\vee q\urcorner$ tales que ni $\ulcorner p\urcorner$ ni $\ulcorner q\urcorner$ son teoremas de ese sistema pueden entenderse, de manera laxamente constructivística (o sea: desde un ángulo laxamente verificacionista) como: O bien es construible que p, o bien es construible que q (=O bien es, en principio, verificable que p, o bien es, en principio, verificable que q; los lectores de este libro deben estar familiarizados con las discusiones de Ayer y otros filósofos acerca del verificacionismo laxo vs verificacionismo rígido). Ese constructivismo o verificacionismo laxo nos diría, pues, que, dado un hecho, o bien la supernegación del hecho es, en principio, verificable o construible, o bien lo es la supernegación de la supernegación del hecho. Para asegurar tal resultado —tal principio de cuasi-tercio-excluso— fuera menester aflojar los requisitos de verificabilidad, o ser más optimistas sobre las capacidades humanas de verificación o comprobación (filosóficamente hablando, esa tarea parece erizada de trampas y obstáculos difícilmente franqueables; pero no es tampoco fácil ultimarla, pues su propia imprecisión le permite agazaparse y esquivar los ataques). Además, el propio sistema de LI de Heyting contiene el teorema $\ulcorner\neg\neg(p\vee\neg p)\urcorner$, cuyo carácter rígidamente constructivo es muy discutible. (Muchos intuicionistas de más estricta obediencia que Heyting han repudiado por varios motivos —en los que aquí no entro por mor de brevedad— el sistema de Heyting; pero sus críticas ni son demoledoras, ni permiten echar a pique sin remisión el sistema de Heyting, el cual puede defenderse desde el ángulo de un idealismo mitigadamente optimista, e.d. tal que, aun sin postular omnisciencia humana, sí postule un amplio ámbito de verificabilidad o construibilidad, cuyas fronteras, no claramente precisadas antes de emprender la construcción del sistema intuicionista, quedan delineadas una vez que tal sistema viene axiomatizado; a lo menos a título de aproximación.)

La objeción mayor que cabe esgrimir —desde fuera, eso sí— contra el intuicionismo es, justamente, que va en contra de un realismo (sanísimo, a juicio del autor de este libro), según el cual el ser, la verdad, es ante todo, un **en sí**, no reduciéndose a, ni dependiendo de, el ser-par-mí, la verdad para nosotros —o para la humanidad. No es posible, pues, desde el punto de vista realista, compartir la opinión de Heyting de que, antes de que lo supiéramos, no era verdadero un teorema aritmético que diga que existe un número con determinadas características.

Pero el mayor interés del sistema gödeliano $G_{\aleph}$ es que permite expresar una teoría de la gradualidad, en la cual, sin embargo, los grados no son grados **de verdad**, ni de falsedad, sino de cuasiverdad, o de subverdad: de algo que viene a ser como aproximación a la verdad. Esa es también la concepción de Łukasiewicz, pero con la diferencia doble de que, por un lado, en el sistema gödeliano, sólo hay negación fuerte (en los de Łukasiewicz sólo hay negación débil); pueden, eso sí, combinarse ambas; y, por otro lado, el condicional gödeliano es más razonable, pues —entre otras cosas— establece un corte entre lo poco o mucho verdadero —o «próximo a la verdad»— y lo totalmente falso: en efecto, para una valuación admisible, v, $v(p\hookrightarrow q)=0$, siempre que $v(p)\neq 0$ y $v(q)=0$ —siendo '$\hookrightarrow$' el condicional gödeliano. (En cambio, en una lógica łukasiewicziana v(Si p, entonces q)=½ si $v(p)=½$ y $v(q)=0$). Por ello, si conservamos la lógica gödeliana, pero introduciendo la única modificación de ver como verdaderos (como designados) a todos los valores de verdad salvo 0, el resultado será coherente (mientras que, de hacer eso con una lógica łukasiewicziana, el resultado sería delicuescente, incoherente).

Aj es una extensión cuasiconservativa del sistema gödeliano $G_{\aleph}$. Basta con definir el condicional gödeliano '$\hookrightarrow$' como sigue:

$\ulcorner p\hookrightarrow q\urcorner$ eq $\ulcorner p\supset q\lor L(p\rightarrow q)\urcorner$

(La prueba de la afirmación que acabo de hacer requiere la exposición previa de un modelo del sistema *Aj*, lo cual se lleva a cabo en el libro (citado más arriba, en el *Prólogo*), *Introducción a las lógicas no-clásicas*).

Los axiomas de $G_{\aleph}$ —en nuestra transcripción— son (basándonos en una axiomatización hecha por Łukasiewicz, en 1953, de LI, la cual es más elegante que la axiomatización inicial de Heyting):

01. $p\hookrightarrow q\lor.q\hookrightarrow p$
02. $p\hookrightarrow.\neg p\hookrightarrow q$
03. $p\hookrightarrow.q\hookrightarrow.p\land q$
04. $p\land q\hookrightarrow p$
05. $p\land q\hookrightarrow q$
06. $p\hookrightarrow.p\lor q$
07. $q\hookrightarrow.p\lor q$
08. $p\hookrightarrow(q\hookrightarrow r)\hookrightarrow.p\hookrightarrow q\hookrightarrow.p\hookrightarrow r$
09. $p\hookrightarrow.q\hookrightarrow p$
10. $p\hookrightarrow r\hookrightarrow.q\hookrightarrow r\hookrightarrow.p\lor q\hookrightarrow r$
11. $p\hookrightarrow\neg q\hookrightarrow.q\hookrightarrow\neg p$

Demuestre el lector que todos esos esquemas son teoremáticos en *Aj*. Con ello se demuestra que *Aj* es una extensión de $G_{\aleph}$. Además (y es ésta la afirmación, aquí no demostrada, de que *Aj* es una extensión cuasiconservativa de $G_{\aleph}$) cada teorema de *Aj* que contiene sólo ocurrencias de letras esquemáticas y de los functores $\land$, $\lor$,$\hookrightarrow$, $\neg$, es tal que el resultado de prefijarle el functor 'H' es un teorema de *Aj* ssi el teorema dado (antes de esa prefijación es un teorema de $G_{\aleph}$. (Eso refleja el prejuicio de Gödel —y de los más autores— de que sólo lo totalmente verdadero es verdadero).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Acápite 5º.— Comentarios y puntualizaciones sobre los resultados precedentes

Son menester varias puntualizaciones en lo tocante a los resultados que se han expuesto en los dos acápites precedentes, particularmente en lo tocante al metateorema del englobamiento.

Ante todo, conviene determinar qué es exactamente lo que se ha probado. Eso depende de qué se entienda por un sistema. Si se concibe a un sistema del modo en que lo hice en el Acápite 2º, entonces, ciertamente hemos probado que *Aj* contiene o engloba a todos los sistemas finivalentes de lógica; y, en ese sentido, que todo lo que aseveran esos sistemas también lo asevera *Aj*. Pero, ¡ojo!, ahí está la trampa, y hay que evitarla. Si por **un sistema** o **una teoría** entendemos un cúmulo de afirmaciones con un sentido (e.d., si entendemos a un sistema como una pareja formada por un sistema en el sentido del Acápite 2º más una determinada interpretación, o traducción, o lectura en lengua natural, provista de su sentido usual, o de un sentido próximo al usual —acaso un sentido filosófico), entonces no hemos probado nada. Porque, en este sentido, de ninguna manera es verdad que la lógica clásica esté contenida en *Aj*. Y es que, en la lectura que le dan sus adeptos, la negación de la lógica clásica es 'no', y, por consiguiente, esa lógica contiene (bajo semejante lectura), para el mero 'no', el principio de Cornubia («Si p y no p, entonces q»), y el principio *e falso quodlibet* («Si no p, entonces:

si p, q»). Claro está, los adeptos de la lógica clásica harían bien leyendo el ‘~’ como ‘no en absoluto’; no perderían nada, puesto que, como —según ellos— no hay grados, es lo mismo decir ‘no’ que decir ‘no en absoluto’ (es lo mismo en el sentido de que —según **ellos**— hay sinonimia, equivalencia semántica aunque a lo mejor no pragmática; según el punto de vista dialéctico aquí sustentado, la diferencia en cuestión es semántica); y, si ellos no perderían nada, los gradualistas ganaríamos, pues podríamos manifestarnos de acuerdo con lo que dicen, al leer teoremas de la lógica clásica (nuestro desacuerdo vendría luego, cuando los clasicistas ya no están leyendo esos teoremas, sino que están glosándolos, y sería entonces, y sólo entonces, cuando dijeran que el ‘no’ y el ‘no en absoluto’ significan lo mismo).

En resumen, si por ‘un sistema’ se entiende una pareja formada por un conjunto de teoremas y reglas de inferencia y por una interpretación o lectura determinada de esos teoremas, entonces no hay una única lógica clásica, sino, por lo menos, **dos lógicas clásicas**: 1ª) aquella en la que el ‘~’ se lee como nuestro ‘N’, e.d. ‘no’ a secas; 2ª) aquella en la que el ‘~’ se lee como nuestro ‘¬’, e.d. ‘no en absoluto’, *Aj* es una extensión de la segunda, mas no de la primera (en este sentido de ‘sistema’ y en el sentido correspondiente a ‘extensión’).

Y otro tanto cabría decir respecto de otros sistemas. Muchos functores de muchos sistemas carecerían de lectura, en nuestra traducción (salvo expandiendo, y reconvirtiendo a notación primitiva o más cercana a la primitiva, las fórmulas que fueran traducciones en *Aj* de las fórmulas originarias de los sistemas en cuestión). (El «condicional» łukasiewicziano no puede ser considerado, desde nuestra óptica, como un condicional, p.ej.; por eso, **si** por ‘lógica n-valente de Łukasiewicz’ se entendiera el sistema de teoremas más la lectura que brindó Łukasiewicz, *Aj* no englobaría a esas lógicas.)

La segunda observación que hay que formular es la siguiente: en la definición de ‘extensión conservativa’ que dí en el Acápite 2º, no se consideraron las reglas de inferencia de una teoría. Eso quiere decir que una teoría T puede ser una extensión conservativa, o cuasiconservativa, de otra teoría T’ aun cuando T’ contenga reglas de inferencia que no contiene T. (Claro, T contendrá el resultado de restringir las reglas de inferencia de T’ a teoremas de T’, e.d. de hacerlas sistémicas; pero, si se incluye en la definición de un sistema a sus reglas de inferencia, es porque se las entiende en toda su potencia inferencial, como reglas no sistémicas).

Diremos que una extensión T de una teoría T’ es una **extensión recia** de T’ ssi cada regla (no sistémica) de inferencia de T’ es una regla (no sistémica) de inferencia de T. *Aj* no es una extensión recia de cada lógica finivalente. Tomemos, p.ej., la lógica trivalente de Łukasiewicz, Ł$_3$.

Las matrices características de Ł son éstas:

p	~p	→	1	½	0	∧	1	½	0	∨	1	½	0
0	1	1	1	½	0	1	1	½	0	1	1	1	1
½	½	½	1	1	½	½	½	½	0	½	1	½	½
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	½	0

Al functor condicional ‘→’ de Ł$_3$ lo transcribo como ‘↣’; y podemos definirlo así:

⌜p↣q⌝ eq ⌜Sp∧Sq∨¬p∨Hq⊃1∧.Hp∧¬q⊃0∧.Hp∧Sq∨(Sp∧¬q)⊃½⌝.

Ahora bien, *Aj* no contiene la regla de inferencia, ni siquiera sistémica: p↣q , p ⊦ q. Lo que sí contiene es la regla siguiente: H(p↣q , Hp ⊦ q. Y, como cada fórmula de *Aj* que sea una traducción de una fórmula łukasiewicziana es un teorema de Ł$_3$ ssi el resultado de prefijar a la fórmula dada de

Aj el functor 'H' es un teorema de *Aj*, resulta que la regla vale para ese fragmento de *Aj* no más (o sea: no es ni siquiera una regla sistémica, sino una regla subsistémica, que tan sólo vale dentro de un delimitado fragmento del sistema).

La tercera observación que conviene hacer es meramente terminológica. Lo que he entendido aquí —a tenor de la definición del Acápite 2º— por 'validez' es **validez semántica**. En cambio, a lo largo de los capítulos que forman esta Sección I he empleado el adjetivo 'válido' en un sentido de validez **sintáctica**, reputando válido a un esquema ssi cada instancia del mismo es un teorema. No hay inconveniente en usar la palabra 'válido' en sendos sentidos, con tal que se delimiten bien.

La cuarta observación que voy a formular es que, en el ya mencionado libro **INLONOCL**, se expone un modelo infinivalente no estándar del sistema *Aq*, que es *Aj* más los teoremas del cálculo cuantificacional que expondré en la Sección II. *Aq* es, pues, una extensión de *Aj*. Y el modelo, al ser un modelo de *Aq*, también lo es de *Aj*. Pero ese modelo no es característico.

La quinta y última observación que conviene enunciar es que *Aj* es el sistema de lógica más fuerte que se conozca, si estimamos a un sistema tanto más fuerte cuanto mayor es el número de sistemas de lógica de los cuales es una extensión cuasiconservativa. De ningún otro sistema hasta ahora descubierto (salvo de sistemas estrechamente emparentados con *Aj* y puestos previamente en pie por el autor de este libro) es válido nada remotamente parecido al metateorema del englobamiento. Este hecho no es fortuito, sino que se debe a una de las motivaciones filosóficas de la construcción de *Aj*, a saber: un principio —inspirado en Bradley, y, con otras formulaciones, en Hegel y también en Platón y acaso en Heráclito— de maximalidad coherente, según el cual vale la pena capturar y reproducir en un sistema coherente maximal —o lo más abarcador posible— cuantas más plasmaciones se pueda del pensamiento humano, de modo que el sistema resultante, sin dejar de ser coherente, englobe y reproduzca lo más posible de cuanto el hombre ha pensado sobre la realidad; porque, si se ha pensado, ello, en principio, constituye un indicio de que, de algún modo o en algún sentido, bajo alguna variante o versión, así son las cosas (en virtud del carácter receptivo del pensamiento humano realzado, con razón, por Spinoza en su hermoso y lúcido *Tractatus Breuis*). Claro, esa empresa no sería exitosa con un eclecticismo sin principios; ha de haber pautas para la construcción del sistema —no puede tomarse como única pauta esa norma del abarcamiento máximo posible, puesto que cuánto, o qué cosas, quepa abarcar dependerá de qué otras pautas vayan a regir la erección del sistema.

SECCIÓN II

EL CÁLCULO CUANTIFICACIONAL

Capítulo 0º.— ESCLARECIMIENTO DE LA NOCIÓN DE CÁLCULO CUANTIFICACIONAL Y CONTRASTE DEL MISMO CON EL VIEJO ENFOQUE SILOGÍSTICO

En esta Sección me ocuparé de esa parte de la lógica que es el cálculo cuantificacional, o sea: aquel en que se introducen teoremas y reglas de inferencia que involucran, con ocurrencias esenciales, a la palabra 'todo', además de las palabras ya involucradas con ocurrencias esenciales en [teoremas y reglas de inferencia d]el cálculo sentencial. P.ej., 'Si todo es incausado, entonces la revolución española de 1820 es incausada' y 'Si todo es hermoso, entonces hay algo hermoso' son, ambas, verdades de lógica cuantificacional, mientras que ninguna de ellas es una verdad de lógica sentencial.

Aunque el cálculo cuantificacional tiene precedentes que se remontan a la silogística aristotélica, en su forma rigurosa fue descubierto por Gottlob Frege en 1879. En esa forma rigurosa se hace posible afectar una misma fórmula por varios cuantificadores, como p.ej.: 'Todo ente es tal que hay algún ente tal que: el primero es más real que el segundo, si es que el primero es un tanto real'. Ese enunciado —que se revelará una verdad lógica, mas no del cálculo cuantificacional, sino de la teoría de conjuntos que estudiaré en la Sección III del presente libro— comporta dos cuantificadores: uno **universal** ('todo') y otro **existencial** o particular ('[hay] algún'), definiéndose «Hay algún ente que p» —o lo que es equivalente, «Algún ente es tal que p»— como «Es falso que todo ente sea tal que sea falso que p» (p.ej. 'Hay algún oso' abrevia a 'No es verdad que todo ente sea tal que ese ente no es oso'). La acumulación y entrecruzamiento de cuantificadores permite introducir argumentos que, por su complejidad, quedaban fuera del modestísimo y reducido ámbito de la silogística aristotélica. En particular, la silogística no brindaba ningún marco adecuado para una lógica de relaciones, mientras que sí viene posibilitada esa lógica por el cálculo cuantificacional junto con la teoría de conjuntos —la cual resulta posible sobre la base del cálculo cuantificacional y gracias al mismo.

La diferencia más radical entre el enfoque silogístico y el del cálculo cuantificacional estriba en que, para el primero, un sintagma del tipo «todo…» (p.ej., 'todo pájaro', 'todo número', 'todo portugués') o «algún…» es un término genuino; en tanto que, para el cálculo cuantificacional, no lo es, sino que se trata de un pseudosigno; el signo 'todo' ha de afectar directamente, no a un término, sino a toda una fórmula, y dentro de ella ha de afectar de uno u otro modo a cada constituyente de la misma según reglas sencillas que vamos a ver en seguida (a saber: determinando las variables que queden ligadas por ese cuantificador 'todo'; vide infra, caps. 1º y 2º sobre esas nociones de **variable** y de **variable ligada**). No es, pues, que 'Todo estudiante tiene algún pasatiempo intelectual' se forme afectando primero 'estudiante' por 'todo' y 'pasatiempo intelectual' por 'algún', y luego agrupando esos dos sintagmas con el verbo 'tiene' en el orden indicado. ¡No! Eso es lo que podría parecer por la estructura de superficie de la lengua; pero, a tenor de un análisis acorde con el cálculo cuantificacional, la oración tiene que analizarse de alguna manera semejante o parecida a ésta: 'Todo ente es tal que algún ente es tal que: si el primero es estudiante, entonces: el segundo es un pasatiempo intelectual y el primero tiene al segundo'. Gracias a ese análisis o paráfrasis, podemos desambiguar oraciones como 'Todo musulmán tiene [alg]una obligación', que puede entenderse, o bien como 'Hay alguna obligación que tiene todo musulmán' (e.d. 'Hay algún ente tal que todo ente es tal que: si el segundo ente es un musulmán, entonces: el primero es una obligación y el segundo tiene al primero') o como 'Todo musulmán es tal que hay alguna obligación tenida por él' (o sea: 'Todo ente es tal que hay algún ente tal que: si el primero es un musulmán, entonces: el segundo es una obligación y el primero tiene al segundo'). Que 'todo estudiante' o 'todo musulmán' no son términos parece probarse al ver que 'Todo estudiante ha cumplido los veinte años o no' se diferencia de 'Nazario ha cumplido los veinte años o no' en que la segunda oración equivale a 'Nazario ha cumplido los veinte años o Nazario no ha cumplido los veinte años' en tanto que la primera de ningún modo equivale a 'Todo estudiante ha cumplido los veinte años o todo estudiante (es tal que) no ha cumplido los veinte años', pues esto último equivale a 'Todo estudiante ha cumplido los veinte años o ningún estudiante ha cumplido los veinte años' (ya que «Todo ente es tal que no p» se abrevia como: «Ningún ente es tal que p»).

La silogística trataba a los pseudosintagmas del tipo «todo…» y «algún…» como auténticos términos; sólo que luego trataba de resolver las dificultades que asedian a tal tratamiento —algunas de las cuales son las que acabo de señalar— mediante expedientes complicadísimos y bastante *ad hoc*. Cuando se enfrentan dos enfoques bastante opuestos en torno a un mismo tema, es lo normal que cada uno de ellos pueda ser salvado introduciendo complicados ajustes, más o menos *ad hoc*. Pero lleva las de ganar aquel enfoque que permite una intelección más clara de la globalidad de los problemas, una intelección con leyes o normas o reglas más generales. Y, en el caso que nos ocupa, la abrumadora mayoría de los lógicos han seguido la ruta de Frege (el cálculo cuantificacional), aunque no falte uno que otro seguidor rezagado del enfoque silogístico.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 1º.— DILUCIDACIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIABLE Y DE LA RELACIÓN ENTRE VARIABLES Y CUANTIFICADORES

Llámase '[prefijo del] cuantificador universal' al prefijo 'todo' (o 'todo ente es tal que'), con sentido distributivo ('omnis' en latín, a diferencia de 'totus'; ese mismo sentido distributivo lo tiene en griego el 'πᾶς' en singular sin artículo determinado o en plural con o sin artículo determinado; en alemán lo tiene 'alle', a diferencia de 'ganz'; en inglés 'all' a diferencia de 'the whole'; en castellano la palabra 'todo' tiene ambos sentidos: el distributivo en 'todo país tiene una capital' y el de totalidad, en 'todo el país está azotado por la sequía').

Llámase '(prefijo del) cuantificador existencial' al prefijo 'Hay algún ente tal que'. Sinónimos del cuantificador universal son 'cada ente es tal que', 'todos los entes son tales que'; y del cuantificador existencial: 'Existe algún ente tal que', 'Hay al menos un ente tal que', 'Algún ente es tal que', 'A lo menos un ente es tal que', 'Uno u otro ente es tal que', etc.

Lo que hemos de averiguar ahora es qué nexos se dan entre ambos cuantificadores, el universal y el existencial. La concepción usual —a la que yo voy a adherirme— es que uno de esos dos cuantificadores se define anteponiendo al otro un 'no' (al igual que «Es posible que p» equivale a «No es necesariamente verdad que no p» y «Es necesariamente verdad que p» equivale a «No es posible que no-p»). Como «Todo ente es tal que no p» equivale a «Ningún ente es tal que p», tenemos, pues: «Hay algún ente que p» equivale a «No es verdad que ningún ente sea tal que p» (el tránsito del indicativo al subjuntivo es un cambio en la estructura superficial de la lengua debido a motivaciones pragmáticas —descartar confusiones— y ocasionado al prefijar un functor de negación). Similarmente, «Todo ente es tal que p» equivale a «No hay ente alguno tal que no-p»; y es que, en virtud de la involutividad de la negación simple, «No es verdad que no sea verdad que todo ente es tal que no es verdad que no sea verdad que p» —que, por definición, equivale a «No es verdad que haya algo que no p»— equivale a «Todo ente es tal que p».

Pero ahora hay que introducir las variables. En la lengua natural —al menos en la superficie de la misma— se usan los pronombres anafóricos 'él', 'el primero', 'el segundo', etc. El pronombre 'él', anafórico, es ambiguo en cuanto se ha hablado de varios entes; en idiomas con género, como el castellano, la alomorfía entre 'él', 'ella' y 'ello' —que son alomorfos en distribución generalmente complementaria y sólo marginalmente libre (en casos de nombres genéricamente ambiguos como 'mar', 'linde', 'vinagre' o 'arte')— permite despejar algunas confusiones; pero no todas, ni muchísimo menos: 'Lisardo dijo a Eucarpio que él tenía más paciencia que él': ¿quién tenía, según decir de Lisardo, más paciencia? Para desambiguarlo podemos indizar los pronombres terciopersonales anafóricos: '$él^1$', '$él^2$', '$él^3$', etc. Eso es lo que se hace al escribir, en vez de tales pronombres, variables, $x,y,z,u,v,x^1,y^1,\ldots,x^2, y^2,\ldots,x^3,\ldots$

Veamos ahora la relación entre las variables, o pronombres terciopersonales anafóricos indizados, y los cuantificadores. Al prefijar a una fórmula un cuantificador (existencial o universal) queremos asegurar, claro está, que se dé una conexión entre ese cuantificador prefijado y lo contenido o dicho en la fórmula; la conexión viene dada por el pronombre anafórico 'él', que, justamente, apunta, dentro de la fórmula, al prefijo cuantificacional. P.ej., en la oración 'Todo ente es tal que, cuando él es destruido, él cesa de existir' hay que distinguir: el cuantificador universal prefijado y el resto de la oración, que es una fórmula a la que llamaremos 'matriz' (en general matriz es una fórmula en la que hay, o puede haber, algún pronombre terciopersonal anafórico, o variable); en la matriz hay dos ocurrencias del anafórico 'él'. Pero sea ahora esta oración: 'Todo ente es tal que hay algún ente tal que, si él es más existente que él, él es menos existente que él'. Para que sea verdadera tal oración, es menester entender que, en la matriz de esa oración, la primera y la cuarta ocurrencias de 'él' se refieren a un mismo ente, refiriéndose la segunda y la tercera al otro ente; además: ¿cuáles de esas ocurrencias están conectadas con el cuantificador universal 'todo ente' y cuáles lo están con el existencial 'hay algún ente'?

Para despejar tales ambigüedades hay que colocar en cada cuantificador prefijado un índice o señal que permita saber cómo se liga el cuantificador en cuestión a la matriz, o sea: a través de qué ocurrencias de variables —de pronombres anafóricos— afecta a la matriz para, al afectarla, pasar a constituir una nueva oración. Por eso, en lenguaje reglamentado diremos, p.ej.: 'Todo ente, x, es tal que hay algún ente, z, tal que: x es más real que z a menos que x sea infinitesimalmente real'; si hubiéramos amputado a los cuantificadores las variables que hemos incrustado en ellos, no se sabría qué queremos decir. En esa oración, la primera ocurrencia de 'x' es una ocurrencia en el cuantificador universal; y la segunda y la tercera ocurrencias de 'x' están **ligadas** a (o por) ese cuantificador.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 2º.— ACLARACIÓN DE LAS NOCIONES DE VARIABLE LIBRE Y VARIABLE LIGADA

Voy ahora a aclarar más las nociones de **variable libre** y **variable ligada**, así como otras nociones con ellas emparentadas.

Los pronombres terciopersonales ('él', indizado o no) pueden ser: o anafóricos o directamente referenciales. Es anafórica una ocurrencia de un pronombre terciopersonal ('él', o sus sucedáneos: 'aquél', 'éste último', 'el primero', 'el segundo' …) en uno de estos dos casos: 1º) esa ocurrencia figura en una oración vinculada (por algún functor: condicional, conyuntivo, o lo que sea) a otra oración precedente en que figure una expresión designadora y, en virtud de ciertas reglas pragmáticas de economía comunicacional, la ocurrencia del pronombre terciopersonal en cuestión está haciendo las veces de una ocurrencia de la aludida expresión designadora (así en 'Gertrudis le dijo a Lázaro que él nunca obtendría su amor’): es lo que se llama ‘pronombres de pereza’; 2º) esa ocurrencia está ligada por un cuantificador, al cual está apuntando, como en ‘Todo hijo de Noé es tal que, o bien él es Sem, o bien él es Cam, o bien él es Jafet’ (en seguida dilucidaré más a fondo esa noción de variable o pronombre ligado). Cuando una ocurrencia de un pronombre terciopersonal no es anafórica, es directamente referencial; p.ej., si digo ‘Él está enfermo y no vendrá a trabajar hasta el jueves’, para que mi prolación tenga sentido es menester que el contexto comunicacional esté asignando a ‘él’ un referente; y, en ese caso, ‘él’ actúa como si fuera un nombre propio del ente al que está referido en esa circunstancia particular; del mismo modo que ‘yo’ dicho por Imelda (salvo en cita directa, claro) es como un nombre propio de Imelda, mientras que dicho por Anacleto es como un nombre propio de Anacleto.

Llamamos ‘**matriz**’ o ‘**fórmula**’ a cualquier oración bien formada incluyendo aquellas en que figuren pronombres terciopersonales —o, lo que es lo mismo, variables—, sean las ocurrencias de éstas anafóricas o directamente referenciales. (Algunos autores llaman **oraciones** sólo a aquellas fórmulas en las que no figuran variables directamente referenciales ni pronombres de pereza).

¡Prosigamos! En una fórmula u oración (en nuestro sentido, el amplio) pueden figurar ocurrencias directamente referenciales de variables (para nosotros, lo mismo da una variable que un pronombre terciopersonal indizado). (En lo sucesivo, no me ocuparé ya más de los pronombres de pereza). Así, p.ej.: ‘x está extenuando’. En el contexto en que se profiera una muestra de esa oración, estarán en vigencia reglas pragmáticas que aseguren a ‘x’ una referencia determinada; si no, no se habría dicho nada al decir la oración. Pero a esa oración se le puede prefijar el cuantificador ‘Todo ente, x, es tal que:’, o sea, en notación simbólica ‘∀x’; eso, así prefijado, es el cuantificador universal para la variable ‘x’ (para cada variable existe su propio cuantificador universal: ‘∀y’, ‘∀z’, ‘∀u’, ‘∀v’, ‘∀x’, etc.) En el cuantificador hay que distinguir —como quedó apuntado en el capítulo anterior— el **prefijo del cuantificador** (el prefijo del cuantificador universal es ‘∀’) y la variable del cuantificador (en el caso que nos ocupaba, ‘x’). Al haber prefijado a una oración o matriz en la que aparecía como directamente referencial la variable ‘x’ el cuantificador ‘∀x’, la variable deja de ser directamente referencial y pasa a ser anafórica: en el resultado, la variable ya no denota a nada por sí sola, sino que apunta al cuantificador; el resultado, en el caso que tomábamos como ejemplo, equivale a ‘Todo está extenuado’.

Naturalmente, si hay varias variables y prefijamos, en cierto orden, determinados cuantificadores, queremos asegurar que cada variable apunte al cuantificador respectivo. En ‘Todo ente, x, es tal que hay algún ente, z, tal que todo ente, u, es tal que: si x es relativamente más real que z, z es a lo sumo tan real como u’, es menester que se dé la diferencia de variables para que no resulte una confusión espantosa; y, dentro de la matriz, cada ocurrencia de una variable está apuntando al cuantificador que contenga la misma variable, no a otro cuantificador.

Eso que llamábamos ‘estar apuntando a’ es lo que se llama, técnicamente, ‘estar ligado por’.

Una ocurrencia de un cuantificador, ‘∀x’, tiene como **alcance** suyo a la más corta fórmula que la siga; si se abre un paréntesis izquierdo inmediatamente después de esa ocurrencia del cuantificador, el alcance [de la ocurrencia en cuestión] del mismo es la fórmula encerrada entre ese paréntesis izquierdo y su contraparte derecha. Una ocurrencia de una variable, ‘x’ p.ej., que figura en el alcance de una ocurrencia del cuantificador ‘∀x’ está **ligada por esa ocurrencia de** ‘∀x’ **en** la fórmula formada por el cuantificador más su alcance, a menos que haya otra ocurrencia del cuantificador ‘∀ x’ a la derecha de la anterior y en cuyo alcance se halle la ocurrencia de ‘x’ inicialmente considerada; y, si hay varias ocurrencias así, la ocurrencia en cuestión de ‘x’ está ligada por la ocurrencia de ‘∀x’ que se halle más a la derecha. La fórmula formada por el cuantificador más su alcance es una **cuantificación**. Cuantificaciones son, pues, ⌜∀xp⌝, ⌜∀zq⌝, etc. (siendo, en cada caso, ⌜p⌝ y ⌜q⌝ sendas fórmulas). Las ocurrencias de una variable, ‘x’ p.ej., que figuran en una fórmula ⌜p⌝ y que están ligadas en una cuantificación ⌜∀xq⌝, que figura en ⌜p⌝, a [la ocurrencia d]el cuantificador ‘∀x’ con que comienza ⌜∀xq⌝ se dice que están **ligadas en** ⌜p⌝. Obviamente, cada ocurrencia de ‘x’ que esté ligada en ⌜∀xp⌝ a la ocurrencia del cuantificador ‘∀x’ con que comienza esta última fórmula está ligada en ⌜∀xp⌝, a tenor de nuestra definición.

También diremos de aquella ocurrencia de la variable de un cuantificador que figura en una ocurrencia de dicho cuantificador (p.ej. la ocurrencia de ‘x’ que figura en ‘∀x’) que está ligada por aquella ocurrencia de ese cuantificador en la que se halla figurando.

Si una ocurrencia de una variable —sigo tomando a ‘x’ como ejemplo, pero se sobreentiende que lo propio vale de cualquier otra variable— figura en una fórmula ⌜p⌝ y no se halla ligada en ⌜p⌝, se dice que está **libre en** ⌜p⌝; es una **ocurrencia libre en** ⌜p⌝ de la variable en cuestión. Una **ocurrencia libre** (a secas) **de una variable** es aquella que figura en una ocurrencia de una fórmula ⌜p⌝ y está libre en cada fórmula en la que esté figurando la ocurrencia en cuestión de ⌜p⌝.

Nótese que cualquier ocurrencia de una variable, ‘x’, que esté ligada en la cuantificación ⌜∀xp⌝ a la ocurrencia del cuantificador ‘∀x’ con el que comienza ⌜∀xp⌝ y que sea diferente de la ocurrencia de ‘x’ que se halla en el propio cuantificador ‘∀x’ está libre en ⌜p⌝, o sea: en el alcance de esa ocurrencia del cuantificador ‘∀x’ (si estuviera ligada en ⌜p⌝, no podría estar ligada en ⌜∀xp⌝ a la ocurrencia inicial del cuantificador ‘∀x’ con la que empieza la fórmula ⌜∀xp⌝).

Una ocurrencia de ‘x’ se halla **bajo el alcance** (a diferencia de que meramente figure **en el alcance**) de una ocurrencia de ‘∀x’ ssi la ocurrencia en cuestión de ‘x’ está en el alcance de esa ocurrencia de ‘∀x’ y no se halla en el alcance de ninguna ocurrencia de ‘∀x’ que esté más a la derecha; con otras palabras: una ocurrencia de ‘x’ está bajo el alcance de una ocurrencia del cuantificador ‘∀x’ ssi está ligada, en cierta fórmula ⌜p⌝ en la que figura, a esa ocurrencia de ‘∀x’. Dícese para abreviar también que la ocurrencia en cuestión de ‘x’ está **ligada por** la ocurrencia en cuestión de ‘∀x’.

Tenemos, pues, definidas estas tres nociones: el que una ocurrencia de ‘x’ esté **ligada en** ⌜p⌝ **por** una ocurrencia de ‘∀x’ (una relación triádica de **estar ligado-en**… y **por**———); el que esté una ocurrencia de ‘x’ **ligada en** ⌜p⌝; y el que esté una ocurrencia de ‘x’ **ligada por** una ocurrencia de ‘∀x’ (esto último se dice también así: la ocurrencia en cuestión de ‘x’ está **bajo** el alcance de esa ocurrencia de ‘∀x’).

Una variable, ‘x’, está ligada en una fórmula ⌜p⌝ ssi hay alguna ocurrencia de ‘x’ que está ligada en ⌜p⌝. Una variable ‘x’ está libre en ⌜p⌝ ssi hay alguna ocurrencia de ‘x’ que está libre en ⌜p⌝. Una misma variable puede, pues, estar a la vez libre y ligada en una fórmula, si bien cada ocurrencia de esa variable en esa fórmula estará o únicamente libre o únicamente ligada. (En las explicaciones precedentes el ‘es así’ o ‘sucede que’ elípticos se entienden como ‘Es más bien cierto que sucede que’; y el ‘no’ como ‘Es bastante falso que suceda que’; por eso, en tales aclaraciones preliminares se razona **como si** se tratara de aplicar lógica clásica, ya que el ‘más bien sí’ y el ‘bastante no’ son totalmente incompatibles —su conyunción constituye una **super**contradicción, no una mera contradicción inofensiva.)

Una ocurrencia de una fórmula ⌜p⌝ que figure en una fórmula ⌜q⌝ está **ligada en** ⌜q⌝ **respecto de la variable** ‘x’ ssi hay en ⌜p⌝ una ocurrencia de ‘x’ que, estando libre en (esa ocurrencia de) ⌜p⌝, está ligada en ⌜q⌝ (o sea: ssi esa ocurrencia de ‘x’ está ligada por un cuantificador ‘∀x’ que está en ⌜q⌝ pero fuera de ⌜p⌝). Una ocurrencia de una fórmula ⌜p⌝ que figure en una fórmula ⌜q⌝ está ligada en ⌜q⌝ ssi hay alguna variable respecto de la cual esa ocurrencia de ⌜p⌝ está ligada en ⌜q⌝.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 3º.— OTRAS LECTURAS DE LOS CUANTIFICADORES Y RELACIONES ENTRE AMBOS

Vimos más arriba que el cuantificador existencial ‘Hay algún ente, , tal que’ (donde el espacio entre las dos comas ha de ser llenado por una ocurrencia de una u otra variable) es definible colocando una negación simple a la izquierda y otra negación simple a la derecha del cuantificador universal. Claro, en virtud de la involutividad de la negación simple (o sea, del ser equivalente lo dicho por ⌜p⌝ y por «no es cierto que no sea cierto que p», se puede, alternativamente, definir el cuantificador universal tomando como primitivo el existencial. No es importante el considerar a uno como más básico que el otro o el hacer lo inverso, precisamente porque son interdefinibles.

Más interés ofrece el brindar lecturas alternativas de sendos cuantificadores, y de la combinación entre uno u otro y la negación simple. El cuantificador universal ‘∀x’ se puede leer, además de como ‘Todo ente, x, es tal que’ de estos otros modos: ‘Cualquier ente, x, es tal que’, ‘Para todo x’, ‘Sea x el ente que fuere’, ‘Cada ente, x, es tal que’. El cuantificador existencial, ‘∃x’, se puede leer: ‘Hay algún ente, x, tal que’, ‘Para al menos un ente, x’, ‘Algún ente, x, es tal que’, ‘Hay (al menos) un ente, x, tal que’, ‘Uno u otro ente, x, es tal que’, y otras variantes estilísticas de esas locuciones —p.ej. la que resulta de reemplazar ‘hay’ por ‘existe’.

La secuencia de un cuantificador universal, ‘∀x’, y de la negación simple, ‘N’, se lee así: ⌜∀xNp⌝ se lee: «Ningún ente, x, es tal que p». Como ⌜∀xNp⌝ equivale —por la involutividad de la negación simple— a ⌜N∃xp⌝, e.d. a «No existe ente alguno, x, tal que p», esto último equivale (por simetría de la equivalencia) a «Ningún ente, x, es tal que p». Y, nuevamente por involutividad, tenemos que «Todo ente, x, es tal que p», o sea ⌜∀xp⌝, equivale a «Ningún ente, x, deja de ser tal que p», e.d. «ningún ente, x, es tal que no sea cierto que p», ⌜∀xNNp⌝. Que se da tal equivalencia, sin embargo, es algo que aparecerá probado como teorema en nuestro sistema de cálculo cuantificacional; de momento estamos examinándolo desde un ángulo presistemático, como equivalencia obvia a primera vista por lo menos. (El darse de la misma se debe a este principio: si el hecho de que p es equivalente al de que q, entonces el que cualquier ente, x, sea tal que p equivale a que cualquier ente, x, sea tal que q; este **principio de equivalencia cuantificacional** —a tenor del cual los cuantificadores no pueden socavar una equivalencia que se dé cuando no estén ellos involucrados— es también un teorema de nuestro sistema cuantificacional *Aq*).

Cerraré este capítulo señalando que, puesto que cada cuantificación de la forma «Todo ente, x, es tal que p» es equivalente a una oración de la forma «No existe ente alguno, x, tal que no sea cierto que p», toda cuantificación universal es una cierta negación de existencia (no de existencia **determinada** de tal ente, sino de existencia **indeterminada** de uno u otro ente, sea el que fuere, con la característica en cuestión —en este caso, la característica «no p»). Y, como cada ley científica es una cuantificación universal, cada ley científica es una negación de existencia. Y las negaciones de existencia son existencialmente comprometidas, sólo que constituyen, eso sí, compromisos existenciales **negativos**, a diferencia de los positivos. Un compromiso existencial positivo es una afirmación de existencia; uno negativo es una negación. La negación de existencia no es más neutral o incomprometida que la afirmación de existencia; ambas son igual de comprometidas, sólo que en direcciones opuestas. Todos los teoremas de un cálculo cuantificacional, sea el que fuere, son, pues, existencialmente comprometidos, sea en sentido positivo (por ser teoremas de la forma ⌜∃xp⌝) sea en sentido negativo (por ser de la forma ⌜∀xp⌝). No puede haber cálculo cuantificacional existencialmente neutro.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 4º.— VARIACIÓN ALFABÉTICA

He venido escogiendo siempre la variable ‘x’ como ejemplo. Pero lo propio hubiéramos podido hacer con cualquier otra variable, x, y, z, u, v, x^1, y^1, …, x^2, y^2, …, x^3, … Cada variable es un pronombre terciopersonal indizado, que remite a un cuantificador, ‘todo’, también indizado: ⌜∀x(…x———)⌝ es como «Todo ente^1 es tal que: …él^1———». Pero lo mismo da decir «Todo ente^1 es tal que: …él^1———» que decir «Todo ente^2 es tal que: …él^2———», con tal, eso sí, de que se preserve la uniformidad de ocurrencias, respectivamente de ‘él^1’ y de ‘él^2’, en las dos matrices de sendas cuantificaciones. Porque lo de los superescritos y lo de las diferencias entre variables es un expediente meramente para saber a qué cuantificador apunta cada ocurrencia de una variable (si son variables ligadas, que es lo que aquí nos interesa).

Por eso mismo, cabe afirmar que la diferencia entre ⌜∀xp⌝ y ⌜∀yq⌝ es meramente lingüística cuandoquiera que ⌜q⌝ difiera de ⌜p⌝ únicamente en que cada ocurrencia de ‘x’ en ⌜p⌝ que, estando libre en ⌜p⌝, esté naturalmente ligada en ⌜∀xp⌝ es reemplazada en ⌜q⌝ por una ocurrencia respectiva de ‘y’, la cual está libre en ⌜q⌝ y ligada en ⌜∀yq⌝, pero siempre y cuando no haya en ⌜p⌝ ninguna ocurrencia libre de ‘y’. Las dos cuantificaciones ⌜∀xp⌝ y ⌜∀yq⌝; si ⌜p⌝ y ⌜q⌝ difieren únicamente del modo indicado, dicen lo mismo: cada una de ellas dice que un ente cualquiera —apuntando a él en el primer caso como ‘x’ y en el segundo como ‘y’— es tal que p.

Como llamamos matriz a la fórmula que constituya el alcance de un cuantificador (y, por extensión, a cualquier fórmula, pues cualquier fórmula **puede** constituir el alcance de un cuantificador), diremos que una cuantificación es una **variante alfabética** de otra ssi: 1º) las matrices respectivas difieren únicamente en que cada ocurrencia libre que haya en la primera de una determinada variable es reemplazada en la segunda por una ocurrencia respectiva, y libre en la segunda, de cierta variable, la cual variable, sin embargo, no tiene en la primera matriz ninguna ocurrencia libre; 2º) la primera cuantificación es el resultado de prefijar a su matriz el cuantificador que contenga una ocurrencia de la primera variable (de aquella que sí puede que tenga ocurrencias libres en la primera matriz), mientras que la segunda cuantificación es el resultado de prefijar a su respectiva matriz el cuantificador que contiene la variable que, en esta segunda matriz, está reemplazando a la variable en cuestión de la primera matriz.

He aquí un ejemplo de variantes alfabéticas. Sea ⌜p⌝ la oración ‘x es bastante enérgico o x es más bien indolente’ y sea ⌜q⌝ la oración ‘z es bastante enérgico o z es más bien indolente’; entonces ⌜∀xp⌝ es una variante alfabética de ⌜∀zq⌝. Es obvio que la relación de ser una variante alfabética es simétrica (si una cuantificación es una variante alfabética de otra, ésta última es una variante alfabética de la primera) y es también transitiva (si una cuantificación es una variante alfabética de una segunda y ésta lo es de una tercera, la primera es una variante alfabética de la tercera).

Ahora decimos que una fórmula ⌜p⌝ es una **variante alfabética** inmediata de una fórmula ⌜q⌝ ssi la única diferencia entre ⌜p⌝ y ⌜q⌝ es que hay una cuantificación en ⌜p⌝ que es una variante alfabética de una cuantificación que está en su lugar en ⌜q⌝. Y se dirá que una fórmula ⌜p⌝ es una **variante alfabética** (a secas) de una fórmula ⌜q⌝ ssi: o bien 1) ⌜p⌝ es una variante alfabética inmediata de ⌜q⌝; o bien 2) hay una cadena finita de fórmulas, cada una de las cuales es una variante inmediata de la anterior, siendo en este segundo caso ⌜p⌝ la primera fórmula de esa cadena, y siendo ⌜q⌝ la última fórmula de la misma (o sea: ⌜q⌝ es una variante alfabética inmediata de una variante alfabética inmediata de… una variante alfabética inmediata de ⌜p⌝.

Un ejemplo de variantes alfabéticas que no son, sin embargo, variantes alfabéticas inmediatas es el siguiente: ‘todo ente, x, es tal que hay algún ente, z, tal que x se parece a z’ es una variante alfabética (no inmediata) de ‘Todo ente, z, es tal que hay algún ente, x, tal que z se parece a x’. Que la variación alfabética entre ellas no es inmediata lo revela el que no resulta la matriz de la segunda (a saber: ‘hay algún ente, x, tal que z se parece a x’) de reemplazar en la matriz de la primera (a saber: ‘hay algún ente, z, tal que x se parece a z’) cada ocurrencia libre de ‘x’ por una ocurrencia libre de ‘z’, pues no resulta factible semejante sustitución; si sustituimos cada ocurrencia libre de ‘x’ en la matriz de la primera oración por una ocurrencia de ‘z’, esa ocurrencia de ‘z’ no sería libre, sino ligada. Y, si bien la matriz de la matriz de la segunda oración resulta de la matriz de la matriz de la primera sustituyendo en esta última cada ocurrencia libre de ‘x’ por una de ‘z’ y viceversa, ello de ningún modo hace a la cuantificación ‘hay algún ente, x, tal que z se parece a x’ una variante alfabética inmediata de ‘hay algún ente, z, tal que x se parece a z’; pues se infringe en esa sustitución uno de los requisitos de variación alfabética inmediata, a saber: que la variable cuyas ocurrencias vengan a hacer, en el resultado de la sustitución, las veces de la variable en cuestión de la matriz inicialmente dada carezca de ocurrencias libres en esta última matriz.

Así y todo, las dos fórmulas consideradas en el ejemplo sí son variantes alfabéticas. De la primera es variante alfabética inmediata ésta: ‘Todo ente, u, es tal que hay algún ente, z, tal que u se parece a z’; de ésta última es variante alfabética inmediata la siguiente: ‘Todo ente, u, es tal que hay algún ente, x, tal que u se parece a x’; y de ésta última es variante alfabética la siguiente: ‘Todo ente, z, es tal que hay algún ente, x, tal que z se parece a x’. Con lo cual la primera fórmula de esa serie es variante alfabética mas **no** inmediata) de la última fórmula de la serie.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 5º.— NOTACIONES ADICIONALES

Al escribir ⌜p[x]⌝ estaremos representando esquemáticamente alguna fórmula ⌜p⌝ que contenga al menos una ocurrencia libre de la variable ‘x’; y lo propio sucede, claro está, con cualquier otra variable en lugar de ‘x’.

Al escribir ⌜p[x/y]⌝ estaremos representando esquemáticamente una fórmula que resulte de reemplazar uniformemente en la fórmula ⌜p⌝ cada ocurrencia libre de ‘x’ que haya en ⌜p⌝ por una ocurrencia **libre** de ‘y’. Obviamente, si no hay en ⌜p⌝ ocurrencia libre alguna de ‘x’, entonces: ⌜p⌝ = ⌜p[x/y]⌝. Si, al reemplazar una ocurrencia libre de ‘x’ en ⌜p⌝ por una ocurrencia respectiva de ‘y’ resulta que esta última no es libre, entonces hay que entender ⌜p[x/y]⌝ como el resultado de reemplazar uniformemente en ⌜p⌝ cada ocurrencia libre que haya de ‘x’ por una ocurrencia libre de la primera variable, en el orden alfabético, que no tenga ocurrencia alguna en ⌜p⌝. (En el caso de que escribamos una cuantificación de la forma ⌜∀yp[x/y]⌝ o ⌜∃yp[x/y]⌝, la variable del cuantificador también habrá de entenderse del mismo modo: en el caso de que no sea posible sustituir cada ocurrencia libre de ‘x’ en ⌜p⌝ por una ocurrencia libre de ‘y’, los esquemas cuantificacionales en cuestión se leerán como si, en lugar de ‘y’, figurara, tanto en la matriz como en el cuantificador, la primera variable, en el orden alfabético, que carezca de ocurrencias en ⌜p⌝.) El orden alfabético de las variables es éste: <x, y, z, u, v, x’, y’, z’, u’, v’, x^1, y^1, z^1, u^1, v^1, x^2, y^2, .., x^3, …, x^4, … >

Al escribir ⌜p[(x,y,z)]⌝ estaremos representando esquemáticamente una fórmula ⌜p⌝ en la que no figure ninguna ocurrencia libre ni de ‘x’, ni de ‘y’, ni de “z’ (y, por supuesto, lo propio sucede si en lugar de una o varias de esas tres variables se escriben otra u otras variables). El esquema ⌜p[(x,y,y)]⌝ lo abreviaré como ⌜p[(x,y)]⌝; y el esquema ⌜p[(x,x)]⌝ lo abreviaré como ⌜p[(x)]⌝ (entiéndase siempre que lo que digo a propósito de una o varias variables escogidas al azar puede aplicarse a cualquier o cualesquiera otras variables). Además, en un mismo esquema, si en el mismo figura una vez un esquema de la forma ⌜p[(x,y,z)]⌝ (respectivamente, de ⌜p[(x,y)]⌝ o de ⌜p[(x)]⌝), entonces **cada** ocurrencia de ⌜p⌝ en el esquema total habrá de entenderse como una ocurrencia de ⌜p[(x,y,z)]⌝ (respectivamente, de ⌜p[(x, y)]⌝ o de ⌜p[(x)]⌝).

Otra aclaración importante: una fórmula ⌜p[(x,y,z)]⌝ puede ser una fórmula con ocurrencias de las variables ‘x’, ‘y’ y ‘z’, con tal que ninguna de tales ocurrencias sea libre. Así, una cuantificación universal, ⌜∀xp⌝, o existencial, ⌜∃xp⌝, son instancias reemplazativas de ⌜q[(x)]⌝; y’ también son instancias reemplazativas de ⌜q[(x)]⌝ otros esquemas que contengan a esas cuantificaciones con tal que no haya, fuera de las mismas y en otro lugar del esquema, ocurrencia libre alguna de ‘x’.

También es importante esta otra aclaración: las notaciones ⌜p[(x,y,z)]⌝, ⌜p[x]⌝, ⌜p[x/y]⌝ y las otras semejantes se entienden de manera que lo indicado entre corchetes (sobre el figurar o no ocurrencias libres de ciertas variables en la fórmula en cuestión, o sobre el reemplazo de las ocurrencias libres de una variable por sendas ocurrencias libres de otra) se entiende aplicado únicamente al esquema representado por la letra que preceda inmediatamente al corchete izquierdo (‘p’ en el caso tomado como ejemplo), no a algo más amplio; si se quiere que se aplique a un esquema más amplio, se encierra ese esquema entre paréntesis, cerrándose así un paréntesis derecho inmediatamente delante del corchete. Así, p.ej. ⌜p⊃q[(x)]⌝ ha de entenderse como un esquema condicional con prótasis ⌜p⌝ y con apódosis ⌜q[(x)]⌝ y no como un esquema de la forma ⌜p⊃q⌝ en el que no hay ocurrencia libre alguna de ‘x’; esto último, en cambio, se expresa así: ⌜(p⊃q)[(x)]⌝.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 6º.— EL SISTEMA DE CÁLCULO CUANTIFICACIONAL *Aq*. BASE DEL SISTEMA

REGLAS DE FORMACIÓN

Empiezo por especificar las reglas de formación del sistema *Aq* como sigue:

1ª Si ⌜p⌝ es una fbf de *Aj* también es una fbf de *Aq*.

2ª Si ⌜p⌝ es una fbf, también lo son: ⌜∀xp⌝, ⌜∀yp⌝, etc. (cada resultado de prefijar a ⌜p⌝ un cuantificador universal cualquiera).

DEFINICIONES

Entiéndase, en lo que sigue, que cada definición es, por supuesto, un **esquema definicional** y que cada ocurrencia de una variable puede ser reemplazada, con tal que sea uniformemente tanto en el definiendum como en el definiens, por una ocurrencia respectiva de otra variable diferente.

dfq1 ⌜∃xp⌝ abr. ⌜N∀x(1•Np)⌝ dfq2 ⌜p↖q⌝ abr. ⌜p⇒q∧¬(q⇒p)⌝

$\ulcorner\forall x,x',x^1,\ldots,x^n p\urcorner$ abr. $\ulcorner\forall x\forall x'\forall x^1 \ldots \forall x^n p\urcorner$ $\ulcorner\exists x,x,x^1,\ldots,x^n p\urcorner$ abr. $\ulcorner\exists x\exists x'\exists x^1\ldots\exists x^n P\urcorner$

Estas últimas dos definiciones serán utilizadas en nuestras pruebas sin necesidad de ser aducidas como menciones justificativas.

ESQUEMA AXIOMÁTICO (adicional respecto de los de Aj)

Aq001 ∃x(∀xq•p)I∀x(∃xp•q)∧.∀x(p•q)→(∀xp•q)∧.∀xs\r[(x)]⊃∃x(s\r)∧.∀xp∧∃xq→∃x(p∧q)∧. ∀x¬p→¬∃xp∧.nr\r⊃∃x(r→∃xp→.r→p)

REGLAS DE INFERENCIA (adicionales respecto de las de *Aj*)

rinfq01 (regla de generalización universal): p ⊦ q

(Con tal que ⌜q⌝ sea el resultado de prefijar a ⌜p⌝ un número finito cualquiera de cuantificadores universales).

rinfq02 (regla de cambio de variables libres): p ⊦ q

(Con tal que ⌜q⌝ resulte de ⌜p⌝ sin más que reemplazar uniformemente cada ocurrencia libre (en ⌜p⌝) de cierta variable por una ocurrencia también libre de otra variable.)

rinfq03 (regla de variación alfabética): p ⊦ q

(Con tal que ⌜q⌝ sea una variante alfabética de ⌜p⌝).

ACLARACIONES

Entiéndase, a tenor de lo que precede, que son teoremas de *Aq*: 1º) cada teorema de *Aj*; 2º) cada instancia del esquema Aq001; 3º) cada resultado de aplicar alguna regla de inferencia de *Aj*, o alguna de las tres reglas de inferencia rinfq01, rinfq02, rinfq03, a premisas que sean teoremas de *Aq*.

La tercera regla primitiva adicional de *Aq*, rinfq03 —la regla de variación alfabética— no necesita más aclaración y justificación, después de lo dicho más arriba —en el capitulo 4º— sobre la noción misma de variación alfabética: dos variantes alfabéticas difieren sólo en palabras, pero dicen exactamente lo mismo la una que la otra. En cambio, las reglas de inferencia rinfq01 y rinfq02 son **sistémicas** —aplícanse únicamente dentro del sistema de lógica, o sea: a premisas que sean teoremas del sistema. (En la práctica, y a la hora de derivar reglas de inferencia derivadas, no me sentiré obligado a expresar esa precisión, señalando que las hipótesis que se consideren para aplicar una u otra de esas dos reglas primitivas, o alguna regla derivada a partir de ellas, han de ser, no meras hipótesis, sino teoremas del sistema lógico; no me sentiré obligado a hacerlo por la buena y sencilla razón de que en este libro me limito a utilizar las reglas para obtener teoremas a partir de teoremas.)

Si se quisiera hacer un uso no sistémico de esas reglas, resultarían consecuencias inadmisibles. (Un uso no sistémico de una regla es el de tomar como válidas en virtud de ella inferencias en las cuales no todas las premisas sean teoremas del sistema al que pertenece la regla en cuestión). Así, según la regla de generalización universal, de ‘Él está sumamente nervioso’ concluiríamos: ‘Todo ente está sumamente nervioso’. Similarmente, y a tenor de la regla de cambio de variables, de ‘Ese ente es bellísimo’ concluiríamos ‘Aquel ente es bellísimo’ (o de ‘Ella^1 es sobremanera generosa’ concluiríamos ‘Él^2 es sobremanera generoso’), en un contexto en que ‘ese ente’ esté mentando a Santa Sofía de Constantinopla, mientras que ‘aquel ente’ miente al Centro Cultural Pompidou de París).

Lo que nos autoriza a considerar, en cambio, como válidas todas las instancias aplicativas de ambas reglas cuyas premisas sean teoremas del sistema de lógica al que pertenecen (en nuestro caso, de *Aq* —y también de *CD* como lo señalaré en la Sección III de este libro) es que en un sistema de lógica —y, en general, en un sistema teorético cualquiera— no se afirma algo de «él» o de «ella» si eso no es verdad para **cualquier interpretación** posible de uno de esos pronombres; y por tanto lo afirmado es verdad —al menos, según lo entiende quien profese el sistema en cuestión—, no ya de un ente en particular, al que resultemos estar mentando como ‘él’ en virtud de una interpretación particular de ese pronombre —interpretación que hayamos adoptado en un contexto y entorno determinados en virtud de ciertas reglas semántico-pragmáticas contextuales—, sino de cualquier ente, pues a cualquier ente podría estar mentándolo ‘él’ bajo determinada interpretación de este pronombre.

Eso es lo que nos permite concluir, de un **teorema lógico** de la forma «él^{i} es tal que… él^{i}———» (donde i es cualquier índice) tanto (por rinfq01) «Todo ente, él^{i}, es tal que… él^{i}———» como (por rinfq02) «él^{j} es tal que… él^{j}————, donde $i \neq j$.

En la demostración de teoremas y esquemas teoremáticos de *Aq*, no aduciré expresamente como instancia justificativa ningún teorema o esquema teoremático de *Aj*, sino que con la indicación ‘Aj’, aludiré a unos u otros teoremas o esquemas teoremáticos de *Aj*, y también reglas de inferencia de *Aj*, que permitan afirmar lo que se diga, o efectuar la inferencia de que se trate. Pero no serán alegadas, ni siquiera con la alusión global ‘Aj’, las reglas de inferencia más simples de *Aj* (tanto las dos reglas de inferencia primitivas de *Aj* como aquellas reglas de inferencia derivadas en primer lugar), sino que su utilización se hará sin necesidad de mención alguna. Y tampoco se expresará la mención justificativa ‘Aj’ cuando lo que permita el paso inferencial en cuestión sea simplemente una definición de las de *Aj*; y es que el paso de una fórmula en la que aparece un determinado *definiens* a otra que de ella difiere sólo por la sustitución del mismo por su respectivo *definiendum* (o viceversa) es meramente notacional.

Antes de seguir adelante, conviene tener en cuenta esta aclaración: en el esquema axiomático Aq001 cada ocurrencia de ‘r’ se entiende como la de una fórmula que no contenga ocurrencia libre alguna de la variable ‘x’, porque, a tenor de la convención notacional sentada al respecto en el cap. 5º de esta Sección, como en ese esquema aparece una ⌜r[(x)]⌝, eso quiere decir que las demás ocurrencias d ‘r’ han de leerse como ocurrencias de ⌜r[(x)]⌝, o sea: de una fórmula, ⌜r⌝, que carezca de ocurrencias libres de ‘x’. Al pasar, pues, de ese esquema axiomático a un esquema teoremático que sea un conyunto indirecto del esquema (una fórmula, ⌜p⌝, es un conyunto indirecto de una fórmula conyuntiva ⌜q⌝ ssi ⌜p⌝ es un miembro conyuntivo de algún miembro conyuntivo de algún miembro conyuntivo de… de algún miembro conyuntivo de ⌜q⌝), tenemos que escribir, por lo menos una vez, no ‘r’ a secas, sino ⌜r[(x)]⌝, pues, desgajado ya el conyunto en cuestión del contexto de Aq001, es menester tal indicación para evitar la confusión y el desastroso error de ella resultante. O sea: el esquema ⌜nr\r⊃∃x(r→∃xp→.r→p)⌝ **no** es en absoluto un esquema teoremático de *Aq*; sí lo es, en cambio, el esquema ⌜nr\r[(x)]⊃∃x(r→∃xp→.r→p)⌝.

En esta Sección, la derivación de reglas de inferencia derivadas no se efectúa al principio, en capítulo aparte —como sucedió en la Sección I con las primeras reglas derivadas—, sino que se irá insertando o entreverando en la demostración de teoremas, al compás de los requerimientos de ulteriores demostraciones de teoremas.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 7º.— RESULTADOS DEMOSTRATIVOS FUNDAMENTALES

Empiezo por probar, en virtud de aplicaciones reiteradas de la[s] regla[s] de simplificación (rinf22 y rinf23) cada uno de los conyuntos indirectos de Aq001:

Aq011 ∃x(∀xq•p)I∀x(∃xp•q) (Prueba: Aq001, Aj)

Aq012 ∀x(p•q)→.∀xp•q (Prueba: idem)

Aq013 ∀xs\r[(x)]⊃∃x(s\r) (Prueba: idem)

Aq014 $\forall xp\wedge\exists xq\rightarrow\exists x(p\wedge q)$ (Prueba: idem)

Aq015 $\forall x\neg p\rightarrow\neg\exists xp$ (Prueba: idem)

Aq018 $nr[(x)]\backslash r\supset\exists x(r\rightarrow\exists xp\rightarrow .r\rightarrow p)$ (Prueba: idem)

Vayan ahora algunas consecuencias bastante inmediatas de esos esquema teoremáticos:

Aq019 $\forall x(1\bullet p)\rightarrow p$

Prueba:

(2)	$\forall x(1\bullet p)\rightarrow .\forall x1\bullet p$	Aq012
	$\sigma 2\rightarrow p$	Aj

Aq020 $p\rightarrow\exists xp$

Prueba:

(2)	$\forall x(1\bullet Np)\rightarrow Np$	Aq019
	$p\rightarrow\exists xp$	(2), Aj, dfq1

Aq021 $p[x/y]\rightarrow\exists xp$ (Prueba: Aq020, rinfq02)

Aq022 $\forall xp\rightarrow p$

Prueba:

(2)	$\forall xp\rightarrow .\forall xp\bullet 1$	Aj
	$\sigma 2\rightarrow\exists x(\forall xp\bullet 1)$	Aq020
	$\sigma 2\rightarrow\forall x(\exists x1\bullet p)$	Aq011
	$\sigma 2\rightarrow .\forall x\exists x1\bullet p$	Aq012
	$\sigma 2\rightarrow p$	Aj

Aq022/1 $\forall xp\rightarrow p[x/y]$ (Prueba: Aq022, rinfq02)

Aq023 $\forall xp\rightarrow\exists xp$ (Prueba:Aq022,Aq020,Aj)

Voy a brindar lecturas de instancias de los esquemas teoremáticos que preceden.

Del Aq011 vaya ésta: El que existe un ente, x, tal que no sólo todo ente, x, es tal que x es harto complejo sino que además x es autoidéntico equivale a que todo ente, x, sea tal que no sólo hay algún ente autoidéntico sino que además x es harto complejo.

Del Aq012: El que todo ente, x, sea tal que no sólo x tiene una razón suficiente para existir sino que x es causado, eso es verdad a lo sumo en la medida en que lo es que no sólo todo ente tiene una razón suficiente para existir, sino que además x es causado. (En la apódosis, la última ocurrencia de ‘x’ es libre: es un ‘él’ que puede mentar a cualquier cosa, según qué interpretación se le dé.)

Del Aq013: Si es menos verdad que todo ente, x, es existente que no que es existente el amor, entonces es que hay algo menos existente que el amor.

Del Aq014: El que todo ente sea hermoso y haya algún ente enigmático implica que hay algún ente que es a la vez hermoso y enigmático.

Del Aq015: El que todo ente, x, sea tal que no es verdad en absoluto que x sea mayor que x implica que es totalmente falso que haya algo mayor que sí mismo.

Del Aq018: Si el ser superpelagiano Vicente de Leríns es menos real que su ser pelagiano (a secas), entonces es que hay algún ente, x, tal que el que sea a lo sumo tan real el pelagianismo de Vicente de Leríns como el hecho de que algún ente es un doctor sincero pero equivocado implica lo siguiente: Vicente de Leríns es pelagiano a lo sumo en la medida en que x es un doctor sincero pero equivocado.

Del Aq019: Es verdad que todo ente, x, es tal que, no sólo existe lo totalmente verdadero o real, sino que x es desaliñado a lo sumo en la medida en que sea verdad que x es desaliñado. (La última ocurrencia de ‘x’ es libre; es un ‘él’ que puede mentar —según qué interpretación se le dé, y puede dársele cualquier interpretación— a cualquier ente, sin excepción.)

Del Aq020: x es sumamente versado en lenguas semíticas a lo sumo en la medida en que sea verdad que hay algún ente sumamente versado en lenguas semíticas.

Del Aq022: Es verdad que todo ente tiene alma vegetativa a lo sumo en la medida en que lo sea que x tiene alma vegetativa. (Este es el principio implicacional de aplicación: lo que es verdad de todos los entes —conjuntamente tomados— es verdad de un ente dado cualquiera, x.)

Del Aq023: El que todo ente sea incognoscible implica que hay algún ente incognoscible.

Nótese bien que, en cada una de esas instancias (condicionales o implicativas, según los casos), no afirmamos ni prótasis ni apódosis, sino el nexo (meramente condicional en unos casos, implicativo en otros —y hasta equivalencial en Aq011) entre dos oraciones, ninguna de las cuales es aseverada; en unos casos, serán verdaderas las oraciones atómicas que hayamos tomado como ejemplos para construir las oraciones moleculares; y en otros casos serán totalmente falsas (como seguramente lo es ‘todo ente es un tanto hermoso’, p.ej.).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 8º.— ALCANCE DE LOS CUANTIFICADORES Y RELACIONES ENTRE LOS DOS CUANTIFICADORES

En algunas oraciones moleculares, aparece un cuantificador (si es universal, ‘cada’, ‘todo’, ‘cualquiera’, etc.; si es existencial ‘algo’, ‘[al menos] un’, ‘uno u otro’, etc.) cuyo alcance es sólo la oración atómica que inmediatamente lo sigue; en otras oraciones, el alcance es más amplio. No es misión nuestra indagar las reglas del alcance en la estructura de superficie de una lengua natural como el castellano; son harto complejas (en ‘Todo los hombres tienen conciencia o carecen de ella’, el alcance es amplio; en ‘Todos los perros tienen amo, o el mundo está mal hecho’, el alcance es angosto). Nuestro cometido es averiguar en qué circunstancias es correcto pasar de un alcance amplio a otro angosto, o viceversa, sin desmedro de la verdad.

El esquema Aq024 nos muestra un primer caso de desplazamiento de cuantificadores a saber: aquel en el que podemos pasar de una oración implicacional con un cuantificador universal prefijado a toda la implicación a una oración implicacional semejante pero con la diferencia de que el cuantificador universal en cuestión, en lugar de estar prefijado a toda la oración implicacional, lo está únicamente a la apódosis de la misma. Es un principio de **desprenexación**; es válido en el caso previsto por Aq024, o sea: cuandoquiera que la prótasis de la oración implicacional no contiene ninguna ocurrencia libre de la variable del cuantificador. Una instancia de Aq024 es ésta: ‘Si cualquier ente es por lo menos tan bueno como Lucifer, entonces es que la bondad de Lucifer es a lo sumo tan real como el hecho de que todo ente es bueno’. Otro ejemplo es éste: ‘Si cualquier ente es al menos tan existente como lo infinitesimalmente real, entonces la existencia de lo infinitesimalmente real se da a lo sumo en la medida en que todo es existente’.

Aq024 $\forall x(r[(x)]\rightarrow s)\supset .r[(x)]\rightarrow\forall xs$

Prueba:

(2) $r[(x)]\rightarrow\forall xs\vee\exists x(s\backslash r)$ Aq013, Aj

(3) $\forall x(r[(x)]\rightarrow s)\wedge\exists x(s\backslash r)\supset\exists x(r\rightarrow s\wedge .s\backslash r)$ Aq014, Aj

(4)	$\neg(r\to s\wedge .s\backslash r)$	Aj
(5)	$\forall x4$	(4), rinfq01
(6)	$\neg\delta 3$	(5), Aq015
(7)	$\forall x(r[(x)]\to s)\supset\neg\exists x(s\backslash r)$	(6), (3), Aj
	$\sigma 7\supset\sigma 2$	(2), Aj

Aq025 $\forall x(p\to q)\supset.\forall xp\to\forall xq$

Prueba:

(2)	$p\to q\to.\forall xp\to q$	Aq022, Aj
(3)	$\forall x(p\to q)\to.p\to q$	Aq022
	$\sigma 3\to.\forall xp\to q$	(2), Aj
(4)	$\forall x3$	(3), rinfq01
(5)	$\sigma 3\to\forall x\delta 3$	Aq024, (4)
	$\sigma 3\supset\forall x\delta 3$	(5), Aj
	$\sigma 5\supset.\forall xp\to\forall xq$	Aq024

Aq026 $\forall x(pIq)\supset.\forall xpI\forall xq$

Prueba:

(2)	$\forall x(pIq\to.p\to q)$	Aj, rinfq01
(3)	$\forall x(pIq)\supset\forall x(p\to q)$	(2), Aq025, Aj
	$\sigma 3\supset.\forall xp\to\forall xq$	Aq025
(4)	$\forall x(pIq)\supset.\forall xq\to\forall xp$	idem
	$\forall x(pIq)\supset.\delta 4\wedge\delta 3$	(3), (4), Aj
	$\sigma 4\supset.\forall xpI\forall xq$	Aj

El esquema Aq025 nos muestra que, si es verdadero el resultado de prefijar a una implicación un cuantificador universal, entonces es verdadera la implicación que resulta de prefijar ese mismo cuantificador, por separado, tanto a la prótasis como a la apódosis de la implicación. Y el esquema Aq026 muestra lo propio con respecto a una equivalencia. He aquí una instancia de Aq025: Si todo ente, x, es tal que x es bueno a lo sumo en la medida en que x se abstiene de ser malo, entonces el que todo ente sea bueno es verdad a lo sumo en la medida en que todo ente se abstiene de ser malo. De Aq026: El que todo ente, x, sea tal que x es coloreado en la misma medida en que x se abstiene de ser incoloro, implica que el que todo ente sea coloreado equivale a que todo ente se abstenga de ser incoloro.

Ahora paso a considerar relaciones de equivalencia entre fórmulas en que están involucrados el functor de negación simple (el mero 'no') y uno u otro de los cuantificadores universal y existencial. Ya consideramos esas relaciones, pero desde un ángulo presistemático, en el cap. 3º de esta Sección. Ahora vamos a demostrar que son teoremas del sistema.

Ya dije en el cap. 3º que cada uno de los dos cuantificadores es definible a partir del otro, con tal de colocar una negación simple delante de éste último y otra detrás de él. A la hora de definir el cuantificador existencial en nuestro sistema no he seguido esa vía, sino que he definido $\ulcorner\exists xp\urcorner$ como $\ulcorner N\forall x(1\bullet Np)\urcorner$, pues resultaba útil para hacer más elegante la base axiomática de *Aq*. Pero la equivalencia que no obtuvimos por mera definición, la obtenemos ahora —en el esquema Aq030— como teoremática. Antes, veamos unos pocos resultados preliminares.

Aq027 $\forall xNNpI\forall xp$

Prueba:

(2)	$\forall x(NNpIp)$	Aj, rinfq01
	Aq027	(2), Aq026

Aq027/1 $\exists xNNpI\exists xp$

Prueba:

(2)	$\forall x(1\bullet NNNpI.1\bullet Np)$	Aj, rinfq01
(3)	$\forall x(1\bullet NNNp)I\forall x(1\bullet Np)$	(2), Aq026
(4)	$N\sigma 3IN\delta 3$	(3), Aj

	Aq027/1	(4), dfq1

Aq028 N∀xpI∃xNp

Prueba:

(2)	∀x(1•NNpIp)	Aj, rinfq01
(3)	∀x(1•NNp)I∀xp	(2), Aq026
(4)	Nσ3INδ3	(3), Aj
	Aq028	Aj, 84), dfq1

Aq029 N∃xpI∀xNp

Prueba:

(2)	N∃xpIN∃xNNp	Aj, Aq027/1
	σ2INN∀xNp	Aq028
	σ2I∀xNp	Aj

Aq029/1 N∃xNpI∀xp (Prueba: Aq028, Aj) Aq030 N∀xNpI∃xp (Prueba: Aj, Aq029)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 9º.— DISCUSIÓN CON EL INTUICIONISMO ACERCA DE LAS EQUIVALENCIAS PRECEDENTES

De entre las escuelas contemporáneas de lógica, la que más se ha señalado por su oposición a algunas de las equivalencias que acabo de demostrar en el capítulo anterior es el **intuicionismo**, o sea: el constructivismo radical, fundado por Brouwer y Heyting, según el cual las verdades (matemáticas, en particular, si bien el filósofo inglés Michael Dummett ha extendido y aplicado el intuicionismo a ámbitos extramatemáticos) comienzan a existir cuando el sujeto las conoce, o cuando, por lo menos, el sujeto dispone de un procedimiento de decisión aplicando el cual se llegará, tras un número finito de pasos, ineluctablemente, a zanjar el problema entre manos, obteniendo una respuesta categórica y definitiva, un 'sí' o un 'no' rotundos. En una palabra: trátase de una modalidad del principio idealista de que **ser verdad es ser verdad para mí**.

Ahora bien, de que, para mí, no todo ente sea tal que p (e.d. de que no se dé el caso de que yo pueda constatar que todo ente es tal que p —de que yo pueda construir todos los entes que p y probar que son todos) no se sigue que, para mí, exista un ente que no p (e.d. que yo pueda construir un ente con la característica no-p —o, lo que intuicionísticamente viene a ser lo mismo, que yo pueda construir un ente del que pueda demostrar que carece de la característica p). Asimismo, de que no haya nada que no p (lo cual, intuicionísticamente interpretado, significa que yo puedo refutar la hipótesis de que pueda construir un objeto con la característica no-p) no se desprende que todo sea tal que p (o sea, intuicionísticamente interpretado: que yo pueda demostrar de cada objeto que él tiene la característica p y que pueda demostrar que ésos son todos los objetos —e.d. demostrar, acerca de cada objeto, que es correcta mi prueba de que ese objeto tiene la característica p). Del mismo modo, falla, según el intuicionismo, la implicación de ⌜∃xp⌝ por ⌜N∀xNp⌝: aunque yo pueda probar que es absurda la hipótesis de que yo pueda construir todos los objetos que carecen de la característica p y que pueda probar que ésos son todos los objetos, aun así no se seguiría forzosamente que yo pueda construir un objeto con la característica p. Los intuicionistas admiten, sin embargo, equivalencias sucedáneas, como las siguientes (transcritas por mí a nuestra notación): ⌜∀xNNpIN∃xNp⌝; ⌜NN∃xpIN∀xNp⌝; pero, en la ontología idealista del intuicionismo, falla la ley de la doble negación: de ⌜NNp⌝ no se deduce ⌜p⌝; porque «No es cierto que no sea cierto que p» equivale a «Cabe refutar la hipótesis de que haya una refutación de la hipótesis de que p»; y eso no equivale a que haya una prueba de que p —puede que, aunque la hipótesis de que p sea irrefutable, no sea, empero, demostrable. Y es que, para concluir, de que una hipótesis es irrefutable, que tal hipótesis es demostrable, tendríamos que introducir o presuponer un principio de superoptimismo epistémico, que los intuicionistas, sabiamente, se han abstenido de sentar: que la mente humana —o la mía en particular— puede demostrar la verdad de cuanto no puede refutar. (En verdad, ni siquiera es cierto que toda hipótesis humanamente irrefutable es verdadera; refutar es demostrar la falsedad de algo; y cada demostración vale con relación a ciertas premisas y ciertas reglas de inferencia; e.d. la validez de una demostración o prueba es siempre relativa no más; por eso, al decir que algo es indemostrable, o irrefutable, se sobreentiende, sobre la base de determinados axiomas y reglas de inferencia; pero puede que esos axiomas y reglas de inferencia no permitan probar ciertas verdades; tal es el destino de cualquier conjunto humano de axiomas y reglas de inferencia.)

Los argumentos intuicionistas se fundan en premisas absolutamente incompatibles con las presuposiciones básicas, fogosamente realistas, que animan a mi propio enfoque lógico, para el cual se deslinda el ser del ser-conocido-por-mí (o incluso del ser humanamente conocible). El que haya algo con cierta característica no implica, ni siquiera entraña, que sea humanamente demostrable que lo hay. Claro, para el idealismo en general (incluido el intuicionismo o constructivismo) existir es ser intuible por el hombre (o ser construible por la mente humana); como ya lo dije líneas más arriba, el intuicionismo originario de Brouwer sólo aplicaba esa reducción idealista de **ser** a **ser humanamente conocible** a la esfera de los entes matemáticos, pero un intuicionista más consecuente, el lógico y filósofo inglés Michael Dummett, la está aplicando a todo el ámbito de lo real: ser-verdad es **ser demostrablemente verdadero** (demostrablemente para nosotros los humanos de hoy, o los miembros de «nuestra» comunidad intelectual, sea ésta la que fuere).

Desde mi propio enfoque realista —que coincide en esto con el de la lógica clásica— no es lo mismo que haya un ente con cierta característica que el que yo pueda demostrar de cierto ente particular que él tiene tal o cual característica. Por eso, aunque yo sepa, p.ej., que hay algo con cierta característica, puede que ignore, sin embargo, qué ente o qué entes son los que la tienen. Sé, p.ej., que algún ente es tal que es más bien cierto que ese ente es un ser humano que vivió hace exactamente doscientos siglos y usaba fuego para calentarse; pero no sé cuáles sean esos entes, no puedo «construir» ninguno, no puedo demostrar de ningún ente x en particular que x es un ente tal que sea más bien cierto que x es un ser humano que vivió hace 200 siglos y que usaba fuego para calentarse. (Por lo demás, no es lo mismo tampoco **saber** que **demostrar** o haber demostrado. Hay cosas sabidas por fe, sin demostración.) Y, aunque yo sepa que hay algún o algunos virus que provoca[n] cierta enfermedad, puede que desconozca cuál o cuáles sean. Y no vale replicar que sé que **el** virus que la provoca la provoca, y que, por consiguiente, sé de algún ente (del virus que la provoca) que él la provoca. ¡No! Porque puede que haya varios virus diferentes que la provoquen; luego yo no puedo señalar ningún virus en particular, ni siquiera por descripción, como aquél que provoca la enfermedad en cuestión.

En resumen, al defender las equivalencias rechazadas por los intuicionistas (como la Aq027, Aq027/1, Aq028, Aq029, Aq029/1 y Aq030), estamos optando —en esto, junto con la lógica clásica— por una ontología realista, antiidealista. La lógica no es metafísicamente neutral. Cada sistema de lógica vehicula una ontología. Cierto que un mismo sistema de lógica puede ser común a varias teorías ontológicas; pero en ese caso estamos llamando ‘sistema lógico’ al denominador común de esas varias ontologías; eso no quiere decir que la lógica sea ontológicamente neutral sino únicamente que en un caso así se prefiere denominar ‘sistema lógico’ a algo más restringido que un sistema ontológico tomado en su totalidad; si éste es axiomatizado con notación simbólica, nada se opondrá a denominarlo **sistema lógico**; y, al ser axiomatizados así los dos o más sistemas ontológicos rivales en consideración, ya carecerá de pretexto o excusa el seguir diciendo que el sistema lógico es ontológicamente neutral (sería como decir que el uso del pimentón es culinariamente neutral porque es compatible con varios estilos culinarios; ¿lo es acaso con todos?).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 10º.— NUEVOS RESULTADOS SOBRE EL ALCANCE DE LOS CUANTIFICADORES

Voy a demostrar en este capítulo nuevos resultados sobre el tema, ya abordado en el cap. 8º, del alcance de los cuantificadores. En primer lugar, el esquema Aq031 nos muestra que el que sea enteramente cierto que todo ente tiene cierta característica equivale a que cada ente en particular sea tal que él tiene enteramente esa característica. Así, p.ej., el que sea enteramente cierto que todo ente existe en uno u otro grado equivale a que de cada ente sea totalmente verdad que él existe en uno u otro grado.

rinfq11 p→q ⊦ ∀xp→∀xq

Derivación:

hip	p→q	hipótesis
(2)	∀x(p→q)	hip, rinfq01
	∀xp→∀xq	(2), Aq025

Aq031 H∀xpI∀xHp

Prueba:

(2)	H∀xp→Hp	Aq022, Aj
(3)	∀x2	(2), rinfq01
(4)	H∀xp→∀xHp	(3), Aq024
(5)	∀xHNNp→HN∃xNp	Aq015
	σ5→H∀xp	Aq029/1, Aj
(6)	∀xHp→H∀xp	Aj,rinfq01,Aq026,(5)
	Aq031	(6), (4), Aj

Aq032 ∀x(pIq)⊃.∃xpI∃xq

Prueba:

(2)	∀x(pIq)⊃∀x(NpINq)	Aj, rinfq11
	σ2⊃.∀xNpI∀xNq	Aq026
	σ2⊃.∃xpI∃xq	Aj, Aq030

La regla rinfq11 nos autoriza a concluir, p.ej., del teorema 'Él es existente a lo sumo en la medida en que él es (al menos) un poco existente' lo siguiente: 'El que todo ente sea existente implica que todo ente es (al menos) un poco existente'.

Una instancia de Aq032 es ésta: 'Si todo ente, x, es tal que x es una persona culta en la misma medida en que tiene conocimientos científicos y lingüísticos, entonces el que haya alguna persona culta equivale a que haya algún ente que tenga conocimientos científicos y lingüísticos'.

El esquema Aq033 que voy a demostrar a continuación es otro de los principios de **desprenexación**: sacar el cuantificador prefijado a la fórmula implicacional total de su posición inicial, para colocarlo esta vez delante de la prótasis implicacional —si es que la apódosis carece de ocurrencias libres de la variable del cuantificador—, pero, eso sí, **cambiando** el cuantificador: reemplazando el cuantificador universal, que era el dado, por uno existencial. Compárese con Aq024, donde el cuantificador pasaba a estar prefijado no a la prótasis sino a la apódosis (pues en ese caso era la prótasis la que carecía de ocurrencias libres de la variable del cuantificador) y se mantenía el mismo tipo de cuantificador, o sea el universal.

rinfq12 $p\rightarrow q \vdash \exists xp\rightarrow\exists xq$

Derivación:

hip	$p\rightarrow q$	hipótesis
(2)	$\forall x(p\rightarrow q)$	hip, rinfq01
	$\exists xp\rightarrow\exists xq$	(2), Aq034

rinfq13 $pIq \vdash \forall xpI\forall xq$ (Derivación, rinfq01, Aq026)

rinfq14 $pIq \vdash \exists xpI\exists xq$ (Derivación: rinfq01, Aq032)

Aq033 $\forall x(s\rightarrow r[(x)])\supset.\exists xs\rightarrow r$

Prueba:

(2)	$\forall x(Nr[(x)]\rightarrow Ns)\supset.Nr\rightarrow\forall xNs$	Aq024
	$\sigma 2\supset.\exists xs\rightarrow r$	Aj, Aq030
(3)	$\forall x(s\rightarrow r[(x)])\supset\sigma 2$	Aj, rinfq11
	$\sigma 3\supset\delta 2$	(2)

Aq034 $\forall x(p\rightarrow q)\supset.\exists xp\rightarrow\exists xq$

Prueba:

(2)	$\forall x(p\rightarrow q)\supset\forall x(Nq\rightarrow Np)$	Aj, rinfq11
	$\sigma 2\supset.\forall xNq\rightarrow\forall xNp$	Aq025
	$\sigma 2\supset.\exists xp\rightarrow\exists xq$	Aj, Aq030

Aq035 $L\exists xpI\exists xLp$

Prueba:

(2)	$H\forall xNpI\forall xHNp$	Aq031
(3)	$NH\forall xNpIN\forall xHNp$	(2), Aj
(4)	$LN\forall xNpI\exists xNHNp$	(3), Aj, Aq028
	$\sigma 4I\exists xLp$	Aj, rinfq14
	Aq035	(4), Aq030, Aj

El esquema Aq034 es como Aq025, sólo que en la apódosis (tanto en la prótasis de la apódosis como en la apódosis de la apódosis) aparece un cuantificador existencial en vez de uno universal. Una instancia de Aq034 es ésta: ‘Si todo ente, x, es tal que x fuma a lo sumo en la medida en que x es vicioso, entonces que haya algún ente que fume es verdad a lo sumo en la medida en que haya algún ente vicioso’. Asimismo, rinfq12 es como rinfq11, sólo que con cuantificadores existenciales en vez de universales. Las reglas rinfq13 y rinfq14 son semejantes, pero para la equivalencia en lugar de para la mera implicación. El esquema Aq035 permite colocar el functor ‘L’ (‘Es más o menos cierto que’, o sea: ‘Es en uno u otro grado verdad que’) indistintamente a la izquierda o a la derecha del cuantificador existencial (como el esquema Aq031 nos permitía hacer en lo tocante al functor ‘H’, o sea ‘Es totalmente verdad que’, y al cuantificador universal). Más tarde, el esquema Aq044 nos permitirá obrar del mismo modo en lo tocante al functor ‘H’ y al cuantificador existencial, en tanto que el esquema Aq045 nos permitirá hacerlo en lo tocante al functor ‘L’ y al cuantificador universal. Una instancia de Aq035 es ésta: ‘El que hasta cierto punto por lo menos sea verdad que algún ser humano ha alcanzado la santidad equivale a que haya algún ente tal que sea en uno u otro grado cierto que ese ente es un ser humano que ha alcanzado la santidad’.

Ahora voy a volver con el problema de la prenexación y la desprenexación: prenexar un cuantificador es sacarlo del interior de una fórmula para colocarlo prefijado a toda la fórmula; desprenexarlo es colocarlo en el interior de la misma, eliminando la ocurrencia del mismo que había delante de toda la fórmula.

Aq036 $\exists x(Hr[(x)]\rightarrow\exists xp\rightarrow.Hr\rightarrow p)$

Prueba:

(2)	$Hr[(x)]\supset.nHr\backslash Hr$	Aj
	$\sigma 2\supset Aq036$	Aq018
(3)	$\neg Hr\supset.Hr\rightarrow p$	Aj
	$\sigma 3\supset.Hr\rightarrow\exists xp\rightarrow.Hr\rightarrow p$	Aj
(4)	$\delta 3\rightarrow\exists\delta 3$	Aq020
(5)	$\neg Hr\supset\delta 4$	Aj, (3), (4)
	Aq036	(2), (5), Aj

El esquema Aq036 prepara el camino para, aplicando el esquema de desprenexación Aq042 que demostraré en seguida, probar uno de los pasos conducentes a Aq044 (el principio de que el que sea totalmente cierto que hay algo con cierta característica equivale a que haya algo de lo cual sea totalmente cierto que ese algo tiene esa característica).

Aq037 $\forall x(p\wedge q)I.\forall xp\wedge\forall xq$

Prueba:

(2)	$\forall x(p\wedge q)\rightarrow\forall xp$	Aj, rinfq11
(3)	$\forall x(p\wedge q)\rightarrow\forall xq$	idem
(4)	$\forall x(p\wedge q)\rightarrow.\forall xp\wedge\forall xq$	(2), (3), Aj
(5)	$\forall xp\rightarrow p$	Aq022
(6)	$\forall xq\rightarrow q$	idem
(7)	$\forall xp\wedge\forall xq\rightarrow.p\wedge q$	(5), (6), Aj
(8)	$\forall xp\wedge\forall xq\rightarrow\forall x(p\wedge q)$	(7),rinfq01,Aq024
	Aq037	(4), (8), Aj

Aq038 $\exists x(p\vee q)I.\exists xp\vee\exists xq$

Prueba:

(2)	$\forall x(Np\wedge Nq)I.\forall xNp\wedge\forall xNq$	Aq037
(3)	$\forall xN(p\vee q)I.\forall xNp\wedge\forall xNq$	(2), Aj, rinfq13
(4)	$\exists x(p\vee q)IN(\forall xNp\wedge\forall xNq)$	Aq030,(3),Aj
	$\sigma 4I.\exists xp\vee\exists xq$	Aq030, Aj

El esquema Aq037 nos muestra que el que todo ente sea a la vez tal que p y tal que q equivale a que todo ente sea tal que p y todo ente sea tal que q. El esquema Aq038 nos muestra que el que haya algún ente que p o q equivale a que o bien haya algún ente que p o bien haya algún ente que q. Una instancia del primero es ésta: 'Todo ente es causado y dotado de fisonomía entitativa propia en la misma medida en que sea verdad que todo ente es causado y que todo ente está dotado de fisonomía entitativa propia'. Una instancia de Aq038 es: 'Hay algún ente avieso o insincero en la medida en que o bien hay algún ente avieso o bien hay algún ente insincero'. Nótese que no valen, en cambio, los esquemas $\ulcorner\forall x(p\vee q)I.\forall xp\vee\forall xq\urcorner$ y $\ulcorner\exists x(p\wedge q)I.\exists xp\wedge\exists xq\urcorner$. Vale únicamente la mitad de cada uno de esos dos esquemas, a saber $\ulcorner\forall xp\vee\forall xq\rightarrow\forall x(p\vee q)\urcorner$ (que es el esquema Aq055 que demostraré más abajo y $\ulcorner\exists x(p\wedge q)\rightarrow.\exists xp\wedge\exists xq\urcorner$ (que es el esquema Aq056 que pronto demostraré también). Pero fallan tanto $\ulcorner\forall x(p\vee q)\rightarrow.\forall xp\vee\forall xq\urcorner$ como $\ulcorner\exists xp\wedge\exists xq\rightarrow\exists x(p\wedge q)\urcorner$. Una instancia del primero de estos dos últimos esquemas (que desde luego no son esquemas teoremáticos) es ésta: ‘El que todo ente sea o más bien inerte o bastante viviente implica que o bien todo ente es más bien inerte o bien todo ente es bastante viviente’; lo cual es, obviamente, de todo punto falso, pues la prótasis es verdadera y la apódosis es totalmente falsa, ya que es del todo falso cada uno de los dos disyuntos de la apódosis. Del otro esquema —que tampoco es teoremático— he aquí esta instancia: ‘El que haya algún ente más bien laborioso y el que haya algún ente bastante holgazán implica que hay algún ente que es a la vez más bien laborioso y bastante holgazán’; lo cual también es del todo falso, pues la prótasis es verdadera (por ser verdadero cada uno de los dos conyuntos de la misma) mientras que la apódosis es totalmente falsa, absurda, por ser **super**contradictoria.

Veamos ahora el esquema Aq039 que sienta los cimientos para los restantes esquemas de desprenexación en lo tocante al functor de implicación, a saber: Aq042 y Aq043.

Aq039 $\exists x(p\rightarrow q)\supset.\forall xp\rightarrow\exists xq$

Prueba:

(2)	$q\rightarrow\exists xq$	Aq020
(3)	$\exists xq\backslash\forall xp\supset.q\backslash\forall xp$	(2), Aj
	$\sigma3\supset.q\backslash p$	Aq022, Aj
(4)	$\sigma3\rightarrow\delta3$	(3), Aj
(5)	$\sigma3\rightarrow\forall x(q\backslash p)$	(4),rinfq01,Aq024
(6)	$\delta5\wedge\exists x(p\rightarrow q)\supset\exists x(p\rightarrow q\wedge.q\backslash p)$	Aq014, Aj
(7)	$\forall x\neg(p\rightarrow q\wedge.q\backslash p)$	Aj, rinfq01
(8)	$\neg\delta6$	Aj, (7), Aq15
(9)	$\exists x(p\rightarrow q)\supset\neg\delta5$	(8), (6), Aj
	$\sigma9\supset\neg\sigma3$	(5), Aj
	$\sigma9\supset.\forall xp\rightarrow\exists xq$	Aj

Aq040 $\forall xp[(x)]\mathrm{I}p[(x)]$

Prueba:

(2)	$\forall xp[(x)]\rightarrow p$	Aq022
(3)	$\forall x(p[(x)]\rightarrow p)$	Aj, rinfq01
(4)	$p[(x)]\rightarrow\forall xp$	(3), Aq024
	Aq040	(2), (4), Aj

Aq041 $p[(x)]\mathrm{I}\exists xp$

Prueba:

(2)	$\mathrm{N}p[(x)]\mathrm{I}\forall x\mathrm{N}p$	Aq040
	Aq041	Aq030, (2), Aj

Los dos últimos resultados recién alcanzados son importantes: nos muestran que el resultado de prefijar a una oración en que no haya ocurrencias libres de cierta variable un cuantificador —sea universal o existencial— con esa variable no altera en nada lo dicho por la oración misma. Así ‘Todo ente, x, es tal que San Benito nació en Nursia’ equivale a ‘San Benito nació en Nursia’, mientras que ‘Algún ente, x, es tal que Schopenhauer es pesimista’ equivale a ‘Schopenhauer es pesimista’. Ese cuantificador, en ese contexto, está de balde: no hace ni mal ni bien (semánticamente; pues pragmáticamente puede hacer daño, por las reglas que rigen la economía comunicacional y que imponen no proferir ninguna palabra inútil, en los más contextos comunicacionales, aunque no en todos).

Aq042 $\exists x(p[(x)]\rightarrow q)\supset.p\rightarrow\exists xq$

Prueba:

(2)	$\exists x(p[(x)]\rightarrow q)\supset.\forall xp\rightarrow\exists xq$	Aq039
	$\sigma2\supset.p\rightarrow\exists xq$	Aj, Aq040

Nótese que Aq042 es como Aq024 sólo que con cuantificadores universales en vez de existenciales: el cuantificador existencial sufre una desprenexación, y sigue siendo existencial porque pasa a estar prefijado a la apódosis. En cambio, Aq043 —que vamos a ver ahora mismo— es como Aq033, pero con un cuantificador existencial donde Aq033 tiene uno universal y viceversa. En Aq043, como en Aq033, la desprenexación comporta un cambio en la naturaleza del cuantificador (esta vez de existencial a universal), porque el cuantificador, al sufrir la desprenexación, pasa a afectar a la prótasis únicamente.

Aq043 $\exists x(p \rightarrow q[(x)]) \supset . \forall xp \rightarrow q$ (Prueba: Aq039, Aq04)

He aquí una instancia de Aq042: 'Si hay algún ente, x, tal que x es por lo menos tan abnegado como Gengis Kan es cruel, entonces es verdadera la crueldad de Gengis Kan a lo sumo en la medida en que hay algún ente abnegado'. Una instancia de Aq043 es ésta: 'Si hay algún ente, x, tal que x es a lo sumo tan autoidéntico como Teodoreto de Ciro es herético, entonces Teodoreto de Ciro es herético por lo menos en la medida en que sea verdad que todo ente es autoidéntico'.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 11º.— RELACIÓN ENTRE LOS CUANTIFICADORES Y OTROS FUNCTORES MONÁDICOS Y DIÁDICOS

Veamos, en primer lugar, resultados ya anunciados sobre la desplazabilidad de los functores 'H' y 'L' con respecto a los cuantificadores existencial y universal respectivamente (compárese con los resultados ya alcanzados anteriormente: Aq031 y Aq035). Inmediatamente después veremos cómo la colocación del functor de supernegación '¬' delante de un cuantificador equivale a la colocación de ese mismo functor detrás del otro cuantificador.

Aq044 H∃xpI∃xHp

Prueba:

(2)	Hp→H∃xp	Aq020, Aj
(3)	∀x2	(2), rinfq01
(4)	∃xHp→H∃xp	Aq033, (3)
(5)	H∃xp→∃xp	Aj
(6)	∃x(5→.H∃xp→p)	Aq036
(7)	5→∃x(H∃xp→p)	(6), Aq042
(8)	δ7	(5), (7)
(9)	∀x(H∃xp→p→.H∃xp→Hp)	Aj, rinfq01
(22)	∃x(H∃xp→Hp)	(8), Aq034, (9)
(23)	H∃xp→∃xHp	(22), Aq042
	Aq044	(4), (23), Aj

Aq045 ∀xLpIL∀xp

Prueba:

(2)	∃xHNpIH∃xNp	Aq044
(3)	N∃xHNpINH∃xNp	(2), Aj
(4)	∀xNHNpINHN∀xp	(3),Aq029,Aq028
	σ4IL∀xp	Aj
	∀xLpIL∀xp	(4), Aj, rinfq13

A046 ¬∃xpI∀x¬p

Prueba:

(2)	NL∃xpIN∃xLp	Aq035, Aj
	σ2I∀xNLp	Aq029
	σ2I∀x¬p	Aj, rinfq13

A047 ¬∀xpI∃x¬p

Prueba:

(2)	HN∀xpIH∃xNp	Aq028, Aj
	σ2I∃xHNp	Aq044
	σ2I∃x¬p	

Ahora veremos un resultado preliminar sobre la relación entre el cuantificador universal y la disyunción, el esquema Aq048; y ya sabemos que no es válido el esquema implicacional inverso, pues sería una instancia del mismo la siguiente: 'El que exista algún ente que pasa bastante hambre o sea verdad que todo ente es diferente de sí mismo implica que todo ente, x, es tal que o bien x pasa bastante hambre o bien x es diferente de sí mismo'; esa implicación es totalmente falsa, pues es verdadera la prótasis (por serlo el primer disyunto de la misma), mientras que es totalmente falsa la apódosis (porque hay algunos entes de los que es del todo falso que pasen bastante hambre y que, por supuesto, de ningún modo son diferentes de sí mismos: **ser diferente** de algo es ser **totalmente distinto** de él, mientras que ser distinto de algo es meramente no ser idéntico a él: en la mera distinción aparece la negación simple, el mero 'no', mientras que la diferencia es negación **total de identidad**). Tras ese resultado preliminar demostraré esquemas teoremáticos que involucran al condicional y que son similares a otros esquemas ya demostrados que involucran a la implicación: Aq049/2 es semejante a Aq025, en tanto que Aq049/3 es semejante a Aq034. Parecen baldías las ilustraciones o justificaciones (extrasistemáticas) de esos esquemas. Luego derivaré las dos reglas rinfq15 y rinfq16.

Aq048 ∀x(p∨q)→.∃xp∨∀xq

Prueba:

(2)	∀xNp∧∃xNq→∃x(Np∧Nq)	Aq014
	σ2→∃xN(p∨q)	Aj, rinfq14
(3)	Nδ2→Nσ2	(2), Aj

(4)	∀x(p∨q)→N(∀xNp∧∃xNq)	(3), Aq029/1
	σ4→.N∀xNp∨N∃xNq	Aj
	σ4→.∃xp∨∀xq	Aq030, Aq029/1

A049 ∀x(p⊃q)→.∀xp⊃∀xq

Prueba:

(2)	∀x(¬p∨q)→.∃x¬p∨∀xq	Aq048
	σ2→.¬∀xp∨∀xq	Aq047, Aj
	Aq049	(2), Aj

Aq049/1 ∀x(p⊃q)→.∃xp⊃∃xq

Prueba:

(2)	∀x(¬p∨q)→∀x(q∨¬p)	Aj, rinfq11
	σ2→.∃xq∨∀x¬p	Aq048
	σ2→.∃xq∨¬∃xp	Aq046, Aj
	Aq049/1	(2), Aj

Aq049/2 ∀x(p⊃q)⊃.∀xp⊃∀xq (Prueba: Aq049, Aj)

Aq049/3 ∀x(p⊃q)⊃.∃xp⊃∃xq (Prueba: Aq049/1, Aj)

rinfq15 p⊃q ├ ∀xp⊃∀xq (Derivación: Aq049/3, rinfq01)

rinfq16 p⊃q ├ ∃xp⊃∃xq (Derivación: Aq049/4, rinfq01)

Hasta ahora sólo hemos visto resultados de desprenexación implicacional: los esquemas Aq024, Aq033, Aq042 y Aq043. Ahora voy a demostrar resultados de prenexación. Pero conviene tener presente que, **para la implicación** (a diferencia de lo que sucede con respecto al mero condicional, como ya veremos después), la prenexación no vale de manera irrestricta más que en dos casos: 2º) si se tiene una implicación cuya prótasis empiece por un cuantificador existencial y cuya apódosis carezca de ocurrencias libres de la variable de ese cuantificador, se puede pasar a una fórmula implicacional con el cuantificador universal de la variable considerada prefijado a toda la fórmula, habiéndose extirpado el cuantificador existencial considerado de la prótasis; 2º) si se tiene una implicación cuya prótasis carezca de ocurrencias libres de cierta variable mientras que la apódosis empieza por el cuantificador universal de esa misma variable, entonces podemos pasar a una oración implicacional con ese mismo cuantificador universal prefijado a toda la fórmula implicacional y eliminado en cambio de su anterior posición en la apódosis. O sea: sólo vale la prenexación cuando el resultado de la misma es colocar delante de la fórmula implicacional total un cuantificador universal. Eso es lo que revelan los esquemas teoremáticos Aq050 (y Aq050/1) para el segundo caso, y Aq051 (y Aq051/1) para el primero. Más abajo (Aq054, Aq067ss) veremos cómo valen **versiones restringidas** de prenexación, también para la implicación, cuando el resultado de la misma es prefijar a la fórmula implicacional total un cuantificador existencial.

Aq050 r[(x)]→∀xs→∀x(r→s)

Prueba:

(2)	r[(x)]→∀xs→.r→s	Aq022, Aj
	σ2→∀x(r→s)	Aq040, (2), rinfq11

Aq050/1 r[(x)]→∀xs⊃∀x(r→s) (Prueba: Aq050, Aj)

Aq051 ∃xp→q[(x)]→∀x(p→q)

Prueba:

(2)	∃xp→q[(x)]→.p→q	Aq020, Aj
	σ2→∀x(p→q)	(2), rinfq11, Aq040

Aq051/1 ∃xp→q[(x)]⊃∀x(p→q) (Prueba: Aq051, Aj)

Una instancia de Aq050/1 es ésta: 'Si Auguste Comte es un gran filósofo a lo sumo en la medida en que toda obra humana es defectuosa, entonces todo ente, x, es tal que x es defectuoso si x es una obra humana por lo menos en la medida en que sea verdad que Auguste Comte es un gran filósofo'. Una instancia de Aq051/1 es ésta: 'Si es verdad que hay enamorados leales a lo sumo en la medida en que Romeo es un enamorado leal, entonces es que todo ente, x, es tal que Romeo es por lo menos tanto como x un enamorado leal'.

Ahora vamos a ver que cualquier fórmula implicacional o equivalencial (así como superimplicacional), con o sin un cuantificador prefijado, es tal que es afirmable con verdad que o bien esa fórmula equivale a 0, o bien equivale a ½ (e.d.: en cada aspecto, o bien es en él tan verdadera como falsa).

Aq052 ∀x(pIq)I½∨.∀x(pIq)I0

Prueba:

(2)	∀x(pIq)⊃∀x(pIqI½)	Aj, rinfq15
	σ2⊃.∀x(pIq)I½	Aq026, Aq040
(3)	¬∀x(pIq)⊃.∀x(pIq)I0	Aj
	Aq062	(2), (3), Aj

Aq053 ∃xp→∀xq→∀x(p→q)

Prueba:

(2)	∃xp→∀xq→.p→∀xq	Aj, Aq020
	σ2→.p→q	Aj, Aq022
	∃xp→∀xq→∀x(p→q)	(2),rinfq11,Aq040

Aq054 ∀xq\m∀xq⊃.∀xp→∀xq→∃x(p→q)

Prueba:

(2)	∀xq\m∀xq⊃.nN∀xq\N∀xq	Aj
	σ2⊃.n∃xNq\∃xNq	Aq028
	σ2⊃∃x(∃xNq→∃xNp→.∃xNq→Np)	Aq018
	σ2⊃∃x(∀xp→∀xq→.∃xNq→Np)	Aj, Aq029/1, rinfq14
	σ2⊃.∀xp→∀xq→∃x(∃xNq→Np)	Aq042
	σ2⊃.σδ2→∃x(p→∀xq)	Aj, Aq029/1, rinf14
	σ2⊃.σδ2→∃x(p→q)	Aq022, rinfq12

El esquema teoremático Aq053 está vinculado a los principios de prenexación del cuantificador universal.

Ahora, tras un par de resultados preliminares ya anunciados sobre la relación entre el cuantificador universal y la disyunción, y el cuantificador existencial y la conyunción, voy a probar las llamadas **leyes de paso**, que permiten efectuar libremente prenexaciones o desprenexaciones en fórmulas disyuntivas o conyuntivas, sin restricciones para ninguno de los cuantificadores, y sin otro requisito que éste: la variable del cuantificador involucrado en esas operaciones ha de carecer de ocurrencias libres en uno de los dos disyuntos o conyuntos. Esas leyes de paso son: Aq057, Aq058, más las que se deducen directamente de Aq037 y Aq038 en virtud de Aq040 y Aq041.

Aq055 ∀xp∨∀xq→∀x(p∨q)

Prueba:

(2)	∀xp→∀x(p∨q)	Aj, rinfq11
(3)	∀xq→∀x(p∨q)	idem
	Aq055	(2), (3), Aj

A056 ∃x(p∧q)→.∃xp∧∃xq

Prueba:

(2)	∃x(p∧q)→∃xp	Aj, rinfq12
(3)	∃x(p∧q)→∃xq	idem
	Aq056	(2), (3), Aj

Aq057 ∀x(p[(x)]∨q)I.p∨∀xq

Prueba:

(2)	p[(x)]∨∀xq→∀x(p∨q)	Aq055,Aq040,Aj
(3)	∀x(p[(x)]∨q)→.∃xp∨∀xq	Aq048
	σ3→p∨∀xq	Aq041
	Aq057	(2), (3), Aj

Aq058 ∃x(p[(x)]∧q)I.p∧∃xq

Prueba:

(2)	p[(x)]∧∃xq→∃x(p∧q)	Aq014, Aq040
(3)	∃x(p[(x)]∧q)→.∃xp∧∃xq	Aq056
	σ3→.p∧∃xq	Aq041
	Aq048	(2), (3), Aj

Aq059 ∃xp∨∀xq→∃x(p∨q)

Prueba:

(2)	∃xp→∃xsp∨q)	Aj, rinfq12
(3)	∀xq→q	Aq022
	σ3→.p∨q	Aj
	σ3→∃x(p∨q)	Aq020
	Aq059	(2), (3), Aj

Aq060 ∃x(pIq)I½∨.∃x(pIq)I0

Prueba:

(2)	∃x(pIq)→∃x½	Aj, rinfq12
	σ2→½	Aq041
(3)	∃x(pIq)⊃∃x(½→.pIq)	Aj, rinfq16
	σ3⊃.½→∃x(pIq)	Aq042
(4)	σ3⊃.2∧δ3	(2), (3), Aj
	σ4⊃.∃x(pIq)I½	Aj
	Aq060	(4), Aj

Aq061 ∀x(p→q)I0∨.∀x(p→q)I½

Aq062 ∀x(p\q)I0∨.∀x(p\q)I½

Aq063 ∃x(p→q)I0∨.∃x(p→q)I½

Aq064 ∃x(p\q)I0∨.∃x(p\q)I½

(Pruebas: Aq052, Aq060, Aj, rinfq13, rinfq14)

rinfq17 p⊃q ⊦ p→q

rinfq17/1 p≡q ⊦ pIq

(Si tanto ⌜p⌝ como ⌜q⌝ son ambos, de una u otra de las siguientes formas: rIs, r→s, r\s, ∀x(rIs), ∃x(rIs), ∀x(r→s), ∃x(r→s), ∀x(r\s), ∃x(r\s), o una conyunción de dos fórmulas así, o una disyunción de dos fórmulas así.)

Derivación de ambas reglas: por Aj, Aq052, Aq060 y siguientes. (Los detalles de la prueba se le dejan al lector como ejercicio.)

(Nótese bien que en una instancia o aplicación de cualquiera de esas dos reglas es posible que ⌜p⌝ sea de una de las formas indicadas mientras que ⌜q⌝ sea de otra forma diferente, con tal, eso sí, de que se trate de una de las diversas formas indicadas. Téngase asimismo en cuenta que, si bien he escrito en los cuantificadores de esos esquemas la variable 'x', ello es como ejemplo nada más, y puede reemplazarse esa variable por cualquier otra.)

A tenor de la regla rinfq17, todos los resultados condicionales que he ido probando en los que tanto la prótasis como la apódosis eran fórmulas equivalenciales, implicacionales o superimplicacionales, con o sin algún cuantificador prefijado, o bien conyunciones o disyunciones de tales fórmulas, pueden ser leídas como si, en vez de ser condicionales, fueran implicacionales, e.d. como si, en lugar de tener como functor central a '⊃' tuvieran a '→'. Recuérdese la demostración del Metateorema de la Equivalencia (en el cap. 13º de la Secc. I, pág^{a} 85) así como la derivación, allí mismo, de la regla rinf56 (pág^{a} 86); igualmente cabe demostrar el Metateorema de la Sobreimplicación, que sólo difiere del de la Equivalencia como la regla de inferencia rinf57 —que figura en el Anejo Nº2, pág^{a} 312— difiere de rinf56.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 12º.— RESULTADOS FINALES Y RECAPITULACIÓN DE LOS ANTERIORES SOBRE PRENEXACIÓN Y DESPRENEXACIÓN

Empezaré por derivar una regla de inferencia que se revelará útil más adelante.

rinfq18 ¬p , q⊃∃xp ⊦ ¬q

Derivación:

hip1^{a}	¬p	hipótesis 1^{a}
hip2^{a}	q⊃∃xp	hipótesis 2^{a}
(2)	∀x¬p	hipótesis 1^{a}, rinfq01
(3)	¬∃xp	(2), Aq046
	¬q	hip2^{a}, (3), Aj

Recapitulemos ahora, en los esquemas siguientes, a la vez la prenexación y la desprenexación en las que está involucrado el functor implicacional '→'. Como lo muestran Aq065 y Aq066, la prenexación y desprenexación no tienen límites en lo tocante al cuantificador universal —e.d. al caso en que sea este cuantificador el que afecte a la fórmula implicacional total. En cambio, para el cuantificador existencial (en esa posición) la prenexación tiene restricciones, indicadas por las prótasis de Aq067, Aq067/1, Aq067/2 y Aq068. Que son menester esas restricciones se echa de ver considerando esta instancia del resultado de amputar la prótasis (más el functor central) de Aq067/1 (el resultado de tal amputación sería el esquema, **no** teoremático en nuestro sistema, ⌜$\exists x(\exists xp \rightarrow p)$⌝): ‘Hay un ente, x, tal que el ser x una zona espacial grande es por lo menos tan real como el hecho de que hay alguna zona espacial grande’. Que eso es de todo punto falso podemos conjeturarlo en virtud de las consideraciones siguientes: para cada zona espacial grande, hay otra más grande todavía, sin que parezca —salvo si se supone que el espacio es finito— haber límite interno en esa progresión; eso quiere decir que está fuera de la progresión —por encima, pues, de cada miembro de la misma— su tope o cota superior mínima —tope de la serie ascendente de grados de verdad correspondientes a las diversas oraciones ‘x^1 es una zona espacial grande’; ‘x^2 es una zona espacial grande’, etc.; donde cada una de esas constantes (‘x^1’, …, etc.) está denotando a una zona espacial más grande que las precedentes y menos grande que las siguientes. Luego el hecho de que alguna (una-u-otra) zona espacial es grande tiene que ser más verdadero que el hecho de que un ente dado cualquiera, x, sea el que fuere, es una zona espacial grande. En efecto: como ha de valer la implicación de ‘Hay alguna zona espacial grande’ por ‘x es una zona espacial grande’ (ha de valer tal implicación en virtud del principio implicacional de generalización existencial, Aq020), la cuantificación existencial ‘Hay alguna zona espacial grande’ ha de ser por lo menos tan verdadera como cualquier oración de la forma ‘x es una zona espacial grande’, donde ‘x’ hace las veces de una constante o variable cualquiera; pero ha de ser no sólo por lo menos tan verdadera como cada una de tales oraciones sino más verdadera que todas ellas; si fuera tan verdadera como una de ellas, sería menos verdadera que otra oración así, pues, para cada oración de la forma ‘x es una zona espacial grande’, hay otra de esa misma forma (pero con otra constante colocada en el lugar de ‘x’) que es más verdadera. (Por lo menos así es en un lenguaje con suficiente cantidad de nombres propios u otros términos para hablar de una infinidad de zonas espaciales cada una de las cuales sea más grande que las anteriores, o sea: colocadas en escala ascendente de magnitud.) De igual manera cabe argumentar para mostrar que no hay, en absoluto, ningún ente, x, tal que el ser x un número natural grande sea igual de verdadero que el hecho de que hay algún número natural grande: el número 3 es más grande que el 2, el 4 lo es más que el 3, …, el $(99^{99})!+1$ lo es más que el $(99^{99})!$, y así sucesivamente. Pero la progresión no tiene tope o cota **interna**; de ningún ente será infinitamente verdad que él es un número natural grande; pero dado un ente x cualquiera, habrá otro ente, z, tal que es más verdad que z es un número natural grande que no que x es un número natural grande; y la progresión tiende hacia el infinito (hacia un grado infinito de verdad, pues) sin alcanzarlo. Aplicando, pues, el mismo razonamiento anteriormente expuesto con relación a zonas espaciales, resulta que de ningún ente, x, es verdad que x es un número natural grande en la misma medida en que es verdad que uno-u-otro ente es un número natural grande.

Similarmente, y por razones afines y emparentadas, fallaría el esquema Aq068 de no ser por la prótasis condicionalizante, que lo restringe. Una instancia del principio irrestricto resultante de amputar esa prótasis de Aq068 (del esquema ⌜$\forall xp \rightarrow q[(x)]\mathrm{I}\exists x(p \rightarrow q)$⌝) es ésta: ‘El que sea por lo menos tan real que Tertuliano es diteísta como que todo ente, x, es tal que, si x es un número natural, x es pequeño, eso equivale a que haya algún ente, x, tal que el ser verdad que, si x es un número natural, x es pequeño es algo a lo sumo tan verdadero como el hecho de que Tertuliano es diteísta’. Supongamos que es infinitesimalmente verdadero (un sí es no verdadero) que Tertuliano es diteísta; pues bien, la afirmación de que todo número natural es pequeño (de que cada ente, x, es tal que, si x es un número natural, x es pequeño) será a lo sumo tan verdadera como cualquier oración particular de la forma ‘x es un ente tal que, si x es un número natural, x es pequeño’. Pero para cada oración así habrá otra menos verdadera, pues, para cualquier número natural n, n+1 es menos pequeño que n; y la progresión tiende al infinito, pero sin alcanzarlo (tiende, pues, hacia el infinito —y, por ende, hacia un grado infinito de falsedad— asintóticamente); sin duda, por consiguiente, la oración ‘Todo número natural es pequeño’ será infinitesimalmente verdadera nada más; no puede esa oración ser igual de verdadera (igual de falsa también, por lo tanto) que una de las oraciones ‘x es un ente tal que, si x es un número natural, x es pequeño’, pues, para cada oración así, hay otra oración así menos verdadera que ella; y, entonces, resulta que, si ‘Todo número natural es pequeño’ fuera igual de verdadera que una de esas oraciones, se perdería el **principio implicacional de instanciación universal** (a saber: Aq022). De ahí que la cuantificación universal considerada haya de ser menos verdadera que cada instancia particular de la misma (que cada resultado de amputarle el cuantificador prefijado y de sustituir ‘x’ por algún término designador de un ente); esa cuantificación será infinitesimalmente verdadera nada más, pero cualquier instancia particular de la misma es un tanto verdadera, e.d. más infinitesimalmente verdadera (menos que infinitamente falsa). Luego no hay **en absoluto** ningún ente, x, tal que el ser diteísta Tertuliano sea verdad por lo menos en la medida en que, si x es un número natural, x es pequeño.

Mas ninguno de tales inconvenientes se presenta con las versiones restringidas de esos principios que son teoremas de *Aq*; porque en los casos considerados, no se cumplen sendas prótasis; lo infinitesimalmente verdadero no es menos real o verdadero que su venir a ser verdadero (por eso falla la prótasis de la instancia considerada de Aq068); y lo infinitesimalmente falso no es más real o verdadero que su ser superverdadero (por eso falla la prótasis de la instancia considerada de Aq067/1; porque tanto lo infinitesimalmente verdadero (a) como su negación, lo infinitesimalmente falso (å), son, uno u otro, tan reales o verdaderos como sendos **venir a ser verdad** (ma, må, respectivamente) y como sendos **ser superverdad** (na, nå, respectivamente).

Aq065 $\forall x(r[(x)]\rightarrow s)I.r\rightarrow\forall xs$ (Prueba: Aq024 + rinfq17, Aq050, Aj)

Aq066 $\exists xp\rightarrow q[(x)]I\forall x(p\rightarrow q)$ (Prueba: Aq051, Aq033 + rinfq17, Aj)

Aq067 $nq\backslash q[(x)]\rightarrow.q\rightarrow\exists xpI\exists x(q\rightarrow p)$

Prueba:

(2)	$nq\backslash q[(x)]\rightarrow\exists x(q\rightarrow\exists xp\rightarrow.q\rightarrow p)$	Aq018, rinfq17
	$\sigma 2\rightarrow\exists xp\rightarrow\exists x(q\rightarrow p)$	Aq042, Aj, rinfq17
(3)	$\delta\delta 2\rightarrow\sigma\delta 2$	Aq042, rinfq17
(4)	$\sigma 2\rightarrow 3$	(3), Aj
	Aq067	(2), (4), Aj

Aq067/1 $n\exists xp\backslash\exists xp\rightarrow\exists x(\exists xp\rightarrow p)$ (Prueba: Aq067, Aj)

Aq067/2 $n\exists xp\backslash\exists xp\rightarrow\exists x(pI\exists xp)$ (Prueba: Aq067/1, Aq020, Aj, rinfq01, Aq014, rinfq17)

Aq068 $q\backslash mq[(x)]\rightarrow.\forall xp\rightarrow qI\exists x(p\rightarrow q)$

Prueba:

(2)	$\exists x(p\rightarrow q[(x)]\rightarrow.\forall xp\rightarrow q$	Aq043, rinfq17
(3)	σAq068$\rightarrow 2$	(2), Aj
(4)	σAq068$\rightarrow.nNq\backslash Nq[(x)]$	Aj
	$\sigma 4\rightarrow\exists x(Nq\rightarrow\exists xNp\rightarrow.Nq\rightarrow Np)$	Aq018, rinfq17
	$\sigma 4\rightarrow.Nq\rightarrow\exists xNp\rightarrow\exists x(Nq\rightarrow Np)$	Aq042, rinfq17
	$\sigma 4\rightarrow.\forall xp\rightarrow q\rightarrow\exists x(Nq\rightarrow Np)$	Aj, Aq029/1
	$\sigma 4\rightarrow.\forall xp\rightarrow q\rightarrow\exists x(p\rightarrow q)$	Aj, rinfq12
	Aq068	(3), (4), Aj

Aq068/1 ∀xp\m∀xp→∃x(p→∀xp) (Prueba: Aq068, Aj)

Aq068/2 ∀xp\m∀xp→∃x(pI∀xp) (Prueba: Aq068/1, Aq022, Aj, rinfq01, rinfq17, Aq014)

Ahora voy a estudiar los principios de prenexación y desprenexación en lo tocante, no a la implicación —eso ya lo hemos visto exhaustivamente—, sino al mero condicional, ‘⊃’. Pues bien, para éste valen, sin excepción ni cortapisa, **todos** los principios de prenexación y desprenexación. La diferencia entre el comportamiento del condicional y el de la implicación en lo tocante a la prenexación se explica porque lo que bloquea la validez de (versiones irrestrictas de) principios de prenexación para la implicación en los cuales resultara prefijado a la fórmula total un cuantificador existencial es que la verdad de una implicación depende de que la apódosis sea por lo menos tan verdadera como la prótasis; y, cuando hay escalas ascendentes o descendentes infinitas, puede suceder que sea verdadera cada implicación perteneciente a una serie mas no lo sea una generalización existencial de la serie. Esas complicaciones no aparecen en el caso del mero condicional, pues para la verdad de una fórmula condicional es condición necesaria y suficiente que o bien sea del todo falsa la prótasis o bien sea verdadera —en uno u otro grado, mayor o menor, siquiera infinitesimal— la apódosis.

Como la lógica clásica desconoce la diferencia entre el mero condicional y la implicación (y los clasicistas suelen usar, como lectura de su símbolo condicional, indistintamente una lectura condicional y una lectura implicacional), ella entroniza todos los principios de prenexación y desprenexación, sin restricción, y con ello deja en la sombra las importantes diferencias que nosotros hemos descubierto gracias a que nuestro sistema lógico es sensible a los grados de verdad, desconocidos por los clasicistas.

Por otro lado, hay algunos sistemas no clásicos en los que no se da ningún functor condicional tan fuerte como el clásico, ningún functor como ‘⊃’; entre ellos están, además de la lógica intuicionista, las diversas lógicas relevantes, p.ej.; esas lógicas carecen de ciertos principios de prenexación (como Aq071 y Aq072) para cualquier functor condicional del sistema en cuestión. Ello es muy pernicioso, pues quebranta el poder deductivo del sistema. Como en nuestro sistema es ‘⊃’ el vehiculador del entrañamiento y, por ende, de la inferencia, el poder deductivo, inferencial, de nuestro sistema no es menor que el de la lógica clásica. Nuestro apartamiento de la lógica clásica es por expansión, no por contracción, no por embotamiento o debilitamiento del poderío inferencial de dicha lógica —que es lo que hacen otros sistemas no clásicos.

Aq069 ∀x(p[(x)]⊃q)I.p⊃∀xq

Prueba:

(2)	∀x(p[(x)]⊃q)I∀x(¬p∨q)	Aj, rinfq13
	σ2I.¬p∨∀xq	Aq057
	σ2I.p⊃∀xq	Aj

Aq070 ∀x(p⊃q[(x)]I.∃xp⊃q

Prueba:

(2)	∀x(p⊃q[(x)]I∀x(¬p∨q)	Aj, rinfq13
	σ2I∀x(q∨¬p)	Aj, rinfq13
	σ2I.q∨∀x¬p	Aq057
	σ2I.q∨¬∃xp	Aq046

Aq071 ∃x(p[(x)]⊃q)I.p⊃∃xq

Prueba:

(2)	∃x(p[(x)]⊃q)I∃x(¬p∨q)	Aj, rinfq14
	σ2I.¬p∨∃xq	Aq038, Aq041
	σ2I.p⊃∃xq	Aj

Aq072 ∃x(p⊃q[(x)])I.∀xp⊃q

Prueba:

(2)	∃x(p⊃q[(x)])I∃x(¬p∨q)	Aj, rinfq14
	σ2I.∃x¬p∨q	Aq038, Aq041
	σ2I.¬∀xp∨q	Aq047
	σ2I.∀xp⊃q	Aj

Aq073 ∃x(p⊃q)I.∀xp⊃∃xq

Prueba:

(2)	∃x(p⊃q)I∃x(¬p∨q)	Aj, rinfq14
	σ2I.∃x¬p∨∃xq	Aq038
	σ2I.¬∀xp∨∃xq	Aq047

Aq074 ∃xp⊃∀xq→∀x(p⊃q)

Prueba:

(2)	∃xp⊃∀xq→∀x(p⊃∀xq)	Aq070, Aj
	σ2→∀x(¬p∨∀xq)	Aj, rinfq13
	σ2→∀x(¬p∨q)	Aq022,Aj,rinfq11

Aq075 ∀xp⊃.∀xqI∀x(p⊃q)

Prueba:

(2)	∀xp⊃∀x(qI.p⊃q)	Aj, rinfq15
	σ2⊃.∀xqI∀x(p⊃q)	Aq026

Aq076 ∀xp⊃.∃x(p⊃q)I∃xq (Prueba: Aq073, Aj)

Aq077 ∃xp⊃.∀x(p⊃q)→∃xq

Prueba:

(2)	∃xp⊃∃x(p⊃q→q)	Aj, rinfq16
	σ2⊃.∀x(p⊃q)→∃xq	Aq039

Aq078 ∀xp⊃∀xq→∃x(p⊃q)

Prueba:

(2)	¬∀xp∨∀xq→.∃x¬p∨∀xq	Aj, Aq047
	σ2→∃x(¬p∨q)	Aq059

Cerraré este capítulo demostrando esquemas teoremáticos en los que está involucrada la conyunción débil ‘&’ (leyéndose ⌜p&q⌝ así: «Siendo verdad que p, es verdad que q»), y que son paralelos a los ya demostrados para la conyunción ordinaria o simple, ‘∧’. El interés que presentan estos esquemas se debe al nexo que hay entre el condicional ‘⊃’ y la conyunción débil ‘&’, por la equivalencia entre ⌜p⊃q⌝ y ⌜N(p&Nq)⌝.

Aq079 ∀x(p&q)I.∀xp&∀xq

Prueba:

(2)	∀x(p&q)I∀x(Lp∧q)	Aj, rinfq13
	σ2I.∀xLp∧∀xq	Aq037
	σ2I.L∀xp∧∀xq	Aq045
	σ2I.∀xp&∀xq	Aj

Aq080 ∀xp&∃xq→∃x(p&q)

Prueba:

(2)	∀xp&∃xq→.L∀xp∧∃xq	Aj
	σ2→.∀xLp∧∃xq	Aq045
	σ2→∃x(Lp∧q)	Aq014
	σ2→∃x(p&q)	Aj, rinfq14

Aq081 ∃xp&∀xq→∃x(p&q) (Prueba: Aj, Aq035, Aq014, rinfq14)

Aq082 ∃x(p&q)→.∃xp&∃xq

Prueba:

(2)	∃x(p&q)→∃x(Lp∧q)	Aj, rinfq14
	σ2→.∃xLp∧∃xq	Aq056

σ2→.I∃xp∧∃xq Aq035

σ2→.∃xp&∃xq Aj

Aq083 ∃x(p[(x)]&q)I.p&∃xq (Prueba: Aq058, Aj, rinfq14)

Aq084 ∃x(p&q[(x)])I.∃xp&q (Prueba: Aq058, Aq035, Aj, rinfq14)

Aq085 N∃x(p&Nq)I∀x(p⊃q)

Prueba:

(2) N∃x(p&Nq)I∀xN(p&Nq) Aq029

σ2I∀x(p⊃q) Aj, rinfq13

Aq086 ∀x(p∧q)→∀x(p&q) (Prueba: Aj, rinfq11)

Aq087 ∃x(p∧q)→∃x(p&q) (Prueba: Aj, rinfq12)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 13º.— LA SOBREIMPLICACIÓN Y LOS CUANTIFICADORES

La sobreimplicación, el functor '\', expresa una comparación de inferioridad —de izquierda a derecha— o de superioridad —de derecha a izquierda. Es un functor nuevo, que aparece en nuestro sistema de lógica pero que es desconocido por los más sistemas lógicos, clásicos o no. La combinación de ese functor con los cuantificadores da lugar a resultados interesantes, y a principios sobreimplicacionales de prenexación y desprenexación; mientras que, para la sobreimplicación, son válidos, sin excepción ni cortapisa alguna, todos los principios de prenexación (Aq098, Aq099, Aq103, Aq104), en cambio los únicos principios sobreimplicacionales de **des**prenexación válidos, aquellos que son teoremáticos en *Aq*, son los dualmente opuestos a los principios implicacionales de prenexación que son válidos. Como lo vamos a ver (Aq103, Aq104) vale la desprenexación sobreimplicacional sin restricciones siempre que el origen o punto de partida sea una fórmula sobreimplicacional con un cuantificador existencial prefijado a toda la fórmula; pero, en cambio, para el cuantificador universal (prefijado a la fórmula sobreimplicacional total) no vale la desprenexación más que con restricciones semejantes a las que rigen la prenexación implicacional para el cuantificador existencial; compárense los principios de prenexación Aq098 y Aq099, válidos sin restricciones, con los principios de [prenexación-y-]desprenexación **restringidos** Aq102 y Aq100, respectivamente.

Aq091 ∃x(p\q)→.∀xp\∃xq

Prueba:

(2) ¬∀x(q→p)⊃¬(∃xq→∀xp) Aq053, Aj

(3) ∃x¬(q→p)⊃δ2 (2), Aq047

(4) ∃x(p\q)⊃σ3 Aj, rinfq16

	$\sigma4\supset\delta2$	(2)
	$\sigma4\supset.\forall xp\backslash\exists xq$	Aj

Aq092 $\exists x(p\backslash q)\rightarrow.p[(x)]\backslash\exists xq$ (Prueba: Aq091, Aq040)

Aq093 $\exists x(p\backslash q)\rightarrow.\forall xp\backslash q[(x)]$ (Prueba: Aq091, Aq041)

Aq094 $\exists xp\backslash\forall xq\rightarrow\forall x(p\backslash q)$

Prueba:

(2)	$\exists xp\backslash\forall xq\supset\neg\exists x(q\rightarrow p)$	Aq039, Aj
	$\sigma2\supset\forall x\neg(q\rightarrow p)$	Aq046, Aj
	$\sigma2\supset\forall x(p\backslash q)$	Aj, rinfq15
	Aq094	(2), rinfq17

Aq095 $\forall x(p\backslash q)\rightarrow.\forall xp\backslash\exists xq$

(Prueba: Aq091, Aq023)

Aq096 $\forall xp\backslash m\forall xp\rightarrow.\forall x(p\backslash q)\rightarrow.\forall xp\backslash\forall xq$

Prueba:

(2)	$\forall xp\backslash m\forall xp\supset.\neg\exists x(q\rightarrow p)\supset\neg(\forall xq\rightarrow\forall xp)$	Aq054, Aj
	$\sigma2\supset.\neg\exists x(q\rightarrow p)\supset.\forall xp\backslash\forall xq$	Aj
(3)	$\sigma2\supset.\forall x\neg(q\rightarrow p)\supset.\forall xp\backslash\forall xq$	(2), Aq046
	$\sigma2\supset.\forall x(p\backslash q)\supset.\forall xp\backslash\forall xq$	Aj, rinfq15
	$\sigma2\supset\exists x(p\backslash q\supset.\forall xp\backslash\forall xq)$	Aq072
	$\sigma2\supset\exists x(p\backslash q\rightarrow.\forall xp\backslash\forall xq)$	Aj, rinfq17
	$\sigma2\supset.\forall x(p\backslash q)\rightarrow.\forall xp\backslash\forall xq$	Aq043
	$\sigma2\rightarrow\delta3$	(3), Aj

Aq097 $\exists xp\backslash\forall xq\rightarrow.\forall xp\backslash\exists xq$ (Prueba: Aj, Aq020, Aq022)

Aq098 $\exists xp\backslash q[(x)]\rightarrow\forall x(p\backslash q)$ (Prueba: Aq040, Aq094)

Aq099 $p\backslash\forall xq\rightarrow\forall x(p[(x)]\backslash q)$ (Prueba: Aq094, Aq041)

Una instancia de Aq091 es ésta: ‘El que haya algún ente menos desprendido que dadivoso implica que es menos cierto que todo ente es desprendido que no que hay entes dadivosos’. Una instancia de Aq092 es ésta: ‘El que haya algún ente más bello que la Catedral de Astorga implica que la belleza de la Catedral de Astorga es menos real que el hecho de que hay algún ente bello’. Una instancia de Aq093 es ésta: ‘El que haya algún ente menos grande que la cabeza de un alfiler implica que el que todo ente sea grande es algo menos real que el ser grande la cabeza de un alfiler’. Una instancia de Aq099 es ésta: ‘El que la venalidad de Eutropio sea menos verdadera que el hecho de que todos los validos son venales implica que todo ente, x, es tal que la venalidad de Eutropio es menos real que el hecho de que x es venal si es un valido’.

Aq100 p[(x)]\mp→.p\∀xqI∀x(p\q) (Prueba: Aq099, Aq096, Aj, Aq040)

Aq101 n∃xp\∃xp→.∀x(q\p)→.∃xq\∃xp

Prueba:

(2)	∀xNp\m∀xNp→.∀x(Np\Nq)→.∀xNp\∀xNq	Aq096, Aq030
(3)	n∃xp\∃xp→δ2	Aq030, (2), Aj
	σ3→.∀x(q\p)→.∃xq\∃xp	Aj, rinfq13

Aq102 np[(x)]\p→.∀x(q\p)I.∃xq\p

Prueba:

(2)	np[(x)]\p→.∃xq\p→∀x(q\p)	Aq094, Aj, Aq040
(3)	σ2→.∀x(q\p)→.∃xq→p	Aq101, Aq041
	Aq102	(2), (3), Aj

Aq103 p[(x)]\∃xqI∃x(p\q)

Prueba:

(2)	∀xNq\Np[(x)]⊃∃x(Nq\Np)	Aq013
(3)	p[(x)]\∃xq⊃∃x(p\q)	(2), Aq030, Aj, rinfq16
(4)	σ3→δ3	(3), rinfq17
(5)	δ3→σ3	Aq092
	Aq103	(4), (5), Aj

Aq104 ∀xp\q[(x)]I∃x(p\q)

Prueba:

(2)	∀xp\q[(x)]⊃∃x(p\q)	Aq013
(3)	σ2→δ2	(2), rinfq17
(4)	δ2→σ2	Aq093
	Aq104	(3), (4), Aj

Aq105 ∃xp\∃xq→∃x(p\q)

Prueba:

(2)	∃xp\∃xq→∃x(∃xp\q)	Aq103
	σ2→∃x(p\q)	Aq020,Aj,rinfq12

Aq106 ∀xp\∀xq→∃x(p\q)

Prueba:

(2)	∀xp\∀xq⊃¬∀x(q→p)	Aq025, Aj
	σ2⊃∃x¬(q→p)	Aq047
	σ2⊃∃x(p\q)	Aj, rinfq16
	σ2→δ2	(2), rinfq17

Una instancia de Aq105 es ésta: ‘El que sea menos cierto que hay hombres magníficos que no que hay hombres buenos implica que hay algún ente, x, tal que el ser x un hombre magnífico es menos cierto que el ser x un hombre bueno’. Una instancia de Aq106 es: ‘El que sea más cierto que todos los seres humanos tienen defectos que el que todos los seres humanos tienen virtudes implica que hay algún ente, x, tal que el tener x defectos si x es un ser humano es algo más real que el tener x virtudes si x es un ser humano’.

Aq107 $\exists xp\&\forall x(p\supset.q\backslash r)\rightarrow\exists x(p\&q\backslash.p\&r)$

Prueba:

(2)	$p\&(p\supset.q\backslash r)\rightarrow.p\&q\backslash.p\&r$	Aj
(3)	$\exists x\sigma 2\rightarrow\exists x\delta 2$	(2), rinfq12
(4)	$\exists xp\&\forall x(p\supset.q\backslash r)\rightarrow\exists x\sigma 2$	Aq081
	$\sigma 4\rightarrow\exists x\delta 2$	(3)

Aq108 $\exists xp\&\forall x(p\supset.q\backslash r)\rightarrow.\forall x(p\supset q)\backslash\exists x(p\&r)$

Prueba:

(2)	$p\&(p\supset.q\backslash r)\rightarrow.p\supset q\backslash.p\&r$	Aj
(3)	$\exists x\sigma 2\rightarrow\exists x\delta 2$	(2), rinfq12
(4)	$\exists xp\&\forall x(p\supset.q\backslash r)\rightarrow\exists x\sigma 2$	Aq081
	$\sigma 4\rightarrow\exists x\delta 2$	(3)
	$\sigma 4\rightarrow.\forall x(p\supset q)\backslash\exists x(p\&r)$	Aq091

Una instancia de Aq107 es ésta: ‘El que, sucediendo que haya medicamentos, sea verdad que todo medicamento es más perjudicial que benéfico implica que hay algún ente, x, tal que el ser x un remedio perjudicial es más real que el ser x un remedio benéfico’.

Una instancia de Aq108 es ésta: ‘El que, habiendo estudios arduos, todo estudio arduo sea más duro de iniciar que de continuar implica que el que todo estudio arduo sea duro de continuar es algo menos verdadero que el que haya estudios arduos duros de iniciar’.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 14º.— SUPERCONYUNCIÓN Y CUANTIFICADORES

La superconyunción ‘•’ (‘no sólo… sino [que] también’) presenta, al combinarse con los cuantificadores, muchos de los rasgos de la mera conyunción ‘$\wedge$’, del mero ‘y’ conyuntivo. Eso sí, como es más fuerte —y, por ende, en ocasiones menos verdadero— lo dicho por «no sólo p sino que además q» que lo dicho por «p y q», tiénese una implicación válida de $\ulcorner\forall x(p\wedge q)\urcorner$ por $\ulcorner\forall x(p\bullet q)\urcorner$ (lo cual se deduce del esquema teoremático Aq117 junto con el Aq037) y asimismo una implicación válida de lo dicho por $\ulcorner\exists x(p\wedge q)\urcorner$ por lo dicho por $\ulcorner\exists x(p\bullet q)\urcorner$ (esquema Aq118).

Aq111 $\forall x(\forall xp\bullet q)\mathrm{I}.\forall xp\bullet\forall xq$

Prueba:

(2)	$\forall x(\forall xp\bullet q)\mathrm{I}\exists x(\forall xq\bullet\forall xq)$	Aq011,Aq041
	$\sigma 2\mathrm{I}.\forall xq\bullet\forall xp$	Aq041
	$\sigma 2\mathrm{I}.\forall xp\bullet\forall xq$	Aj

Aq112 $\forall xp\bullet\forall xq\mathrm{I}\forall(p\bullet q)$

Prueba:

(2)	$\forall xp\bullet\forall xq\rightarrow.p\bullet q$	Aq022, Aj
(3)	$\forall x2$	(2), rinfq01
(4)	$\sigma 2\rightarrow\forall x(p\bullet q)$	(3), Aq065
(5)	$\forall x(p\bullet q)\rightarrow\forall x(\forall xp\bullet q)$	Aq02,rinfq01,Aq065

	σ5→.∀xp•∀xq	Aq111
	Aq112	(4), (5), Aj

Aq113 ∀xp•∃xq→∃x(p•q)

Prueba:

(2)	∃xq•∀xp→∃x(∀xp•q)	Aq011,Aq040,Aj
	σ2→∃x(p•q)	Aq022,Aj,rinfq12
	Aq113	(2), Aj

Aq114 ∀x(p[(x)]•q)I.p•∀xq

Prueba:

(2)	∀x(p[(x)]•q)I.∀xp•∀xq	Aq112
	σ2I.p•∀xq	Aq040

Aq115 ∃x(p•q)→.∃xp•∃xq

Prueba:

(2)	p•q→.∃xp•∃xq	Aq020, Aj
	Aq115	(2),rinfq01,Aq066

Aq116 ∃x(p•q[(x)]I.∃xp•q

Prueba:

(2)	∃x(p•q[(x)]→.∃xp•q	Aq115, Aq041
(3)	δ2→∃x(q•p)	Aq011, Aq040
	σ3→∃x(p•q)	Aj, rinfq12
	Aq116	(2), (3), Aj

Aq117 ∀x(p•q)→.∀xp∧∀xq (Prueba: Aj, rinfq11, Aq037)

Aq118 ∃x(p•q)→∃x(p∧q) (Prueba: Aj, rinfq12)

Uno de los servicios que presta el functor sobreconyuntivo '•' es su papel en las definiciones de los functores monádicos 'muy' ('X') y '[al menos] un poco' ('K'). Estos functores monádicos, al relacionarse con los cuantificadores, dan lugar a resultados interesantes. Vamos a ver que tanto el uno como el otro pueden colocarse indistintamente a la derecha o a la izquierda de cualquiera de los dos cuantificadores, sin que el pasar de la derecha a la izquierda o viceversa socave en lo más mínimo la verdad.

Aq119 ∀xXpIX∀xp (Prueba: Aq112)

Aq120 X∃xpI∃xXp

Prueba:

(2)	∀xXNXpIXN∃xXp	Aq119, Aq029
(3)	K∀xXNXpIKXN∃xXp	(2)
	σ3IN∃xXp	Aj
(4)	∃xXpINK∀xXNXp	(3), Aj
	σ4IXN∀xNKXp	Aj, rinfq13
	σ4IX∃xKXp	Aq030, Aj
	σ4IX∃xp	Aj, rinfq14

Aq122 K∃xpI∃xKp

Prueba:

(2)	K∃xpINXN∃xp	
	σ2INX∀xNp	Aq029
	σ2IKN∀xNp	Aj
	σ2IK∃xp	Aq030

Aq123 N∃xKpIX∀xNp (Prueba: Aq029, Aj, rinfq13, Aq119)

Aq124 N∃xXpIK∀xNp (Prueba: Aq029, Aj, rinfq13, Aq121)

Aq125 N∀xKpIX∃xNp (Prueba: Aq028, Aj, rinfq14, Aq120)

Aq126 N∀xXpIK∃xNp (Prueba: Aq028, Aj, rinfq14, Aq122)

Aq127 X∀x(p∧q)I.∀xXp∧∀xXq

Prueba:

(2)	X∀x(p∧q)∀xX(p∧q)	Aq119
	σ2I∀x(Xp∧Xq)	Aj, rinfq13
	σ2I.∀xXp∧∀xXq	Aq037

Aq128 X∃x(p∨q)I.∃xXp∨∃xXq (Prueba: Aq120, Aj, rinf14, Aq038)

Otros teoremas y esquemas teoremáticos en los cuales se hallen involucrados los functores ‘X’ y ‘K’ se exponen en la lista que figura como Anejo al final de este libro. Su demostración, a partir de los resultados ya conseguidos, se deja al lector como ejercicio.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 15º.— LOS FUNCTORES ‘f’, ‘Y’, ‘R’, ‘g’, ‘m’, ‘n’ y ‘b’ EN SU RELACIÓN CON LOS CUANTIFICADORES

A la altura que estamos ya de esta Sección, el lector está familiarizado tanto con la técnica demostrativa como con el sentido de las notaciones empleadas; de suerte que ya nos podemos permitir el lujo de echar por la borda las muletas de ejemplos o instancias, con lecturas en lengua natural que allanan el arduo camino y amenizan con corolario la marcha hacia adelante. Por ello, el presente capítulo no constará más que de austeras demostraciones con muy escuetas aclaraciones.

Aq251 f∃xpI∃xfp

Prueba:

(2)	pI.fp∨Yp	Aj
(3)	∃xpI∃x(fp∨Yp)	(2), rinfq14
	σ3I.∃xfp∨∃xYp	Aq038
(4)	∃xfp\∃xp⊃.∃xfp\.∃xfp∨∃xYp	(3), Aj
	σ4⊃.∃xfp\∃xYp	Aj
(5)	Yp→a	Aj
(6)	∃xYp→a	(5), rinfq01, Aq033
(7)	fp→∃xfp	Aq020
	σ7→f∃xfp	Aj
(8)	∃xfp→f∃xfp	(7), rinfq01, Aq033
(9)	∃xfpIf∃xfp	(8), Aj
(22)	∃xfp→a⊃¬∃xfp	(9), Aj
(23)	∃xfp⊃.a\∃xfp	(22), Aj
	σ23⊃.∃xYp\∃xfp	(6), Aj
	σ23⊃¬δ4	Aj
	σ23⊃.∃xp→∃xfp	(4), Aj
(24)	∀x(p→a)⊃.∃xp→a	Aq033
	σ24⊃¬f∃xp	Aj
(25)	f∃xp⊃∃x(a\p)	(24), Aj, Aq047, rinfq16
	σ25⊃∃xfp	Aj, rinfq16
	σ25⊃.∃xp→∃xfp	(23)
	σ25⊃.f∃xp→∃xfp	Aj
(26)	f∃xp→∃xfp	(25), Aj
(27)	∃xfp→∃xp	Aj, rinfq12
(28)	∃xfp→f∃xp	(27), (9), Aj
	Aq251	(28), (26), Aj

Nótese que el paso 7 de la prueba precedente no presupone que la apódosis implicacional del primer renglón de ese paso implique lo que aparece en el segundo renglón; trátase de que de ⌜fp→∃xfp⌝ se infiere, a tenor de teoremas y reglas de inferencia de Aj, ⌜fp→f∃xp⌝. Así, el uso que estoy ahora haciendo (y que ya he hecho en capítulos anteriores de esta misma Sección II, aun sin expresar advertencias al respecto) de las cadenas implicacionales, equivalenciales y meramente condicionales en el interior de un mismo paso deductivo de determinada prueba conlleva una abreviación más rápida que el uso que había hecho de tales cadenas en la Sección I de este libro. Ahora pasamos, **en un mismo paso**, de un renglón al siguiente reemplazando un miembro derecho por otro de una fórmula implicacional (o sea. con functor central '→'), condicional (o sea: con functor central ‘⊃’), o equivalencial (o sea: con functor central ‘I’) siempre que pueda pasarse de un paso que concluyera en el primero de ambos renglones a otro paso en el que, manteniéndose el mismo miembro izquierdo, se tuviera como miembro derecho al del segundo de los dos renglones considerados; el tránsito de un paso a otro estaría justificado, ya en virtud de *Aj*, ya de *Aq*, particularmente —en este último caso— por aplicación consecutiva de rinfq01 —lo cual permite prefijar un cuantificador universal a toda la fórmula— y de Aq024 (para fórmulas implicacionales) o Aq069 (para fórmulas condicionales). El procedimiento consiste, claro está, en la concatenación de dos pasos presentada como un solo paso, para abreviar.

Aq252 f∀xp→∀xfp

Prueba:

(2)	f∀xp→∀xp	Aj
	σ2→p	Aq022
	σ2→fp	Aj
	σ2→∀xfp	rinfq01, Aq024

Aq253 Y∃xp→∃xYp

Prueba:

(2)	Y∃xp→.∃xp∧.∃xp→a	Aj
	σ2→.∃xp∧∀x(p→a)	Aq066
	σ2→.∃xp∧∀x(YpIp)	Aj, rinfq14
	σ2→∃x(YpIp∧p)	Aq014,Aj,rinfq14
	σ2→∃xYp	Aj, rinfq12

Aq254 ∃xYpIY∃xYp

Prueba:

(2)	Y∃xYp→∃xYp	Aj
(3)	Y∃xYp⊃.Y∃xYpI∃xYp	Aj
(4)	¬Y∃zYp∧∃xYp⊃f∃xYp	Aj
	σ4⊃∃xfYp	Aq251
(5)	¬σ4 (4), Aj, rinfq18	
(6)	∃xYp⊃Y∃xYp	(5), Aj
	σ6⊃.Y∃xYpI∃xYp	(3)
	σ6⊃.∃xYp→Y∃xYp	Aj
(7)	∃xYp→Y∃xYp	(6), Aj
	Aq254	(7), (2), Aj

Aq255 Y∀xYpI∀xYp

Prueba:

(2)	f∀xYp⊃∀xfYp	Aq252, Aj
	σ2⊃∃xfYp	Aq023, Aj
(3)	¬σ2 (2), Aj, rinfq18	
(4)	∀xYp⊃Y∀xYp	(3), Aj
	σ4⊃.∀xYpIY∀xYp	Aj
(5)	∀xYp→Y∀xYp	(4), Aj
(6)	Y∀xYp→∀xYp	Aj
	Aq255	(5), (6), Aj

Aq256 ∀xYp→∀xp

Prueba:

(2)	∀xYp⊃.∀xp∧.∀x(p→a)	Aj,rinfq15,Aq037
	σ2⊃.∀xp∧.∃xp→a	Aq066, Aj
	σ2⊃.∀xp∧.∀xp→a	Aj, Aq023
	σ2⊃Y∀xp	Aj
(3)	Y∀xYp⊃Y∀xp	(2), Aq255
(4)	Y∀xYp→Y∀xp	(3), Aj

Aq257 ∀xYp→Y∃xp

Prueba:

(2)	∀xYp→∀xp	Aj, rinfq11
	σ2→∃xp	Aq023
(3)	∀xYp⊃∀x(p→a)	Aj, rinfq15
	σ3⊃.∃xp→a	Aq066
(4)	∀xYp⊃.∃xp→a∧∃xp	(2), (3), Aj
	σ4⊃Y∃xp	Aj

	∀xYp→Y∀xp	(4), Aq255

Aq258 ∀xp⊃.Y∃xp→∀xYp

Prueba:

(2)	Y∃xp⊃.∃xp→a	Aj
	σ2⊃∀x(p→a)	Aq066
(3)	δ2⊃∀x(p⊃Yp)	Aj, rinfq15
	σ3⊃.∀xp⊃∀xYp	Aq049/2
(4)	σ2⊃δ3	(2), (3), Aj
	∀xp⊃.Y∃xp⊃∀xYp	(4), Aj
	σ4⊃.Y∃xp→∀xYp	Aj

Aq260 Y∀xfp∨.∀xfpIf∀xp

Prueba:

(2)	f∀xfp⊃.∀xfpIf∀xfp	Aj
	σ2⊃.σδ2If∀xp	Aq259
(3)	¬∀xfp⊃.¬∀xfp∧¬f∀xp	Aj, Aq252
	σ3⊃.∀xfpIf∀xp	Aj
(4)	¬δ2⊃.¬σ2∧¬σ3	(2), (3), Aj
	σ4⊃Y∀xfp	Aj
	Aq260	(4), Aj

Aq263 Y∃xp→¬∃xfp

Prueba:

(2)	Y∃xp⊃.∃xp→a	Aj
	σ2⊃∀x(p→a)	Aq066
	σ2⊃∀x¬fp	Aj, rinfq15
	σ2⊃¬∃cfp	Aq046
	Aq263	(2), Aj

	∀xYp→Y∃xp	Aq255, (4), Aj

Aq259 f∀xpIf∀xfp

Prueba:

(2)	f∀xp→f∀xfp	Aq252, Aj
(3)	∀xfp→∀xp	Aj, rinfq11
(4)	f∀xfp→f∀xp	(3), Aj
	Aq259	(2), (4), Aj

Aq261 Y∀xfp→Y∀xp

Prueba:

(2)	∀xfp→∀xp	Aj, rinfq11
(3)	Y∀xfp→∀xp	Aj, (2)
	σ3→.f∀xp∨Y∀xp	Aj
(4)	f∀xp→f∀xfp	Aq259, Aj
	σ4→Y∀xfp	Aj
	Aq261	(3), (4), Aj

Aq262 Y∀xp∨.∀xfpIf∀xp

(Prueba: Aq260, Aq261, Aj)

Aq264 ∀xYp→¬∃xfp

(Prueba: Aq257, Aq263, Aj)

Aq265 Y∀xfq∧f∀xp∨.∀x(pRq)→.∀xpR∀xq

Prueba:

(2)	¬∀xp∨Y∀xp⊃.f∀xpI0	Aj
	σ2⊃.¬f∀xpI1	Aj
	σ2⊃.∀xpR∀xqI1	Aj

	σ2⊃.∀x(pRq)→.∀xpR∀xq	Aj
(3)	¬Y∀xp∧¬Y∀xfq⊃.∀x(pRq)→.∀xpR∀xq	Aq262, Aq260, Aq049, Aj
(4)	∀x(pRq)→(∀xpR∀xq)∨.Y∀xfq∨Y∀xp	(3), Aj
(5)	σ4∨Y∀xfq	(2), (4) (Pues σ4=δ2), Aj
(6)	Y∀xfq⊃.Y∀xfq∧σ2∨.Y∀xfq∧¬σ2	Aj
	σ6⊃.σ2∨.Y∀xfq∧¬σ2	Aj
	σ6⊃.δ2∨.Y∀xfq∧f∀xp	(2), Aj
(7)	σ4∨δ2∨.Y∀xfq∧f∀xp	(5), (6), Aj
	Aq265	(7) (Pues σ4=δ2)

Aq266 ∀x(pRq)⊃.∃xpR∃xq (Prueba: Aq049/1, Aq251)

Aq267 p[(x)]R∀xqI∀x(pRq)∨Y∀xfq (Prueba: Aq069, Aj, Aq260)

Aq268 ∃xpRq[(x)]I∀x(pRq) (Prueba: Aq070, Aj, Aq251)

Aq269 p[(x)]R∃xqI∃x(pRq) (Prueba: Aq071, Aj, Aq251)

Aq270 ∀xpRq[(x)]I∃x(pRq)∨Y∀xfp (Prueba: Aq260, Aq072, Aj)

Aq271 q[(x)]R.∀xpRp≡∃x(pRq)

Prueba:

(2)	q[(x)]R.∀xpRq∧.pRq	Aj
	σ2R.∀xpRq∧∃x(pRq)	Aq020, Aj
	σ2RδAq271	Aj, Aq251

Aq272 ∀xpRq[(x)]∧∀x¬(pRq)⊃.Y∀xfp∧¬fq (Prueba: Aj, Aq271, Aq270, Aq046)

Aq273 ∀xpRq[(x)]∧(Y∀xfp⊃fq)⊃∃x(pRq)

Prueba:

(2)	¬Y∀xfp∨fq⊃¬σAq272	Aq272, Aj
	σ2⊃.∀xpRq[(x)]⊃¬∀x¬(pRq)	Aj
	σ2⊃.σδ2⊃∃x(pRq)	Aq046, Aj
	Aq273	(2), Aj

Aq274 ∃x(pRq)→∀xpR∃xq

Prueba:

(2)	∃x(pRq)→.∀xfp⊃∃xfq	Aq073, Aj
	σ2→.∀xfp⊃f∃xq	Aq251, Aj

σ2→.f∀xp⊃f∃xq Aq252, Aj

σ2→.∀xpR∃xq

Nótese que el tránsito del segundo al tercer renglón de la prueba precedente se funda en el siguiente esquema teoremático de Aj: ⌜p→q⊃.q⊃r→.p⊃r⌝; de lo cual se deriva esta regla de inferencia: p→q , s→.q⊃r ├ s→.p⊃r; sustitúyase en las letras esquemáticas de esta regla de inferencia derivada: ⌜p⌝ por ⌜f∀xp⌝; ⌜q⌝ por ⌜∀xfp⌝; ⌜s⌝ por ⌜∃x(pRq)⌝; ⌜r⌝ por ⌜f∃xq⌝; y ya se tiene justificado el tránsito del segundo al tercer renglón. El tránsito al cuarto renglón es, pura y simplemente, por definición de ‘R’.

Aq275 ∃xpR∀xq→∀x(pRq)

Prueba:

(2) ∃xpR∀xq→.∃xfp⊃∀xfq Aj, Aq251, Aq252, (2)

σ2→∀x(pRq) Aq074

Aq276 ∀xpR.∀xfqI∀x(pRq)

Prueba:

(2) f∀xp⊃∀xfp Aq252, Aj

σ2⊃.∀xfqI∀x(fp⊃fq) Aq075

σ2⊃.sδ2I∀x(pRq)

Aq276 (2), Aj

Aq277 ∀xpR.∃x(pRq)If∃xq

Prueba:

(2) f∀xp⊃∀xfp Aq252, Aj

σ2⊃.∃x(fp⊃fq)I∃xfq Aq076

σ2⊃.σδ2If∃xq Aq251

Aq277 (2), Aj

Aq278 ∃xpR.∀x(pRq)→f∃xq (Prueba: Aq251, Aq077, Aj)

Aq279 ∃x¬fp∨∀xfq→∃x(pRq) (Prueba: Aq078, Aj, Aq047)

Aq280 ∀xpR∃xq→∃x(pRq)∨Y∀xfp (Prueba: Aq073, Aj, Aq260, Aq251)

Aq281 ∃xgpIg∃xp

Prueba:

(2) ∃x(p∨a)I.∃xp∨∃xa Aq038

σ2I.∃xp∨a Aq041

Aq282 ∀xgpIg∀xp

Prueba:

(2) ∀x(p∨a)I∀x(a∨p) Aj, rinfq13

σ2I.a∨∀xp Aq057

σ2I.∀xp∨a Aj

Aq283 ∀xnpIn∀xp

Prueba:

(2) ∀x(p•å)I∀x(å•p) Aj, rinfq13

σ2I.å•∀xp Aq114

σ2I.∀xp•å Aj

Aq284 ∃xnpIn∃xp

Prueba:

∃x(p•å)I.∃xp•å Aq116

Aq286 ∃xmpIm∃xp

Aq285 ∀xmpIm∀xp

Prueba:

(2) ∀xNnNpIN∃xnNp Aq029

σ2INn∃xNp Aq284

σ2INnN∀xp Aq028

σ2Im∀xp

Prueba:

(6) ∃xNnNpIN∀xnNp Aq028

σ2INn∀xNp Aq283

σ2INnN∃xp Aq029

σ2Im∃xp

Aq287 b∀xpI∀xbp

Prueba:

(2) N∀xp→a&∀xpI.∃xNp→a&∀xp Aq028

σ2I.∀x(Np→a)&∀xp Aq066

σ2I∀x(Np→a&p) Aq079

Aq288 ∃xbp→b∃xp

Prueba:

(2) ∃x(Np→a&p)→.∃x(Np→a)&∃xp Aq082

σ2→.∀xNp→a&∃xp Aq042, Aj

σ2→.N∃xp→a&∃xp Aq029, Aj

Aq289 b∃xbpI∃xbp

Prueba:

(2) ∃xbbp→b∃xbp Aq288

(3) ∃xbp→∃xbbp Aj (A1010), rinfq12

σ3→b∃xbp (2)

(4) b∃xbp→∃xbp Aj, (A1009)

Aq289 (3), (4), Aj

Aq290 ∀xbp∧∀xbqIb∀x(p∧q) (Prueba: Aq037, Aj, rinfq13, Aq287)

Aq291 ∃xb(p∧q)→.b∃xp∧b∃xq (Prueba: Aq056, Aj (1012), rinfq14, Aq288)

Aq292 ∃xbp∨∃xbq→b∃x(p∨q) (Prueba: Aq038, Aj (1014), rinfq14, Aq288)

Aq293 ∃xbp∨∀xfNp

Prueba:

(2) ∀x(bp∨fNp) Aj (A1015), rinfq01

∃xbp∨∀xfNp (2), Aq048

Aq294 b∀xp∨f∃xNp (Prueba: Aj (A1015), Aq251)

Aq295 ∀x(p→q)→.b∀xp→b∀xq (Prueba: Aj (A1013), Aq028, rinfq11, Aq025 + rinfq17, Aq287)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 16º.— LOS FUNCTORES ‘B’, ‘J’, ‘G’, ‘’, ‘=’ y ‘↖’ EN SU RELACIÓN CON LOS CUANTIFICADORES

Sabida es la importancia de los functores señalados en el título de este capítulo para toda la teoría lógica desarrollada en la Sección I. El papel privilegiado del functor ‘B’ que interviene en la definición de los otros cinco estriba en que, para cualquier hecho, p, ⌜Bp⌝ es afirmable con verdad ssi ⌜p⌝ es afirmable con verdad; y en ese caso lo dicho por ⌜Bp⌝ (por «Es afirmable con verdad que p») es idéntico a lo dicho por ⌜p⌝, a secas: lo dicho es el hecho de que p; en cambio, si no es en absoluto afirmable con verdad que p, entonces puede que haya diferencia entre lo dicho por ⌜Bp⌝ —en ese caso, nada en absoluto será dicho por ⌜Bp⌝— y lo dicho por ⌜p⌝, que es el hecho de que p. y puede que exista tal hecho aunque relativamente nada más —o sea: únicamente en algunos de los aspectos de lo real.

Vamos a ver ahora, entre otras cosas, que es de cada ente afirmable con verdad cierta característica en la misma medida en que sea afirmable con verdad que todos los entes tienen esa característica.

También estudiaré en este mismo capítulo unos pocos esquemas teoremáticos con ocurrencias esenciales del functor ‘↖’, que definí más arriba (por la dfq2).

Nótese bien que no es teoremático el esquema recíproco del Aq302, a saber ⌜B∃xp→∃xBp⌝ —ni siquiera lo es el resultado de reemplazar en ese esquema la implicación ‘→’ por el mero condicional o entrañamiento ‘⊃’, e.d. el esquema ⌜B∃xp⊃∃xBp⌝. Eso es de suma importancia y nos revela a las claras qué sentido tiene y qué sentido no tiene una afirmación existencial del tipo ⌜∃xp⌝. Tal afirmación es **de existencia indeterminada**; o sea: no predica existencia determinativamente de ningún ente en particular, no dice de un ente en particular —determinado por deixis o descripción— que ese ente existe. Nos dice tan sólo que hay (o que existe en el sentido impersonal de ‘existe’ en que este verbo equivale a ‘hay’) algún ente (uno-u-otro ente) con cierta característica —con la característica ⌜p⌝. Por eso, puede que sea verdad, afirmable con verdad, que hay algún ente con esa característica sin que de ningún ente en particular sea afirmable con verdad que él tiene dicha característica. Puede, pues, que sea afirmable con verdad ⌜∃xp⌝ (y lo será ssi es afirmable con verdad ⌜B∃xp⌝) y que, no obstante, de ningún ente en particular sea afirmable con verdad que él tiene tal característica. Así sucederá si en cada aspecto de lo real hay algún ente con la característica en cuestión, pero ninguno de ellos en absoluto es tal que la tenga en todos los aspectos. (Similarmente, aunque todos los países tienen alguna ciudad, no es verdad que haya una ciudad que sea tenida por todos los países.) Lo afirmable con verdad es lo verdadero en todos los aspectos de lo real —entre los que se incluyen los lapsos de tiempo y los lugares espaciales; y puede que sea, por ello, afirmable con verdad el haber algo que p sin que haya en absoluto ente alguno tal que, en todos y cada uno de los aspectos de lo real, sea cierto, **de él**, que p.

Las raíces y la significación de la diferencia entre el ser afirmable con verdad que hay algo que p y el haber algo de lo que es afirmable con verdad que p quedarán aclaradas en el capítulo siguiente —cuando estudiemos la falacia que, de «Todo ente, x, es tal que hay algún ente, z, tal que p» concluye «Hay algún ente, z, tal que todo ente, x, es tal que p». Por de pronto, lo que más nos interesa recalcar es que la diferencia entre ⌜B∃xp⌝ —que se deduce de ⌜∃xp⌝ en virtud de la regla de afirmabilidad, rinf02— y ⌜∃xBp⌝ nos muestra el fracaso de la llamada lectura sustitucional del cuantificador particular (he tratado con detenimiento esa cuestión —como en general varios de los temas filosóficos imbricados o subyacentes en la concepción y el tratamiento de los cuantificadores, particularmente del existencial— en ***El ente y su ser: un estudio lógico-metafísico***, León: Servicio de Publicaciones de la Universidad de León, 1985, Secc. II, cap. 12º). A tenor de esa lectura, la condición necesaria y suficiente para que sea verdadera una cuantificación existencial ⌜∃xp⌝ es que sea verdadera al menos una oración ⌜p[x/k]⌝, donde ‘k’ es algún término o nombre que designe a determinado objeto (y, similarmente —según esa misma concepción sustitucionalista—, la condición necesaria y suficiente para que sea verdadera una cuantificación universal ⌜∀xp⌝ es que sea verdadero el resultado de reemplazar uniformemente, en ⌜p⌝, las ocurrencias libres de ‘x’ por sendas ocurrencias de algún nombre propio). Pero eso es incorrecto, pues puede que sea afirmable con verdad ⌜∃xp⌝ (por ser verdad ⌜B∃xp⌝) y que, sin embargo, no sea en absoluto afirmable con verdad ningún resultado de reemplazar uniformemente en ⌜p⌝ las ocurrencias libres de ‘x’ por sendas ocurrencias de algún nombre propio (por no ser en absoluto afirmable con verdad ⌜∃xBp⌝; ahora bien, si fuera afirmable con verdad ⌜p[x/k]⌝, de ahí, en virtud de rinf02, deduciríamos ⌜Bp[x/k]⌝ y, de esto último y en virtud de Aq020, inferiríamos ⌜∃xBp⌝). Es más: puede que, para cada x, sea afirmable con verdad que no es afirmable con verdad en absoluto que x sea tal que p; y que, sin embargo, sea afirmable con verdad que hay algún ente, x, tal que p. Eso es lo que de hecho sucede en la teoría de cúmulos *CD* que expondré en la Sección III de este libro. (Hay ciertas fórmulas ⌜p⌝ tales que es un teorema de *CD* ⌜∃xp⌝, pero también lo es ⌜¬∃xBp⌝; y, por lo tanto, de cada término ⌜k⌝ en una extensión recia cualquiera de *CD* —e.d. en una teoría cualquiera que incluya entre sus expresiones las de *CD*, entre sus reglas de inferencia las de *CD*, y entre sus teoremas los de *CD*—, será afirmable con verdad ⌜¬Bp[x/k]⌝ y, por ende, no será afirmable con verdad en absoluto ⌜p[x/k]⌝. Una de esas fórmulas es ésta: sea ‘R’ una abreviación de ‘{x:¬(xx)}’, expresión que mienta al cúmulo de cuantos cúmulos no se abarcan a sí mismos; entonces la fórmula en cuestión es ‘x=R∧x∨.x=¬R∧x’. Si la abreviamos como ‘t’, demuéstrase en *CD*: B∃xt∧¬∃xBt.

Llamaré **sistema fuertemente -inconsistente** a una teoría en la cual haya cierta fórmula ⌜p⌝ tal que ⌜∃xp⌝ sea un teorema de la teoría pero, sin embargo, se pueda derivar en la teoría la regla p[x/k] ├ q, donde ⌜k⌝ es un término —variable o constante individual— cualquiera y ⌜q⌝ es cualquier oración. (Eso significa que la afirmación de ⌜p[x/k]⌝ haría a la teoría delicuescente o trivial, pues de tal afirmación se seguiría cualquier afirmación.) Nuestra teoría de conjuntos *CD* es, pues, un sistema fuertemente ω-inconsistente. Pero de esa noción hay que diferenciar claramente ésta otra: **-superinconsistencia** que es el darse la siguiente situación en cierta teoría: que para cada término (variable o constante) ⌜k⌝, sea ⌜p[x/k]⌝ un teorema de esa teoría, y que, sin embargo, pueda derivarse en la teoría la regla ∀xp ├ q, donde ⌜q⌝ es cualquier fórmula; una teoría ω-superinconsistente es, pues, una teoría en la cual algo que es verdad de cada ente por separado deja por completo de ser verdad de todos los entes conjuntamente tomados —hasta el punto de que afirmarlo de todos los entes convertiría a la teoría en delicuescente, la trivializaría, haciendo que en ella fuera afirmable cualquier fórmula. Nuestra teoría no es ω-superinconsistente; pero, en cambio, sí lo son otras lógicas no clásicas en las que no se reconoce un umbral veritativo mínimo; en nuestra teoría sí se postula tal umbral o grado ínfimo de verdad: lo infinitesimalmente verdadero. De no postularse ese umbral, tendríamos que una oración ⌜∀xp⌝ pudiera ser totalmente falsa, aunque, para cada término ⌜k⌝, pudiera ser verdad ⌜p[x/k]⌝; así sucedería si cada ente tuviera la característica ⌜p⌝ en uno u otro grado pero, para cada ente que la tuviera en algún grado, otro la tuviera en menor grado y esa secuencia o serie de grados tendiera asintóticamente a 0; en ese caso, la cota inferior —o tope por debajo— del conjunto de esos grados de verdad sería el 0; la verdad de ⌜∀xp⌝ no podría ser superior a 0, pues, de serlo, sería superior a la de alguna oración ⌜p[x/k]⌝, para determinado ⌜k⌝. Nuestra propia teoría lógica está al abrigo de semejante catástrofe (de la ω-superinconsistencia) por la postulación del umbral o grado ínfimo de verdad; en una situación como la descrita, en nuestra teoría sucedería que ⌜∀xp⌝ sería infinitesimalmente verdad, o sea tendríamos ⌜Y∀xp⌝, aunque, para cada término ⌜k⌝, tendríamos que ⌜fp[x/k]⌝ sería un enunciado verdadero: de cada ente sería un tanto cierto (más que infinitesimalmente, pues) el ser él tal que p, pero sería sólo infinitesimalmente verdad el ser todo ente tal que p.

Tras las importantes aclaraciones y puntualizaciones que preceden, echemos ya mano a la obra de probar los esquemas teoremáticos correspondientes al presente capítulo.

Aq301 ∀xBpIB∀xp

Prueba:

(2)	B(¬Bp⊃∃x¬Bp)	Aq020, Aj
(3)	B¬Bp⊃B∃c¬Bp	(2), Aj

Aq302 ∃xBp→B∃xp

Prueba:

(2)	Bp→B∃xp	Aq020, Aj
(3)	∀x2	(2), rinfq01

(4)	¬B∃x¬Bp⊃¬B¬Bp	(3), Aj
	σ4⊃JBp	Aj
(5)	¬B¬∀xBp⊃JBp	(4), Aq047, Aj
(6)	J∀xBp⊃JBp	(5), Aj
	σ6⊃Bp	Aj
	σ6⊃p	Aj
(7)	J∀xBp⊃∀xp	(6),rinfq01,Aq069
(8)	∀xBp⊃B∀xp	(7), Aj
(9)	∀xBp⊃.∀xBp∧B∀xp	(8), Aj
	σ9⊃.∀(BpIp)∧.B∀xpI∀xp	Aj, rinfq15
	σ9⊃.∀xBpI∀xp∧.B∀xpI∀xp	Aq026
	σ9⊃.∀xBp→B∀xp	Aj
(22)	∀xBp→B∀xp	(9), Aj
(23)	B∀xp→Bp	Aq022, Aj
(24)	B∀xp→∀xBp	rinfq01,Aq024,(23)
	Aq301	(24), (22), Aj

Aq305 L∃xJpIJ∃xp

Prueba:

(2)	∃xJpI∃xLJp	Aj, rinfq14
	σ2IL∃xJp	Aq035
	Aq305	(2), Aq303

Aq306 J∃xLpI∃xJp

Prueba:

(2)	J∃xpIJL∃xp	Aj
	σ2IJ∃xLp	Aq035, Aj
	Aq306	Aq303, (6)

	∃xBp→∃xp	(3), Aq033

Aq303 J∃xpI∃xJp

Prueba:

(2)	B∀x¬pI∀xB¬p	Aq301
(3)	¬B∀x¬pI¬∀xB¬p	(2), Aj
	σ3I∃x¬B¬p	Aq047
	σ3I∃xJp	
(4)	¬B¬∃xpI∃xJp	(3), Aq046
	J∃xpI∃xJp	(4)

Aq304 J∀xp→∀xJp

Prueba:

(2)	∃xB¬p→B∃x¬p	Aq302
	σ2→B¬∀xp	Aq047
(3)	¬B¬∀xp→¬∃xB¬p	(2), Aj
	σ3→∀x¬B¬p	Aq046

Aq307 ∀xJBpIBL∀xp

Prueba:

(2)	∀xJBpI∀xLBp	Aj, rinfq13
	σ2IL∀xBp	Aq045
	σ2ILB∀xp	Aq301
	σ2IBL∀xp	Aj

Aq308 B¬∃xp→¬∃xBp

Prueba:

(2)	∃xBp→B∃xp	Aq302
	σ2→¬B¬∃xp	Aj
(3)	B¬∃xp→¬∃xBp	(2), Aj

Aq309 B¬∀xp→∃x¬Bp

Prueba:

(2)	∀xBp→¬B¬∀xp	Aq301, Aj
(3)	B¬∀xp→¬∀xBp	(2), Aj
	σ3→x¬Bp	Aq047

Aq310 ∀xB(p∧q)I.B∀xp∧B∀xq

Prueba:

(2)	∀xB(p∧q)I∀x(Bp∧Bq)	Aj, rinfq13
	σ2I.∀xBp∧∀xBq	Aq037
	σ2I.B∀xp∧B∀xq	Aq301

Aq311 ∃xJ(p∨q)I.J∃xp∨J∃xq

Prueba:

(2)	∀xB(¬p∧¬q)I.B∀x¬p∧B∀x¬q	Aq310
(3)	∀xB¬(p∨q)Iσ2	Aj, rinfq13
	σ3Iδ2	(2)
(4)	¬σ3I¬δ2	(3), Aj
(5)	∃x¬B¬(p∨q)I¬δ2	Aq047, (4)
	σ5I.¬B∀x¬p∨¬B∀x¬q	Aj
	σ5I.¬B¬∃xp∨¬B¬∃xq	Aq046, Aj

Aq312 ∀xBKpIKB∀xp

Prueba:

(2)	∀xBKpI∀xKBp	Aj, rinfq13
	σ2IK∀xBp	Aq121
	σ2IKB∀xp	Aq301

Aq314 ∃xBpIB∃xBp

Prueba:

(2)	∃xBp→∃xBBp	Aj, rinfq12
	σ2→B∃xBp	Aq302
(3)	B∃xBp→∃xBp	Aj
	Aq314	(2), (3), Aj

Aq313 ∀xBXpIXB∀xp (Prueba: Aj, rinfq13, Aq119, Aq301)

Aq315 ∀x(p=q)→.∀xp=∀xq

Prueba:

(2)	∀xB(pIq)→B∀x(pIq)	Aq301
	σ2→B(∀xpI∀xq)	Aq026,rinfq17,Aj

Aq316 ∀x(p=q)→.∃xp=∃xq

Prueba:

(2)	∀x(p=q)→∀x(Np=Nq)	Aj, rinfq11
	σ2→.∀xNp=∀xNq	Aq315
	σ2→.N∀xNp=N∀xNq	Aj
	σ2→.∃xp=∃xq	Aq030

Aq317 ∀x(p⇒q)→.∀xp⇒∀xq

Prueba:

(2)	∀x(p⇒q)→∀x(p∧q=p)	Aj, rinfq11
	σ2→.∀x(p∧q)=∀xp	Aq315
	σ2→.∀xp∧∀xq=∀xp	Aq037
	σ2→.∀xp⇒∀xq	Aj

A318 ∀x(p⇒q)→.∃xp⇒∃xq

Prueba:

(2)	∀x(p⇒q)→∀x(Nq⇒Np)	Aj, rinfq11
	σ2→.∀xNq⇒∀xNp	Aq317
	σ2→.N∀xNp⇒N∀xNq	Aj
	σ2→.∃xp⇒∃xq	Aq030

Aq319 ∀x(pGq)→.∀xpG∀xq

Prueba:

(2)	∀x(pGq)→B∀x(p⊃q)	Aq301

Aq320 ∀x(pGq)→.∃xpG∃xq

Prueba:

(2)	∀x(pGq)→B∀x(p⊃q)	Aq301

σ2→.∀xpG∀xq	Aq049, Aj

σ2→B(∃xp⊃∃xq)	Aq049/1, Aj
σ2→.∃xpG∃xq	

Aq321 p╪q→¬∀x(p=q) (Prueba: Aj, Aq020, Aq047)

Aq322 ∀xp╪∀xq→∃x¬(p=q) (Prueba: Aq315, Aj, Aq047)

Aq323 ∃xp╪∃xq→∃x¬(p=q) (Prueba: Aq316, Aj, Aq047)

Aq324 ∀x(p=q)I.∀x(p⇒q)∧∀x(q⇒p) (Prueba: Aj, rinfq13, Aq037)

Aq325 ∀x(p╪q≡.p↖q∨.q↖p∨.J(p\q)∧J(q\p)) (Prueba: Aj, dfq2, rinfq01)

Aq326 ∃xp⇒∀xq→∀x(p⇒q) (Prueba: Aq053, Aj, Aq301)

Aq327 ∃x(p⇒q)→.∀xp⇒∃xq (Prueba: Aq039, rinfq17, Aq302, Aj)

Aq328 ∃x(p[(x)]⇒q)→.p⇒∃xq (Prueba: Aq042, rinfq17, Aq302, Aj)

Aq329 ∃x(p⇒q[(x)])→.∀xp⇒q (Prueba: Aq043, rinfq17, Aq302, Aj)

Aq330 ∀x(p[(x)]⇒q)I.p⇒∀xq (Prueba: Aq065, Aj, Aq301)

Aq331 ∃xp⇒q[(x)]I∀x(p⇒q) (Prueba: Aq066, Aj, Aq301)

Aq332 ∀x(p[(x)]Gq)I.pG∀xq (Prueba: Aq069, Aj, Aq301)

Aq333 ∀x(pGq[(x)])I.∃xpGq (Prueba: Aq070, Aj, Aq301)

Aq334 ∃x(p[(x)]Gq)→.pG∃xq (Prueba: Aq071, Aj, Aq302)

Aq335 ∃x(pGq[(x)])→.∀xpGq (Prueba: Aq702, Aj, Aq302)

Aq336 ∃x(pGq)→.∀xpG∃xq (Prueba: Aq073, Aj, Aq302)

Aq337 ∃xpG∀xq→∀x(pGq) (Prueba: Aq074, Aj, Aq301)

Aq338 ∀x(p↖q→.q↖r→.p↖r) (Prueba: Aj, dfq2, rinfq01)

Aq339 ∀x(p↖q→¬(q↖p)) (Prueba: Aj, dfq2, rinfq01)

Aq340 ∀xBp∨J∃x¬p

Prueba:

(2)	∀x(J¬p∨Bp)	Aj, rinfq01
(3)	∃xJ¬p∨∀xBp	(2), Aq048
	Aq340	Aj, Aq303

Aq341 ∀xJ¬p∨∃xBp

(Prueba: Aj, rinfq01, Aq048)

Aq342 ∃xJp∨B¬∃xp

(Prueba: Aj, rinfq01, Aq301, Aq046)

Aq343 ∃xBp∧∀xJq→∃xJ(p∧q)

Prueba:

(2)	∀xJq∧∃xBp→∃x(Jq→Bp)	Aq014
	σ2→∃xJ(p∧q)	Aj, rinfq12

Aq344 ∀xBp∧∃xJq→∃xJ(p∧q)

(Prueba: como Aq341)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 17º.— ALGUNOS RESULTADOS GENERALIZADOS QUE SE OBTIENEN MEDIANTE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

En el capítulo próximo voy a adentrarme en la demostración de esquemas que comportan varias variables y cuantificadores con diferentes variables afectando a una misma fórmula. En la demostración de esquemas así estriba la fuerza del cálculo cuantificacional. Pero conviene, para poder proceder con facilidad en esa tarea, probar primero mediante inducción matemática, algunos resultados generales que nos van a permitir luego avanzar con soltura —aunque, inevitablemente, la demostración de estos resultados preliminares haya de ser engorrosa y ardua.

En primer lugar, voy a probar que si ⌜∀xp⌝ es una variante alfabética de ⌜∀zq⌝ —con cualesquiera variables en lugar de x y de z—, entonces ⌜∃xp⌝ es una variante alfabética de ⌜∃zq⌝. Ante todo, es obvio que, si ⌜∀xp⌝ es una variante alfabética de ⌜∀zq⌝, entonces ⌜∀x(1•Np)⌝ es una variante alfabética de ⌜∀z(1•Nq)⌝, pues el tránsito de ⌜p⌝ a ⌜1•Np⌝ —lo mismo que el de ⌜q⌝ a ⌜1•Nq⌝— nada altera en lo tocante a presencia o ausencia de variables. Pero, por definición de **variante alfabética**, si ⌜∀x(1•Np)⌝ es una variante alfabética de ⌜∀z(1•Nq)⌝, entonces ⌜N∀x(1•Np)⌝, o sea ⌜∃xp⌝, es una variante alfabética de ⌜N∀z(1•Nq)⌝, o sea de ⌜∃zq⌝. *Q.E.D.*

Voy a probar ahora que las reglas de inferencia rinfq11 y siguientes valen no sólo para la variable 'x', sino para cualquier variable. Tomamos rinfq11 como ejemplo, pero la prueba se aplica exactamente igual a cualquier otra de esas reglas.

PRUEBA.— Tomemos la premisa de rinfq11, ⌜p→q⌝, y supongamos que es un teorema. Supongamos que queremos obtener como conclusión, en vez de ⌜∀xp→∀xq⌝, ⌜∀up→∀uq⌝. En primer lugar, formamos la fórmula ⌜p^1→q^1⌝ que es como ⌜p→q⌝ sólo que reemplazando cada ocurrencia libre de u por una ocurrencia libre de x y cada ocurrencia libre de x por una ocurrencia libre de una variable, sea la que fuere, que carezca de ocurrencias en ⌜p→q⌝; si el reemplazo de una ocurrencia libre de u por una ocurrencia de x da como resultado que ésta caiga bajo el alcance de un cuantificador en ⌜p→q⌝, entonces, para evitar eso, aplicamos primero a la cuantificación formada por ese cuantificador más su alcance la regla rinfq03, reemplazando la variable ligada x por una variable que no tenga ocurrencia alguna en ⌜p→q⌝ y que sea diferente de aquella variable que, en ⌜p^1→q^1⌝, esté reemplazando a x —si es que, en ⌜p→q⌝, hay ocurrencias libres de x. Así pues, ⌜p^1→q^1⌝ será el resultado de: 1º) someter ⌜p→q⌝ a rinfq03 del modo indicado (reemplazando las cuantificaciones de la forma ⌜∀xr⌝ por variantes alfabéticas suyas en las que la variable del cuantificador sea nueva —e.d. carezca de ocurrencias en ⌜p→q⌝—, siempre que haya en ⌜r⌝ alguna ocurrencia libre de u); 2º) reemplazar cada ocurrencia libre de x por una ocurrencia libre de una variable nueva y diferente de las que intervengan en la operación anterior; 3º) reemplazar cada ocurrencia libre de u por una ocurrencia libre de x.

En virtud de rinfq02, tenemos

(2) $p \rightarrow q \vdash p^1 \rightarrow q^1$ Y, en virtud de rinfq11, tenemos

(3) $p^1 \rightarrow q^1 \vdash \forall x p^1 \rightarrow \forall x q^1$

Ahora formemos ⌜p^2→q^2⌝ como sigue: cada ocurrencia libre de x en ⌜p^1→q^1⌝ es reemplazada por una ocurrencia libre de u; en virtud de rinfq03 tenemos:

(4) $\forall x p^1 \rightarrow \forall x q^1 \vdash \forall u p^2 \rightarrow \forall u q^2$

Ahora pasamos de ⌜p^2⌝ y ⌜q^2⌝ a ⌜p⌝ y ⌜q⌝ deshaciendo los dos primeros pasos del procedimiento seguido para pasar de ⌜p→q⌝ a ⌜p^1→q^1⌝ en primer lugar deshacemos el paso 1º y restauramos las cuantificaciones de la forma $\ulcorner \forall xr \urcorner$ que hubiera habido en $\ulcorner p \to q \urcorner$, quitando de su lugar a los sucedáneos suyos por los cuales los habíamos reemplazado; y luego reemplazamos las ocurrencias libres, en $\ulcorner p^2 \urcorner$ y/o $\ulcorner q^2 \urcorner$, de la variable con la que habíamos sustituido las ocurrencias libres de x en $\ulcorner p \to q \urcorner$ por sendas ocurrencias libres de x. El resultado de la operación es, obviamente, reemplazar $\ulcorner p^2 \urcorner$ por $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner q^2 \urcorner$ por $\ulcorner q \urcorner$. Aplicando rinfq02 y rinfq03 tenemos:

(5) $\forall up^1 \to \forall uq^1 \vdash \forall up \to \forall uq$

Por (2), (3), (4) y (5), tenemos lo que buscábamos:

(6) $p \to q \vdash \forall up \to \forall uq$

Y eso para cualquier variable, sea la que fuere, en lugar de u. Además, se demuestra también que la regla vale en una forma generalizada, como sigue:

$p \to q \vdash \forall u^1, u^2, \ldots, u^n p \to \forall u^1, u^2, \ldots, u^n q$ (para cualesquiera variables en lugar de: $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

La prueba es por inducción matemática. Ya sabemos que la regla vale para el caso en que sólo se prefija a la prótasis y a la apódosis implicacionales un solo cuantificador, sea de la variable que fuere. Ahora se demuestra que, si vale para n cuantificadores, vale también para n+1, como sigue. Por hipótesis tenemos:

hip $p \to q$

(7) $\forall u^1, \ldots, u^n p \to \forall u^1, \ldots, u^n q$

(8) $\forall u, u^1, \ldots, u^n p \to \forall u, u^1, \ldots, u^n q$

Infiérese (8) de (7) —y, en (8), 'u' hace las veces de cualquier variable que se haya querido escoger, sea la que fuere— al igual que se demuestra la validez de (6), arriba, por escalonadas aplicaciones de rinfq02, rinfq03 y rinfq11.

Con ello queda completada la prueba. Y, exactamente igual, se demuestra que otro tanto vale para las otras reglas de inferencia derivadas (salvo las reglas rinfq17 y rinfq17/1, en lo tocante a las cuales la prueba presenta alguna particularidad, por lo demás de poca monta). Por lo cual, en adelante, entenderemos cada una de esas reglas de manera que, en la escritura esquemática de la regla en cuestión, dondequiera que aparezca un solo cuantificador con la variable x puede leerse, en su lugar, una retahila (finita, eso sí) de cuantosquiera cuantificadores con cualesquiera variables.

De manera similar se prueba que, dado un esquema teoremático cualquiera, $\ulcorner p \urcorner$, en el que figuren las cuantificaciones $\ulcorner \forall xp^1 \urcorner$, $\ulcorner \forall xp^2 \urcorner$, $\ulcorner \forall xp^3 \urcorner, \ldots, \ulcorner \forall xp^n \urcorner$, es también teoremático el resultado de: 1º) reemplazar uniformemente cada una de esas ocurrencias del cuantificador $\ulcorner \forall x \urcorner$ por una ocurrencia de otro cuantificador universal, $\ulcorner \forall u \urcorner$; 2º) reemplazar uniformemente las indicaciones que, entre corchetes, figuren en $\ulcorner p \urcorner$ con la variable x por sendas indicaciones en las que esa variable haya sido sustituida por u. (Evidentemente, 'u' no es aquí más que un ejemplo; está siendo usada como metavariable, pues hace las veces de cualquier variable.)

Sea $\ulcorner p \urcorner$ una instancia cualquiera del esquema dado. Tomemos cada matriz de una cuantificación, $\ulcorner p_i \urcorner$, en $\ulcorner p \urcorner$ y eliminemos las ocurrencias libres de x, reemplazándolas por ocurrencias respectivas de una variable nueva, digamos z; luego, reemplacemos uniformemente en $\ulcorner p \urcorner$ cada ocurrencia libre en $\ulcorner p \urcorner$ de x por una de esa misma variable nueva z; y reemplacemos cada ocurrencia libre en $\ulcorner p_i \urcorner$ de u por una de x, siendo $\ulcorner p_i^1 \urcorner$ el resultado de ese doble reemplazamiento; y reemplacemos cada fórmula que esté fuera de esas cuantificaciones $\ulcorner \forall xp_i \urcorner$ en $\ulcorner p \urcorner$ y que esté afectada (mediante indicación entrecorchetada) por ciertas restricciones o condiciones que la vinculan a una de las matrices, $\ulcorner p_j \urcorner$, por una fórmula que esté vinculada, del mismo modo, mas no a $\ulcorner p_j \urcorner$ sino a $\ulcorner p_j^1 \urcorner$. (Consiste el vínculo en cuestión en compartir, o en dejar de compartir, determinadas variables.)

El resultado de esa primera etapa de transformaciones será una instancia del mismo esquema del cual era una instancia $\ulcorner p \urcorner$; así pues, es un teorema. Luego, por rinfq03, reemplacemos en ese teorema cada ocurrencia ligada de x por una de u, y el resultado es también un teorema; luego, reemplacemos, en virtud de rinfq02, cada ocurrencia libre de x por una de u, y también es un teorema el resultado; por último, reemplacemos cada ocurrencia de z (la variable nueva con ocurrencias de la cual habíamos reemplazado todas las primitivas ocurrencias de x en ⌜p⌝, salvo las que figuraban **en** los cuantificadores) por ocurrencias de x. El resultado es también teoremático en virtud de rinfq02. *Q.E.D.* (pues la prueba vale para **cualquier** instancia, arbitrariamente tomada, del esquema, valiendo, pues, para el propio esquema —pudiendo, por consiguiente, ser reemplazado el esquema dado por otro en el que cada ocurrencia de '∀x' sea reemplazada por una de '∀u' y en cada indicación entrecorchetada se reemplace uniformemente 'x' por 'u').

A tenor del resultado que acabo de probar, podremos leer cualquier esquema teoremático como si en él se hablara de cualquier otra variable en lugar de aquella[s] que figure[n] en el mismo. P.ej. Aq021 podrá ser leído, según nos convenga, de alguna de las siguientes maneras (de infinitas otras maneras, por supuesto, pues hay infinidad de variables):

p[y/z]→∃yp ; p[z/v]→∃zp ; p[u/v]→∃up ; p[z/x]→∃up ; p[z/x]→∃zp : etc. etc.

Así pues, en adelante al aducir un esquema teoremático a favor de un paso deductivo, el esquema recibirá una u otra lectura según las conveniencias de la demostración —según cuáles sean las variables involucradas en el correspondiente paso deductivo; al lector le toca percatarse de qué cambios de variables libres y ligadas han de efectuarse para que el esquema teoremático aducido sea pertinente como instancia justificativa del paso deductivo en cuestión. (P.ej., en determinado caso, al citarse Aq028, se puede estar aduciendo el esquema ⌜N∀ypI∃yNp⌝.) Eso quiere decir que, en lo sucesivo, uso las variables de los esquemas teoremáticos (y también las de las reglas de inferencia derivadas, según lo vimos más arriba) como **meta**variables: hace una variable dada, escrita en un esquema, las veces de cualquier variable, siempre que se respete el reemplazamiento uniforme, tanto en los cuantificadores como en las indicaciones de condiciones y restricciones adicionales que figuren entrecorchetadas en el esquema.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 18º.— VARIOS CUANTIFICADORES A LA VEZ CON DIFERENTES VARIABLES

En cada uno de los esquemas que habíamos estudiado hasta llegar al capítulo anterior, los cuantificadores que aparecían contenían todos la misma variable, en general 'x'. Pero, como lo señalé al comienzo de esta Sección, el avance más importante que permite el cálculo cuantificacional —en contraste con la vieja silogística, p.ej.— es precisamente el estudiar verdades [onto]lógicas en las que figuran diversas variables, cada una bajo el alcance de cierto cuantificador, pero afectando todos esos cuantificadores a una misma fórmula —en vez de que cada uno afecte únicamente a una subfórmula de la fórmula total, sin que tal subfórmula esté afectada por otro cuantificador.

Los primeros esquemas teoremáticos que voy a demostrar en este capítulo son de gran importancia. El Aq351 nos muestra que el orden de los cuantificadores universales prefijados a una fórmula es indiferente: Es equivalente lo dicho por 'Todo ente, x, es tal que todo ente, z, es tal que x es o más real que z o a lo sumo tan real como z' a lo dicho por 'Todo ente, z, es tal que todo ente, x, es tal que x es o más real que z o a lo sumo tan real como z'. El esquema Aq353 nos muestra que lo propio sucede en lo tocante al orden de los cuantificadores existenciales: ese orden es también indiferente por completo.

El esquema Aq352 es también importantísimo; y no menos importante es percatarse de que no es correcto el esquema recíproco, ni siquiera si sustituyéramos la implicación '$\rightarrow$' por el mero condicional '$\supset$'. El que haya un ente que, con relación a cualquier ente, z, cumple la característica p implica (y, por ende, entraña) que cada ente z sea tal que haya algún ente, x, que cumpla la característica p; pero no a la inversa. Sea $\ulcorner p \urcorner$, p.ej., 'x es por lo menos tan perfecto como z'; obviamente, si hay un ente, x, que es por lo menos tan perfecto como cualquier ente, z, entonces, dado un ente cualquiera, z, hay un ente, x, tal que x es por lo menos tan perfecto como z; mas —salvo que se aduzcan, para ese caso concreto, otras razones— no es nada seguro que suceda lo inverso: que, por el mero hecho de que, para cada ente z, haya algún ente x al menos tan perfecto como z, por ese mero hecho tenga que haber un determinado ente, x, que sea tan perfecto como cualquier ente, z, si no más; podría suceder —salvo, insisto, que se aduzcan otras razones para probar lo contrario— que para cada ente hubiera otro igual de perfecto o más, y que tal escala entitativa no tuviera cota superior; en tal caso, no habría en absoluto ente alguno, x, tal que, para cada ente z, x fuera por lo menos tan perfecto como z. El lógico y filósofo inglés Peter Geach (en el ensayo titulado «History of a Fallacy», recogido en *Logic Matters*, Oxford: Blackwell, 1972, pp. 1-12) ha mostrado cuán abundantes han sido los paralogismos en que han incurrido los filósofos en el pasado por confundir lo dicho por $\ulcorner \exists x \forall z p \urcorner$ con lo dicho por $\ulcorner \forall z \exists x p \urcorner$; una de las ventajas del cálculo cuantificacional es que nos brinda una excelente ayuda para sortear esas trampas y confusiones, que, en las prolaciones verbales corrientes, no son tan fáciles de esquivar, porque nuestra capacidad humana de atención y memoria es débil y, por eso, le son provechosos los recursos adicionales de visualización que permiten la notación simbólica y la esquematización. Uno de esos paralogismos era, p.ej., el de extraer del aserto de que cada ente tiene una causa la conclusión de que hay una causa de todos los entes (tomando $\ulcorner p \urcorner$ como la oración: 'x es causa de z', se deducía $\ulcorner \exists x \forall z p \urcorner$ de $\ulcorner \forall z \exists x p \urcorner$).

Otros ejemplos similares de esa falacia (la que presupone al inválido esquema $\ulcorner \forall x \exists y p \supset \exists y \forall x p \urcorner$) son aducidos por Geach en el lugar citado; un ejemplo no filosófico es: concluir, de la verdad de que cada novela de Valle Inclán es tal que hay un lapso de pocas horas en el cual puede ser leída, la falsedad de que hay un lapso de pocas horas en el que pueden ser leídas todas las novelas de Valle Inclán; entre los ejemplos que expone Geach se encuentran: un paralogismo cometido por Aristóteles en la *Ética Nicomaquea* (inferir, de que cada serie de medios o fines relativos ha de tener un último término que sea un fin en sí mismo con vistas al cual se quieren los otros términos de la serie, que hay un fin en sí mismo con vistas al cual son queridos los términos de todas las series de medios o fines relativos); y un paralogismo en el que incurre Berkeley en el Segundo Diálogo entre Hilas y Filonús, para probar la existencia de Dios —aunque, en verdad, cabe señalar que ese sofisma berkeleyano es una versión idealista de una modalidad, igualmente falaz pero muy corriente en la filosofía medieval, del argumento cosmológico. El precaver contra la falacia fue ya efectuado por lógicos medievales, pero es el cálculo cuantificacional el que nos pone a cubierto contra la misma, dándonos el mejor instrumento para guardarnos de ella.

Por otro lado, hay que recalcar que un caso particular de una falacia es el confundir $\ulcorner \exists x B p \urcorner$ con $\ulcorner B \exists x p \urcorner$ —confusión acerca de la cual se habló ya al comienzo del cap. 16º de esta Sección. Porque el functor 'B', 'Es afirmable con verdad que', es similar a un cuantificador universal, ya que algo es afirmable con verdad ssi es verdadero o real en **todos** los aspectos de la realidad. El error de quienes infieren, de que sea afirmable con verdad que existe algo que p, que alguna cosa particular y determinada tiene que haber de la cual sea afirmable con verdad que p estriba en que no se percatan de que, para que algo sea afirmable con verdad, debe de tener lugar (ser verdadero, ser un hecho real), en uno u otro grado, en todos los aspectos de lo real; no basta con que sea verdad en algunos aspectos, por importantes que sean éstos —salvo cuando se sobreentiende, elípticamente prefijada a la frase que se esté profiriendo, un operador que restrinja lo dicho a cierto aspecto de lo real, y entonces lo que se está afirmando es únicamente que lo significado por la oración proferida es verdadero o tiene lugar en el aspecto de lo real aludido. El functor 'Es afirmable con verdad que' es, en eso, similar al operador 'siempre' (y, en verdad, en una lógica temporal correcta ha de valer el entrañamiento de «Siempre es verdad que p» por «Es afirmable con verdad que p», toda vez que los lapsos temporales son aspectos de lo real —aunque desde luego no todos los aspectos de lo real son lapsos temporales). Para que un aserto sea verdadero a secas, afirmable con verdad, ha de ser verdad siempre (salvo cuando, en virtud de ciertas normas pragmático-contextuales, se sobreentienda que lo que esté uno diciendo lo está diciendo como verdadero en o durante determinado período, mejor o peor delimitado). Pero de «Siempre hay algo que p» no se sigue forzosamente que haya algo de lo cual sea siempre verdad que p; p.ej., de que siempre haya alguna estrella existente (o sea: de que siempre sea verdad que hay algún ente, x, tal que x es una estrella y x existe) no se sigue que haya alguna estrella que siempre exista (e.d. que haya algún ente, x, tal que siempre sea verdad que x es una estrella y x existe). Así pues, de la verdad 'Hay alguna estrella existente' no cabe concluir que, para algún término ⌜k⌝, que denote a cierta estrella, haya de ser verdad 'k es una estrella existente'; esta última afirmación será sumamente falsa (puesto que entraña una superfalsedad, a saber que k sea siempre una estrella existente —cuando en verdad el grado de existencia de tal estrella habrá sido exiguo millones de años ha y volverá a ser exiguo en el futuro), salvo cuando, por alguna norma pragmático-contextual, estemos hablando de determinado período de tiempo, de cierto 'ahora'; en este caso, lo que se está vehiculando con tal prolación no es que k sea una estrella existente sino que k es ahora una estrella existente (un 'ahora' que puede que englobe millones de años, pero que no engloba todo el transcurso del tiempo). Pero ese comportamiento del operador 'siempre' en su relación con el cuantificador existencial no es sino un caso más de lo que estamos constatando y comentando en lo tocante a la relación entre dos cuantificadores, uno de ellos universal y el otro existencial, con diferentes variables, prefijados ambos a la misma fórmula: el no entrañamiento de ⌜∃x∀yp⌝ por ⌜∀y∃xp⌝ —salvo en casos particulares de ciertos ⌜p⌝s, debidos a motivos específicos, no a que sea correcto el esquema entrañativo en cuestión, que no lo es. Pues 'siempre' es comparable a 'en, o durante, todos los lapsos temporales', siendo así como un cuantificador universal con una variable cuyo campo de variación está formado por lapsos.

Aq351 ∀x,ypI∀y,xp

Prueba:

(2)	∀yp→p	Aq022, rinfq03
(3)	∀x2	(2), rinfq01
(4)	∀x,yp→∀xp	(3), Aq025
(5)	∀y4	(4), rinfq01
(6)	∀x,yp→∀y,xp	(5), Aq024, rinfq03
(7)	∀yAq022	Aq022, rinfq01
(8)	∀y,xp→∀yp	(7), Aq025, rinfq03
(9)	∀x8	(8), rinfq01
(22)	∀y,xp→∀x,yp	(9), Aq024
	Aq351	(22), (6), Aj

Aq351/1 pIp' (Donde ⌜p'⌝ es una fórmula que comienza por una retahila de cuantificadores universales y ⌜p⌝ sólo difiere de ⌜p'⌝ por el orden de esos cuantificadores)

La prueba es por inducción matemática. Hasta dos cuantificadores en ⌜p⌝, la prueba se obtiene por Aq351 + rinfq03 + rinfq02 así: Sean, supongamos, u y v las dos variables de esos cuantificadores (se prueba igual para cualesquiera otras). Supongamos que ⌜p⌝ contiene ocurrencias libres de x, de y, de u, de v. (De no suceder todo eso, la prueba resulta más fácil, en virtud de Aq040 y de rinfq03.) Introducimos dos nuevas variables, llamémoslas: z, z'. Sea ⌜p'⌝ el resultado de reemplazar uniformemente en ⌜p⌝ cada ocurrencia libre de x por una de z, cada ocurrencia libre de u por una de x, cada ocurrencia libre de y por una de z'; sea ⌜p^1⌝ el resultado de reemplazar uniformemente en ⌜p'⌝ cada ocurrencia libre de v por una de y; sea ⌜p^2⌝ el resultado de reemplazar en ⌜p^1⌝ cada ocurrencia libre de x por una de u; sea $\ulcorner p^3 \urcorner$ el resultado de reemplazar uniformemente en $\ulcorner p^2 \urcorner$ cada ocurrencia libre de y por una de v. Tendremos, pues:

	no contiene	sí contiene
p		x, y, u, v
		↓ ↓ ↓ ↓
p'	y, u	z z’ x v
		↓ ↓ ↓ ↓
p^1	v, u	z z’ x y
		↓ ↓ ↓ ↓
p^2	x, v	z z’ u y
		↓ ↓ ↓ ↓
p^3	x, y	z z’ u v

Por consiguiente, resulta:

$\ulcorner \forall x,yp^1 \urcorner$ es una variante alfabética de $\ulcorner \forall x,vp' \urcorner$

$\ulcorner \forall x,vp' \urcorner$ es una variante alfabética de $\ulcorner \forall u,vp^3 \urcorner$

Y, por lo tanto:

$\ulcorner \forall x,yp^1 \urcorner$ es una variante alfabética de $\ulcorner \forall u,vp^3 \urcorner$

Similarmente:

$\ulcorner \forall v,up^3 \urcorner$ es una variante alfabética de $\ulcorner \forall x,xp' \urcorner$

$\ulcorner \forall x,xp' \urcorner$ es una variante alfabética de $\ulcorner \forall y,xp^1 \urcorner$

De donde resulta que:

$\ulcorner \forall x,up^3 \urcorner$ es una variante alfabética de $\ulcorner \forall y,xp^1 \urcorner$

En virtud, pues, de Aq351, y de rinfq03, tenemos:

$\ulcorner \forall u,vp^3 I \forall v,up^3 \urcorner$

De donde, por rinfq02 (y dado que $\ulcorner p \urcorner$ sólo difiere de $\ulcorner p^3 \urcorner$ en que las ocurrencias libres de z en $\ulcorner p^3 \urcorner$ son reemplazadas por sendas ocurrencias libres de x, mientras que las ocurrencias libres de z’ en $\ulcorner p^3 \urcorner$ lo son por sendas ocurrencias libres de y), resulta:

$\forall u,vpI\forall v,up$ *Q.E.D.*

Ahora hay que probar que, si el esquema es válido hasta para n cuantificadores, también es válido para n+1.

Por hipótesis, $\ulcorner p \urcorner$ es el resultado de prefijar a cierta fórmula, $\ulcorner q \urcorner$, n+1 cuantificadores. Sea $\ulcorner p^1 \urcorner$ el resultado de amputar a $\ulcorner p \urcorner$ el cuantificador más a la izquierda; por hipótesis, si $\ulcorner p^2 \urcorner$ es como $\ulcorner p^1 \urcorner$ pero con el orden de cuantificadores alterado, tenemos:

(2) p^1Ip^2 (hipótesis de inducción)

Para cualquier variable, ‘u’ —pongamos por caso—, tendremos (y suponemos que ‘u’ es la variable del cuantificador más a la izquierda en $\ulcorner p \urcorner$):

(3) $pI\forall up^2$ (2), rinfq13 (puesto que $\ulcorner p\urcorner = \ulcorner\forall up^1\urcorner$)

Sea ahora $\ulcorner p^3\urcorner$ el resultado de alterar el orden de los cuantificadores en $\ulcorner\forall up^2\urcorner$ pero respetando el más a la derecha. Por la misma hipótesis de inducción se tiene:

(4) $\forall up^2Ip^3$

Y así, por pasos consecutivos, podemos ir reordenando los cuantificadores de $\ulcorner\forall up^2\urcorner$, sin necesidad de tomar otra precaución que dejar, en cada paso, quieto aquel cuantificador que en el paso anterior esté, ya sea más a la izquierda, ya sea más a la derecha. El resultado será una fórmula con los cuantificadores ordenados de cualquier manera que nos plazca; o sea: $\ulcorner p'\urcorner$. Luego, por (3), (4) y pasos sucesivos, alcanzamos finalmente:

pIp’ (*Q.E.D.*)

Aq352 ∃x∀yp→∀y∃xp

Prueba:

(2)	∀y(p→∃xp)	Aq020, rinfq01
(3)	∀yp→∀y∃xp	(2),Aq025,rinfq03
(4)	∀x3	(3), rinfq01
	Aq352	(4), Aq033

Aq353 ∃x,ypI∃y,xp

Prueba:

(2)	∀x,y(1•Np)I∀y,x(1•Np)	Aq351
(3)	Nσ2INδ2	(2), Aj
(4)	∃xN∀y(1•Np)IN∀y∀x(1•Np)	(3),Aq028
(5)	∃x∃ypIN∀y∀x(1•Np)	dfq1, (4)
(6)	∀x(1•Np)I.∀x1•∀xNp	Aq111
	σ6I.1•∀xNp	Aq040
	σ6I.1•N∃xp	Aq029
(7)	∀yσ6I∀yδ6	(6), rinfq13
(8)	N∀yσ6IN∀yδ6	(7), Aj
	σ8I∃y∃xp	dfq1
	σ8I∃y,xp	
	Aq353	(8), (5), Aj

Aq353/1 pIp’ (Donde $\ulcorner p'\urcorner$ es una fórmula que comienza por una retahila de cuantificadores existenciales y $\ulcorner p\urcorner$ sólo difiere de $\ulcorner p'\urcorner$ por el orden de esos cuantificadores).

La prueba es a partir de Aq353, por inducción matemática, similar a la de Aq351/1 a partir de Aq351.

Aq354 N∃x∀ypI∀x∃yNp

Prueba:

(2)	N∃x∀ypI∀xN∀yp	Aq029
	σ2I∀x∃yNp	Aq028, rinfq13

Aq355 N∀x∃ypI∃x∀yNp

Prueba:

(2)	N∀x∃ypI∃xN∃yp	Aq028

Aq356 ¬∃x∀ypI∀x∃y¬p

Prueba:

(2)	¬∃x∀ypI∀x¬∀yp	Aq046
	σ2I∀x∃y¬p	Aq047, rinfq13

Aq357 ¬∀x∃ypI∃x∀x¬p

Prueba:

(2)	¬∀x∃ypI∃x¬∃yp	Aq047

σ2I∃x∀yNp   Aq029, rinfq14   σ2I∃x∀y¬p   Aq046, rinfq14

Aq358 L∀x∃ypI∀x∃yLp (Prueba: Aq035, Aq045, rinfq13)

Aq359 L∃x∀ypI∃x∀yLp (Prueba: Aq035, Aq045, rinfq14)

Aq360 H∀x∃ypI∀x∃yHp (Prueba: Aq031, Aq044, rinfq13)

Aq361 H∃x∀ypI∃x∀yHp (Prueba: Aq031, Aq044, rinfq14)

Aq362 X∃x∀ypI∃x∀yXp∧.X∀x∃ypI∀x∃yXp (Prueba: Aq119, Aq120, rinfq13, rinfq14)

Aq363 K∃x∀ypI∃x∀yKp∧.K∀x∃ypI∀x∃yKp (Prueba: Aq121, Aq122, rinfq13, rinfq14)

Similarmente se prueban otros esquemas parecidos que vienen enumerados en la lista de esquemas teoremáticos aneja al presente libro.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 19º.— NUEVOS RESULTADOS GENERALIZADOS POR APLICACIÓN DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Llegamos al final de esta Sección. Aún nos queda —y lo voy a llevar a cabo en este capítulo— generalizar algunos de los resultados alcanzados, aplicando inducción matemática —como ya lo hice más arriba, en el cap. 17º (y también en el cap. 18º, en la prueba de Aq351/1).

Aq401 $\forall x,x^1,\ldots,x^n p\rightarrow q$ (Prueba: n+1 aplicaciones consecutivas de Aq022)

Aq402 $\forall x,x^1,\ldots,x^n p\rightarrow q$ (Si ⌜q⌝ es el resultado de reemplazar uniformemente en ⌜p⌝ cada ocurrencia libre de la variable ‘x’ por una ocurrencia libre de una variable cualquiera; cada ocurrencia libre de la variable ‘x^1’ por una ocurrencia libre de otra variable, no forzosamente diferente de la anterior y así sucesivamente)

(Prueba: n+1 aplicaciones consecutivas de rinfq02 sobre Aq401)

Aq403 $\exists x,x^1,\ldots,x^n(p[(x,x^1,\ldots,x^n)]\rightarrow q)\rightarrow.p\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^n q$

Prueba: Sea ⌜p⌝ una fórmula sin ocurrencia libre alguna de las variables: $x,x^1,\ldots,x^n$

(2) $\exists x^n(p\rightarrow q)\rightarrow.p\rightarrow\exists x^n q$ Aq042

(3) $\exists x^{n-1}\sigma 2\rightarrow\exists x^{n-1}\delta 2$ (2), rinfq12

$\sigma 3\rightarrow.p\rightarrow\exists x^{n-1},x^n q$ Aq042

y así sucesivamente (aplicando el mismo procedimiento n-1 veces más)

Aq404 $nq\backslash q\rightarrow.\exists x,x^1,\ldots,x^n(q\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^np\rightarrow.q\rightarrow p)$ (con tal que $\ulcorner q\urcorner$ no contenga ninguna ocurrencia libre de ninguna de las variables: $x,x^1,\ldots,x^n$)

Prueba:

(2)	$nq\backslash q\rightarrow.q\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^np\rightarrow\exists x(q\rightarrow\exists x^1,\ldots,x^nq)$	Aq067, Aj
(3)	$\sigma\delta2\supset.n\sigma\delta2\backslash\sigma\delta2$	Aj
	$\sigma3\supset.\sigma\delta2\rightarrow\delta\delta2\rightarrow\exists x(\sigma\delta2\rightarrow.q\rightarrow\exists x^1,\ldots,x^np)$	Aq067, Aj
(4)	$\neg\sigma\delta2\supset.\sigma\delta2\rightarrow\delta\delta2\rightarrow\exists x(\sigma\delta2\rightarrow.q\rightarrow\exists x^1,\ldots,x^np)$	Aq020, Aj
(5)	$\sigma2\rightarrow\exists x(q\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^np\rightarrow.q\rightarrow\exists x^1,\ldots,x^np)$	(3), (4), Aj, (2)
(6)	$\sigma2\rightarrow.q\rightarrow\exists x^1,\ldots,x^np\rightarrow\exists x^1(q\rightarrow\exists x^2,\ldots,x^np)$	Aq067, Aj
(7)	$\delta6\rightarrow.\sigma\delta2\rightarrow\sigma\delta6\rightarrow.\sigma\delta2\delta\delta6$	Aj
	$\sigma7\rightarrow.\forall x(\sigma\delta2\rightarrow\sigma\delta6\rightarrow.\sigma\delta2\rightarrow\delta\delta6)$	rinfq01, Aq024
	$\sigma7\rightarrow.\delta5\rightarrow\exists x(\sigma\delta2\rightarrow\delta\delta6)$	Aq034
(8)	$\sigma2\rightarrow.\delta5\rightarrow\delta\delta7$	(6), (7), Aj
(9)	$\sigma2\rightarrow\delta\delta7$	(8), (5), Aj
(22)	$\sigma\delta2\rightarrow\delta\delta6\rightarrow\exists x^1(\sigma\delta2\rightarrow.q\rightarrow\exists x^2,\ldots,x^np)$	(como por (3) y (4))
(23)	$\delta\delta7\rightarrow\exists x,x^1(\sigma\delta2\rightarrow.q\rightarrow\exists x^2,\ldots,x^np)$	(22), rinfq12
(24)	$\sigma2\rightarrow\delta23$	(9), (23), Aj
(25)	$\sigma2\rightarrow\exists x,x^1,x^2(q\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^np\rightarrow.q\rightarrow\exists x^3,\ldots,x^np)$	(a partir de (24), como (24) de (5))

Mediante n-2 pasos más llegamos a Aq404

Aq405 $q\backslash mq\rightarrow.\forall x,x^1,\ldots,x^np\rightarrow q\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^n(p\rightarrow q)$ (Con tal que no haya en $\ulcorner q\urcorner$ ocurrencia libre alguna de ninguna de las variables: $x,x^1,\ldots,x^n$)

La prueba es a partir de Aq068, parecida a la de Aq404 a partir de Aq067.

Aq406 $\exists x,x^1,\ldots,x^n(p\rightarrow q)\rightarrow.\forall x,x^1,\ldots,x^np\rightarrow q$ (Con tal que no haya en $\ulcorner q\urcorner$ ocurrencia libre alguna de ninguna de las variables: $x,x^1,\ldots,x^n$)

Prueba:

(2)	$\exists x,x^1,\ldots,x^n(p\rightarrow q)\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^{n-1}(\forall x^np\rightarrow q)$	Aq043, rinfq17, rinfq12
(3)	$\delta2\rightarrow\exists x,x^1,\ldots,x^{n-2}(\forall x^{n-1},x^np\rightarrow q)$	idem
(4)	$\sigma2\rightarrow\delta3$	(2), (3)

y mediante n-1 pasos más, similares al que conduce a (4) (pero en el último de los cuales ya no es menester aplicar la regla rinfq12), llegamos así a: Aq406.

Aq407 $\forall x,x^1,\ldots,x^n(p\rightarrow q)\rightarrow.\forall x,x^1,\ldots,x^np\rightarrow\forall x,x^1,\ldots,x^nq$

Prueba:

(2)	$\forall x^n(p\rightarrow q)\rightarrow.\forall x^np\rightarrow\forall x^nq$	Aq025, rinfq17

(3) $\forall x^{n-1}\delta 2\rightarrow.\forall x^{n-1},x^{n}p\rightarrow\forall x^{n-1},x^{n}q$ idem

(4) $\forall x^{n-1}\sigma 2\rightarrow\forall x^{n-1}\delta 2$ (2), rinfq11

$\sigma 4\rightarrow\delta 3$ (3)

Y así sucesivamente hasta llegar a Aq407

Aq408 $\forall x,x^{1},\ldots,x^{n}(pIq)\rightarrow.\forall x,x^{1},\ldots,x^{n}pI\forall x,x^{1},\ldots,x^{n}q$

Prueba similar, a partir de Aq026 en vez de Aq025

Parece ya baldío continuar generalizando resultados de esa índole. El procedimiento es siempre similar. Por ello, lo que haré en lo sucesivo será citar un esquema teoremático cualquiera de *Aq*, sobreentendiendo que cito la generalización del mismo obtenida por inducción matemática; y tal generalización consiste en que, dondequiera que, en el esquema, aparezca cierto cuantificador de determinado tipo (e.d., sea universal, sea existencial) con cierta variable, podemos entender que hay allí una retahila de n cuantificadores de ese mismo tipo con variables diferentes, con tal —eso sí— de que, por un lado, se aplique tal procedimiento uniformemente en todo el esquema (cada «retahila» de un solo cuantificador de determinado tipo con cierta variable es sustituida por la retahila en cuestión de n cuantificadores de ese mismo tipo con esas variables diferentes) y de que, por otro lado, las indicaciones entrecorchetadas sobre el figurar o no ocurrencias libres de la variable del cuantificador en determinadas subfórmulas de la fórmula o esquema total se entiendan ahora como referidas a todas esas n variables diferentes.

Así, p.ej., en lo sucesivo podremos leer el esquema Aq074 como si estuviera escrito así: $\exists x,x^{1},\ldots,x^{n}p\supset\forall x,x^{1},\ldots,x^{n}q\rightarrow\forall x,x^{1},\ldots,x^{n}(p\rightarrow q)$

Y, por otro lado, a tenor de un resultado generalizativo anteriormente alcanzado, entenderemos esas retahilas de tal manera que resulta indiferente cuáles sean las variables que figuren en sendos cuantificadores (con tal, por supuesto, de que se respeten los requisitos de uniformidad —tanto en los cuantificadores respectivos como en las indicaciones entrecorchetadas).

Por supuesto, no he brindado una prueba general de que sea legítimo proceder de esa manera para todos los esquemas teoremáticos. No hay tal prueba general: hay que probar la licitud del procedimiento caso por caso, para cada esquema teoremático. Sólo que esas diversas pruebas se ajustan a uno u otro de los patrones demostrativos que exhiben las pruebas que he expuesto hasta ahora en este capítulo. Así pues, el lector riguroso podrá llevar adelante, por sí mismo, en cada caso, la prueba de la generalización de cada esquema teoremático.

Para finalizar este capítulo, voy a probar dos esquemas de reemplazo de equivalentes estrictos y a derivar una regla de inferencia de reemplazo, todos ellos utilísimos para aplicaciones ulteriores del instrumental deductivo que nos brinda el sistema *Aq*.

Aq410 $\forall x,x^{1},\ldots,x^{n}(p=q)\rightarrow.r=s$ (Si $\ulcorner r\urcorner$ sólo difiere de $\ulcorner s\urcorner$ por el reemplazamiento de una ocurrencia de $\ulcorner q\urcorner$ en $\ulcorner s\urcorner$ por una ocurrencia de $\ulcorner p\urcorner$, no habiendo variable alguna respecto de la cual estén ligadas esas ocurrencias (la de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$, y la de $\ulcorner q\urcorner$ en s) a no ser una o varias de entre: $x,x^{1},\ldots,x^{n}$).

Prueba: Sean $\ulcorner p_0\urcorner$, $\ulcorner p_1\urcorner$, $\ulcorner p_2\urcorner$, …, $\ulcorner p_m\urcorner$ (donde $\ulcorner p_0\urcorner=\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner p_m\urcorner=\ulcorner r\urcorner$) las subfórmulas de $\ulcorner r\urcorner$, de longitud creciente, que contienen la ocurrencia en cuestión de $\ulcorner p\urcorner$; y sean $\ulcorner q_0\urcorner$, $\ulcorner q_1\urcorner$, …, $\ulcorner q_m\urcorner$ las correspondientes subfórmulas de $\ulcorner s\urcorner$, de longitud creciente, que contienen la ocurrencia en cuestión de $\ulcorner q\urcorner$ (siendo $\ulcorner q_0\urcorner=\ulcorner q\urcorner$ y $\ulcorner q_m\urcorner=\ulcorner s\urcorner$). Trátase de demostrar que, si es verdad (2), entonces también es verdad (3):

(2) $\forall x,x^{1},\ldots,x^{n}(p=q)\rightarrow.p_{i-1}=q_{i-1}$

(3) $\forall x,x^1,\ldots,x^n(p=q)\to.p_i=q_i$

Hay dos posibilidades: **Primer caso**: $\ulcorner p_{i-1}\urcorner$ está afectado en $\ulcorner p_i\urcorner$ únicamente por functores de *Aj*. Entonces, el tránsito de (2) a (3) es inmediato, en virtud de *Aj*. **Segundo caso**: $\ulcorner p_i\urcorner$ es el resultado de prefijar a $\ulcorner p_{i-1}\urcorner$ un cuantificador universal (que, obviamente, es el mismo que, prefijado a $\ulcorner q_{i-1}\urcorner$, da por resultado $\ulcorner q_i\urcorner$); este segundo caso se descompone en dos: 1º) si la variable del cuantificador no está libre ni en $\ulcorner p_{i-1}\urcorner$ ni en $\ulcorner q_{i-1}\urcorner$, el paso de (2) a (3) es inmediato en virtud de Aq040 y *Aj*; 2º) Si la variable del cuantificador está libre en $\ulcorner p_{i-1}\urcorner$ o en $\ulcorner q_{i-1}\urcorner$, entonces, o bien es una variable con ocurrencias libres en $\ulcorner p\urcorner$ o en $\ulcorner q\urcorner$ o no; si no, entonces es inmediato el tránsito de (2) a (3), aplicando primero sobre (2) rinfq01 y prefijando así a (2) un cuantificador con la variable en cuestión, y luego aplicando sobre el resultado de tal prefijación Aq024 (puesto que esa variable no tendrá ocurrencia libre alguna en la prótasis de (2), con lo que se obtiene una fórmula cuya prótasis es la de (2) y cuya apódosis es el resultado de prefijar a la apódosis de (2) el cuantificador en cuestión, la cual apódosis a su vez implica $\ulcorner p_i\urcorner=\ulcorner q_i\urcorner$ en virtud de Aq315; sólo queda, pues, el caso de que la variable del cuantificador que, al ser prefijado a $\ulcorner p_{i-1}\urcorner$, dé por resultado $\ulcorner p_i\urcorner$ —y, al serlo a $\ulcorner q_{i-1}\urcorner$, dé por resultado $\ulcorner q_i\urcorner$— sea una variable con ocurrencias libres en $\ulcorner p\urcorner$ o $\ulcorner q\urcorner$, y entonces habrá de ser una de las variables: $x,x^1,\ldots,x^n$; ahora bien, sea z esa variable; tendremos:

(4) $\forall z2$ (2), rinfq01

(5)	$\sigma2\to\forall z\delta2$	(4), Aq024
	$\sigma5\to.\forall zp_{i-1}=\forall zp_{i-1}$	Aq315
	$\sigma5\to.p_i=q_i$	*Q.E.D.*

Aq411 $\forall x,x^1,\ldots,x^n(p=q)\to.r=s$ (Si $\ulcorner r\urcorner$ sólo difiere de $\ulcorner s\urcorner$ por el reemplazamiento de un número finito, m, de ocurrencias de $\ulcorner q\urcorner$ en $\ulcorner s\urcorner$ por sendas ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$, no habiendo variable alguna respecto de la cual esté ligada alguna de esas ocurrencias (las de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$ y las de $\ulcorner q\urcorner$ en $\ulcorner s\urcorner$) a no ser: $x,x^1,\ldots,x^n$)

Prueba: Apliquemos inducción matemática. Por Aq410 sabemos que vale el esquema cuando el número de ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$ es 1. Voy a probar que, si vale para cierto número m de ocurrencias, vale también para m+1 ocurrencias. Supongamos que vale para m ocurrencias, e.d. que, siendo $\ulcorner t\urcorner$ una fórmula que difiere de $\ulcorner r\urcorner$ sólo por el reemplazamiento de m ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$ por m ocurrencias respectivas de $\ulcorner q\urcorner$ —respetándose la condición sobre ligazón de variables—, entonces es válido (2):

(2) $\forall x,x^1,\ldots,x^n(p=q)\to.r=t$

Hay que probar que, si $\ulcorner t'\urcorner$ difiere de $\ulcorner t\urcorner$ únicamente por el reemplazamiento de una ocurrencia de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner t\urcorner$ por una ocurrencia respectiva de $\ulcorner q\urcorner$, manteniéndose la condición sobre ligazón de variables, entonces es válido (3) si es que es válido (2) como hemos supuesto:

(3) $\forall x,x^1,\ldots,x^n(p=q)\to.r=t'$

La prueba es así:

(4)	$\forall x,x^1,\ldots,x^n(p=q)\to.t=t'$	Aq410
(5)	$\sigma4\to.\delta2\wedge\delta4$	(2), (4), Aj
	$\sigma5\to.r=t'$	Aj *Q.E.D.*

rinfq19 pIq $\vdash$ r=s (Si $\ulcorner r\urcorner$ sólo difiere de $\ulcorner s\urcorner$ por el reemplazamiento en $\ulcorner r\urcorner$ de m ocurrencias de $\ulcorner q\urcorner$ en $\ulcorner s\urcorner$ por sendas ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$)

Sean $x^1,\ldots,x^n$ las variables respecto de las cuales [una u otra de] esas ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$, de $\ulcorner q\urcorner$ en $\ulcorner s\urcorner$, esté[n] ligada[s] en $\ulcorner r\urcorner$ y en $\ulcorner s\urcorner$ respectivamente. Tendremos:

hip	pIq	hipótesis
(2)	p=q	hipótesis, Aj
(3)	$\forall x^1,\ldots,x^n(p=q)$	(2), rinfq01
	r=s	(3), Aq411

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 20º.— METATEOREMA DE LA DEDUCCIÓN PARA EL CÁLCULO CUANTIFICACIONAL *Aq*

Se va a demostrar en este capítulo el metateorema (fuerte) de la deducción —MD para abreviar—, similar al que se demostró en la Sección I —en dos versiones (la segunda con restricciones) para el cálculo sentencial *Aj*.

Empiezo por definir qué es **una deducción a partir de ciertas premisas**.

Sean $\ulcorner p_1 \urcorner$, $\ulcorner p_2 \urcorner$, …, $\ulcorner p_n \urcorner$, $\ulcorner q \urcorner$ fbfs de *Aq*. Una deducción de q a partir de (las premisas) $\ulcorner p_1 \urcorner$, $\ulcorner p_2 \urcorner$, …, $\ulcorner p_n \urcorner$ es una secuencia [finita] de fbfs de *Aq*, $\ulcorner r_1 \urcorner$, $\ulcorner r_2 \urcorner$,…, $\ulcorner r_n \urcorner$, con las siguientes características: cada una de las fbfs $\ulcorner r_i \urcorner$ (con ($1 \leq i \leq m$): o bien 1) es un teorema de *Aq*; o bien 2) es una de las premisas $\ulcorner p_1 \urcorner$, …, $\ulcorner p_n \urcorner$; o bien 3) es obtenida a partir de alguna otra fbf $\ulcorner r_j \urcorner$ (donde $1 \leq j \leq i$) por aplicación de rinfq01 (o sea: $\ulcorner r_i \urcorner$ es entonces el resultado de prefijar a $\ulcorner r_j \urcorner$ una secuencia finita de cuantificadores universales), pero con tal, sin embargo, de que ninguno de tales cuantificadores contenga una variable que tenga alguna ocurrencia libre en alguna de las n premisas $\ulcorner p_1 \urcorner$, …, $\ulcorner p_n \urcorner$; o bien 4) es obtenida a partir de una fbf $\ulcorner r_j \urcorner$ ($1 \leq j \leq i$) por aplicación de rinfq02 pero con tal, sin embargo, de que la variable que, en virtud del reemplazamiento, sea así sustituida por otra —con el paso de $\ulcorner r_j \urcorner$ a $\ulcorner r_i \urcorner$— no sea ninguna variable con alguna ocurrencia libre en alguna de las premisas $\ulcorner p_1 \urcorner$, …, $\ulcorner p_n \urcorner$; o bien 5) es obtenida a partir de una fbf $\ulcorner r_j \urcorner$ ($1 \leq j \leq i$) aplicando la regla de inferencia rinfq03 (la regla de variación alfabética); o bien 6) es obtenida a partir de dos fbfs $\ulcorner r_k \urcorner$ y $\ulcorner r_j \urcorner$ ($1 \leq k < i$, $1 \leq j < i$), donde $\ulcorner r_k = r_j = \supset r_i \urcorner$, aplicando rinf01, o sea: el *modus ponens*; y, además, $\ulcorner q_m = q \urcorner$.

El que exista alguna deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de las premisas $\ulcorner p_1 \urcorner$, …, $\ulcorner p_n \urcorner$ lo expresaremos así: $p_1,\ldots,p_n \models q$.

Demuéstrase ahora el MD:

MD Si $p_1,\ldots,p_n \models q$, entonces $p_1,\ldots,p_{n-1} \models p_n \supset q$

Prueba: Por inducción matemática. Sea $\ulcorner q_1 \urcorner$, $\ulcorner q_2 \urcorner$, …, $\ulcorner q_m \urcorner$ una deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1 \urcorner$, …, $\ulcorner p_n \urcorner$. Voy a demostrar que cabe construir una secuencia de fbfs condicionales $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ para cada i ($1 \leq i \leq m$) y que, insertando determinadas fbfs adicionales en número finito (≥ 0) entre cada dos de esas fórmulas condicionales, resulta una secuencia de fbfs que es una deducción de $\ulcorner p_n \supset q \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1 \urcorner$, …, $\ulcorner p_{n-1} \urcorner$.

La inducción matemática a aplicar consiste en probar que existen tales fbfs adicionales y que pueden ser determinadas con precisión caso por caso para ser colocadas entre cualesquiera dos fbfs condicionales $\ulcorner p_n \supset q_{i-1} \urcorner$ y $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ (con $1<i\leq m$), de tal manera que el resultado de todas esas colocaciones constituya la deducción deseada. (Obviamente no hay nada que colocar delante de $\ulcorner p_n \supset q_1 \urcorner$).

Tomemos una cualquiera de esas fbfs condicionales $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$, con $1<i\leq m$. Se dará uno de los siete casos siguientes: 1º) $\ulcorner q_i \urcorner$ es un teorema de *Aq*; entonces también lo es $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ y no hay nada que insertar. 2º) $\ulcorner q_i = p_n \urcorner$, con lo cual $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner = \ulcorner p_n \supset p_n \urcorner$, que es un teorema de *Aj* —y, por tanto, también de *Aq*; y tampoco hay nada que insertar. 3º) $\ulcorner q_i \urcorner$ es una de las premisas $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_{n-1} \urcorner$, llamémosla $\ulcorner p_j \urcorner$; entonces insertamos delante de $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ las fbfs $\ulcorner p_j \urcorner$, que es una de las premisas, y $\ulcorner p_j \supset .p_n \supset q_i \urcorner$, que es un teorema de *Aj* —por ende también de *Aq*—, de las cuales se infiere por *modus ponens* $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$. 4º) $\ulcorner q_i \urcorner$ había sido obtenido, en la deducción dada, por *modus ponens* a partir de dos fbfs anteriores de la secuencia dada, digamos $\ulcorner q_k$ y $\ulcorner q_j \urcorner$, donde $k<i$ y $j<i$, teniéndose que $\ulcorner q_j = q_k \supset q_i \urcorner$; entonces insertamos delante de $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ las dos fbfs $\ulcorner p_n \supset q_j \supset .p_n \supset q_k \supset .p_n \supset q_i \urcorner$ (que es un teorema de *Aj*) y $\ulcorner p_n \supset q_k \supset .p_n \supset q_i \urcorner$ (lo cual puede obtenerse por *modus ponens* a partir del par de fbfs constituido por $\ulcorner p_n \supset q_j \urcorner$ —que, siendo $j<i$, ya está dada en la nueva secuencia que estamos formando— y por la otra fbf que hemos insertado delante de $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$). 5º) $\ulcorner q_i \urcorner$ había sido obtenido, en la deducción dada, a partir de una fbf anterior en la secuencia dada, digamos $\ulcorner q_j \urcorner$, con $j<i$, por aplicación de rinfq01, pero respetándose la restricción de que ninguno de los cuantificadores prefijados a $\ulcorner q_j \urcorner$, al pasarse a $\ulcorner q_i \urcorner$, contenga una variable que aparezca con alguna ocurrencia libre en alguna de las premisas $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$; entonces, siendo $\ulcorner q_i \urcorner = \ulcorner \forall x,x^1,x^2,\ldots,q_j \urcorner$, colocamos delante de $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ las fbfs $\ulcorner \forall x,x^1,x^2\ldots(p_n \supset q_j) \urcorner$ (que se obtiene aplicando rinfq01, con la consabida restricción, a la fbf condicional $\ulcorner p_n \supset q_j \urcorner$, que ya tenemos en la secuencia que estamos formando, pues $j<i$) y $\ulcorner \forall x,x^1,x^2\ldots(p_n \supset q_j) \supset .p_n \supset q_i \urcorner$ (que —por carecer las variables $x,x^1,x^2,\ldots$, de ocurrencias libres en $\ulcorner p_n \urcorner$— es un teorema de *Aq*, una instancia de Aq069, una vez reinterpretado este esquema teoremático según la pauta indicada en el capítulo anterior), infiriendo así $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ de ese par de premisas por aplicación del *modus ponens*. 6º) $\ulcorner q_i \urcorner$ habíase obtenido, en la deducción dada, por aplicación de rinfq02 a una fbf $\ulcorner q_j \urcorner$ ($j<i$) pero sin que las variables sustituidas tuvieran ocurrencias libres en $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$; entonces la misma aplicación de rinfq02, con idéntica restricción, nos permite inferir $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_n \supset q_j \urcorner$ (que ya hemos introducido en la secuencia que estamos formando, pues $j<i$). 7º) $\ulcorner q_i \urcorner$ había sido obtenido en la deducción dada a partir de $\ulcorner q_j \urcorner$ (con $j<i$) aplicando rinfq03; entonces la misma aplicación nos permite inferir $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_n \supset q_j \urcorner$ (que ya tenemos en la secuencia que estamos formando al ser $j<i$).

Nótese el papel que desempeñan las dos restricciones que hemos estipulado en los casos 5º y 6º. En el 5º, de no ser por la restricción que se impone a la aplicación de la regla de generalización universal rinfq01, no podríamos obtener la conclusión $\ulcorner p_n \supset q_i \urcorner$, ya que a lo mejor alguna de las variables de los cuantificadores prefijados en $\ulcorner q_i \urcorner$ a $\ulcorner q_j \urcorner$ tendría ocurrencias libres en $\ulcorner p_n \urcorner$, con lo cual ya no podríamos aducir ningún teorema de *Aq* que legalizara la inferencia. Y en el caso 6º, si hubiera habido sustitución de alguna variable con ocurrencias libres en $\ulcorner p_n \urcorner$ en el paso de $\ulcorner q_j \urcorner$ a $\ulcorner q_i \urcorner$, entonces sería inválido el paso de $\ulcorner p_n \supset q_j \urcorner$ a $\ulcorner p_n \supset q_i$, pues no estaría autorizado ya tal paso por rinfq02 (dado que no todas las ocurrencias libres de la variable sustituida serían reemplazadas, en tal paso, por sendas ocurrencias libres de la nueva variable).

Un corolario inmediato de MD es el metateorema de teoremas condicionales, MTC, a saber:

MTC: Si $p_1,p_2,\ldots,p_n \models q$, entonces $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \supset q$ es un teorema de *Aq*.

Prueba: De la hipótesis $p_1,p_2,\ldots,p_n \models q$ conclúyese mediante una primera aplicación de MD, que: $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \models p_n \supset q$.

Por una segunda aplicación de MD conclúyese de ahí: $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \supset .p_n \supset q$

Y, por n-2 aplicaciones adicionales de MD, llegamos a $\models p_1 \supset .p_2 \supset . \ldots \supset .p_n \supset q$

Ahora bien, esto último significa que la fbf condicional recién obtenida se deduce de un conjunto vacío de premisas. Eso quiere decir que, sin necesidad de alegar o sentar premisa alguna, se deduce esa fórmula como conclusión; es, pues, una conclusión que no depende de premisa alguna que haya sido menester aducir. Y eso puede suceder sólo porque es un teorema (un teorema es una fbf que se deduce sin necesidad de sentar, para tal deducción, premisa alguna). Ahora aplicamos a ese teorema *Aj* y, así, inferimos a partir de él este otro teorema: $\ulcorner p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \supset q \urcorner$ *Q.E.D*

Ahora voy a probar que, si hay una deducción de un conjunto Δ de premisas a una conclusión, también la hay de un conjunto más amplio de premisas (de un conjunto que incluya a Δ) a la misma conclusión; llamemos a tal resultado: el Metateorema de la ampliación de premisas, MAP para abreviar:

MAP Si $p_1,\ldots,p_n \models q$, entonces $r_1,\ldots,r_m,p_1,\ldots,p_n \models q$

Prueba: Si una deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de las premisas $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$ no es una deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir del conjunto más amplio de premisas formado por $\ulcorner r_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_m \urcorner, \ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$, sólo puede ser porque: 1) o bien en alguno de los pasos inferenciales se aplique rinfq01 de manera que alguno de los cuantificadores prefijados contenga una variable que tenga alguna variable libre en alguna de las nuevas premisas $\ulcorner r_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_m \urcorner$; 2) o bien en alguno de tales pasos se aplique rinfq02 de tal manera que la variable sustituida tenga alguna ocurrencia libre en alguna de las nuevas premisas. Pero para subsanar eso hacemos lo siguiente. Sean $\ulcorner u_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner u_s \urcorner$ las variables con ocurrencias libres en $\ulcorner r_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_m \urcorner$ cada una de las cuales está involucrada en la deducción dada de uno u otro de los dos modos indicados. Sean $\ulcorner v_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner v_s \urcorner$ sendas variables sin ocurrencias ni en $\ulcorner r_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_m \urcorner$, ni en $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$ ni en la deducción dada de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$. Sustituimos uniformemente, a todo lo largo de la deducción dada, $\ulcorner u_1 \urcorner$ por $\ulcorner v_1 \urcorner$, $\ulcorner u_2 \urcorner$ por $\ulcorner v_2 \urcorner, \ldots, \ulcorner u_s \urcorner$ por $\ulcorner v_s \urcorner$. El resultado será una deducción de $\ulcorner q' \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1' \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n' \urcorner$, donde $\ulcorner q' \urcorner$ es el resultado de reemplazar uniformemente en $\ulcorner q \urcorner$ cada ocurrencia de $\ulcorner u_i \urcorner$ por una ocurrencia de $\ulcorner v_i \urcorner$ (para $1 \leq i \leq s$), y, para cada j tal que $1 \leq j \leq n$, $\ulcorner p_j' \urcorner$ difiere de $\ulcorner p_j \urcorner$ a lo sumo por una variación alfabética, o sea porque alguna cuantificación (alguna fórmula de la forma $\ulcorner \forall ur \urcorner$) que está presente en $\ulcorner p_j \urcorner$ esté reemplazada en $\ulcorner p_j' \urcorner$ por una variante alfabética de la misma. Pero obtenemos, para cada $\ulcorner p_j' \urcorner$, una deducción de $\ulcorner p_j' \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$ aplicando la regla de variación alfabética rinfq03; concatenando ahora esas n deducciones con la deducción —que hemos obtenido— de $\ulcorner q' \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1' \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n' \urcorner$, obtenemos una deducción de $\ulcorner q' \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$. De $\ulcorner q' \urcorner$ inferimos $\ulcorner q \urcorner$ mediante aplicaciones de rinfq02 y rinfq03, aplicaciones que no involucren variables que tengan ocurrencias libres en $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner, \ulcorner r_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_m \urcorner$. Concatenando la deducción obtenida de $\ulcorner q' \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$ con esta deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de $\ulcorner q' \urcorner$, resulta una **nueva** deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$. Y en esta nueva deducción no está involucrada ya ninguna de las variables que tuvieran ocurrencias libres en $\ulcorner r_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_m \urcorner$ sin tenerlas en $\ulcorner p_1, \ldots, \ulcorner p_m \urcorner$. Por lo cual, es una deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de $\ulcorner r_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_m \urcorner, \ulcorner q_1, \ldots, \ulcorner q_n \urcorner$. *Q.E.D.*

Entre los corolarios obtenibles de MD junto con MAP figuran:

Si $p_1,\ldots,p_n \models q$, entonces $p_1,\ldots,p_n \models r \supset q$

Si $p_1,\ldots,p_n \models q$, entonces $p_1,\ldots,p_n,r_1,\ldots,r_m \models r \supset q$

(con tal que, tanto en uno como en otro caso, $\ulcorner r \urcorner$ no contenga ocurrencias libres de alguna variable que haya estado involucrada en la deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de las premisas $\ulcorner p_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner$ de uno de los modos indicados).

Otro importante corolario es el Metateorema de la Instanciación Existencial, MIE para abreviar, a saber:

MIE: Sean $\ulcorner p_1 \urcorner, \ulcorner p_2 \urcorner, \ldots, \ulcorner p_n \urcorner, \ulcorner q \urcorner$ fbfs; y para cada i tal que $1 \leq i \leq n$ sea $\ulcorner p_i \urcorner$, el resultado de prefijar a $\ulcorner p_i \urcorner$ una ristra (finita) de cuantificadores existenciales cuyas variables tienen la doble característica de carecer de ocurrencias libres en cada fbf $\ulcorner p_j \urcorner$ cuando $j \neq i$ pero $1 \leq j \leq n$ y de carecer también de ocurrencias libres en $\ulcorner q \urcorner$. Entonces:

Si $p_1,p_2,\ldots,p_n \models q$, entonces $p_1',p_2',\ldots,p_n' \models q$

Prueba: Por MTC concluimos, a partir de la hipótesis (a saber: que $p_1,p_2,\ldots,p_n \models q$) que la siguiente fórmula es un teorema de *Aq*: $\ulcorner p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \supset q \urcorner$

Por aplicación de rinfq01 (de generalización universal) prefijamos ahora a esa fbf condicional con prótasis conyuntiva, recién obtenida, una ristra formada concatenando todos aquellos cuantificadores universales cada uno de los cuales está formado por el prefijo del cuantificador, '$\forall$', junto con una ocurrencia de una de las variables que aparecen en los respectivos cuantificadores existenciales cuyo prefijamiento diferencia a cada $\ulcorner p_i' \urcorner$ del respectivo $\ulcorner p_i \urcorner$. Sean $\ulcorner u_1 \urcorner$, …, $\ulcorner u_s \urcorner$ tales variables. Tendremos, pues: $\ulcorner \forall u_1 \forall u_2 \ldots \forall u_s(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \supset q \urcorner)$. De donde se infiere, por Aq070 (reinterpretado según las pautas del capítulo anterior): $\ulcorner \exists u_1 \exists u_2 \ldots \exists u_s(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \supset q \urcorner$ (ya que $\ulcorner u_1 \urcorner$, …, $\ulcorner u_s \urcorner$ carecen de ocurrencias libres en $\ulcorner q \urcorner$). Ahora, aplicando Aq058 (reinterpretado según las pautas del capítulo anterior) junto con rinfq14, inferimos a partir de ahí: $\ulcorner p_1' \wedge p_2' \wedge \ldots \wedge p_n' \supset q \urcorner$

Ahora bien, de las premisas $\ulcorner p_1' \urcorner$, $\ulcorner p_2' \urcorner$, …, $\ulcorner p_n' \urcorner$ se deduce la conclusión $\ulcorner p_1' \wedge p_2' \wedge \ldots \wedge p_n' \urcorner$ (pues basta con aplicar el *modus ponens* más la instancia correspondiente de un esquema teoremático elemental de *Aj*). La concatenación de esa deducción con el teorema $\ulcorner p_1' \wedge p_2' \wedge \ldots \wedge p_n' \supset q \urcorner$ engendra, pues, una deducción de $\ulcorner q \urcorner$ a partir de las premisas $\ulcorner p_1' \urcorner$, $\ulcorner p_2' \urcorner$, …, $\ulcorner p_n' \urcorner$ a tenor de la definición de **deducción** que se brindó al comienzo de este capítulo). *Q.E.D.*

Antes de cerrar este capítulo, conviene formular una observación sobre la noción de **deducción** (a partir de premisas) que hemos introducido. Esta noción es más restringida que la de inferencia, ya que no toda inferencia es una deducción, en el sentido de 'deducción' introducido en este capítulo. De $\ulcorner p \urcorner$ infiérese $\ulcorner Bp \urcorner$; pero —en el sentido técnico y peculiar que a la palabra 'deducción' le estamos dando en este contexto— no hay una deducción de $\ulcorner Bp \urcorner$ a partir de $\ulcorner p \urcorner$, ya que ese paso inferencial es una aplicación de la regla de afirmabilidad y, por ello, no es de ninguno de los tipos de pasos inferenciales autorizados por las cláusulas 1) a 6) enunciadas al comienzo de este capítulo para que quepa denominar 'deducción' a la inferencia constituida por tal serie de pasos inferenciales. Por eso he utilizado un «torniquete» con raya horizontal doble, en vez de simple, para señalar a las deducciones como inferencias de una índole particular. Esa índole es la de estar asociadas con el functor condicional, o sea: ser tales que se puede deducir una conclusión de ciertas premisas ssi es teoremática la fórmula condicional cuya prótasis es la conyunción de las premisas y cuya apódosis es la conclusión.

Recapitulando los principales resultados obtenidos en este capítulo, éstos son:

MD: Metateorema de la deducción.

MTC: Metateorema de los teoremas condicionales.

MAP: Metateorema de la ampliación de premisas.

MIE: Metateorema de la instanciación existencial.

SECCIÓN III

EL SISTEMA DE TEORÍA DE CÚMULOS $\mathcal{CD}$

Capítulo 1º.— CONSIDERACIONES PRELIMINARES

La **teoría de conjuntos** constituye hoy un estudio que incluye muchos componentes, desde la teoría ingenua de conjuntos que se imparte ya en estadios tempraneros del ciclo educativo hasta los complejos desarrollos de ciertas teorías axiomáticas de conjuntos, sobre todo las del racimo de teorías que se agrupan en torno a ZF (la teoría de Zermelo-Fraenkel), la cual cuenta hoy con aceptación mayoritaria entre los matemáticos como base de buena parte de las construcciones de dicha disciplina.

Según lo hemos visto en las dos secciones precedentes de este libro, ocúpase el cálculo sentencial de verdades en las que sólo figuran con ocurrencias esenciales los functores 'o', 'y', 'no', 'totalmente', 'un sí es no', 'más que', 'relativamente', etc.; a esos signos añade el vocabulario del cálculo cuantificacional la palabra 'todos' (o bien 'algunos'). El cálculo de clases (o teoría de conjuntos) es una extensión del cuantificacional que añade a ese vocabulario el verbo '**abarcar**'. Son verdades de la teoría de conjuntos sólo todas las que se expresan mediante enunciados en los que únicamente tienen ocurrencias esenciales las palabras del cálculo cuantificacional o el verbo 'abarcar'.

No pocos estudiosos hoy día sostienen que la teoría de conjuntos no forma parte de la 'lógica'. No discutiré aquí los motivos de su posición, debatibles (a mi juicio desacertados), mas no baladíes. El asunto no me parece de mucha monta (poco más que disputa verbal).

En cambio, preferiré yo hablar de **cúmulos** más que de conjuntos. Por varios motivos. Uno de ellos (el principal) es que muchos matemáticos juzgan que sólo son conjuntos —si los hay— entes que sean como los pintan las teorías de conjuntos estándar, como ZF y similares. Y para no disputar acerca de eso, prefiero concederles lo que quieren, empleando otro término para denotar a los entes estudiados en mi propia teoría. Sin embargo, en la parte histórica de esta sección hemos de usar el vocablo 'conjunto', ya que es el que se ha venido manejando. No es inverosímil, después de todo, que se haya bifurcado hoy en dos ramas (una, la que supuestamente monopolizaría los «conjuntos» dizque propiamente dichos; otra, la teoría de **cúmulos**, como la aquí propuesta) el género de investigaciones que, de Frege y Cantor para acá, han discurrido en torno a todo eso.

Para algunos, la **teoría de conjuntos** (o de cúmulos) es algo de lo que se ocupa el matemático y que parece no tener otro interés que el de prestar elegancia, o algún género de «cimentación», a diversas ramas del estudio matemático. Pero ¿qué cosa[s] estudia la matemática? ¿De qué se ocupa el matemático? ¿Acaso de objetos del «segundo grado de abstracción» de que hablaban los aristotélico-tomistas? Quien esté dispuesto a apencar con toda la carga teórica (metafísica y epistemológica) que conlleva esa postulación de los tres grados de «abstracción», bien: ¡que lo haga! Pero que nadie se llame a engaño. Sin esa concepción, u otra parecida, perfílanse tan sólo tres opciones: la del nominalismo, en sus variantes de formalismo u otras; la del realismo; y la del constructivismo. Que es la segunda la más satisfactoria no resulta palmario sin más, pero sí constituye una tesis plausible, que parece contar con el respaldo —pese a todo— de la mayoría de los filósofos de la matemática. En todo caso, a ella se adhiere ardientemente el autor del presente libro, quien ha tratado de defenderla en diversos lugares.

Si se acepta el realismo, entonces el matemático estudia entes reales. ¿Cuáles? ¿Cosas de un mundo «ideal», en el sentido de constituir un «cielo» ajeno al ámbito de lo espacio-temporal? ¿O más bien se ocupa el matemático de propiedades generales de lo real? Husserl, Frege, Russell y Gödel titubearon entre ambas alternativas —o más bien abrazaron ambas simultáneamente. La matemática sería a la vez ontología general («formal» según Husserl) y una cierta ontología regional.[3]

Existan o no esos mundos ideales, es lo cierto —según cualquier enfoque realista— que la matemática se ocupa (al menos también) de lo real en general, aunque desde luego únicamente en algunos de sus rasgos. Y, haciéndolo, sólo desarrolla un estudio que, en sus grandes líneas, pertenece a la metafísica: qué géneros de entes existen; cómo y cuál es el habérselas unos con otros. Tal es el punto de vista tanto de Quine (con algunas inconsecuencias debidas a su larvado pragmatismo de sesgo idealista) cuanto del autor de estas páginas. Desde ese planteamiento, asentar una teoría de conjuntos es a la vez brindar una base de axiomatización indispensable para cualquier teoría científica y formular una doctrina metafísica sobre la realidad. Es más: cada uno de los grandes temas de la metafísica tradicional (a diferencia, eso sí, de [muchos de] los tópicos del pensamiento eurocontinental contemporáneo) puede tratarse, ventajosamente, como un problema de [fundamentación de] teoría de conjuntos. La ventaja estriba en claridad y rigor. Desde ese ángulo, examino primero las razones que abonan a favor de una serie de teorías de conjuntos alternativas. En los primeros capítulos estudio la teoría russelliana de tipos, en sus dos variantes de ramificada y simple, mostrando la superioridad relativa de la primera de ellas; pero a la vez critico ambas. En capítulos posteriores de la Sección muestro cómo, en ese transfondo, resultan fructíferas y plausibles las teorías de Quine, y, a renglón seguido, esbozo los grandes rasgos de una alternativa paraconsistente y combinatoria. No trato en esta Sección de la teoría estándar de conjuntos (ZF u otras variantes) por ocuparme de ella en [P15].[4]

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 2º.— LA TEORÍA DE TIPOS DE FREGE

Agrúpanse los historiadores de la teoría de conjuntos en dos grandes pelotones, según sean más bien matemáticas o más bien filosóficas sus inclinaciones —o su formación y su vinculación profesional. Atribuirán los primeros a Cantor casi toda la paternidad de la teoría de conjuntos; los segundos a Frege. Dejando de lado esos problemas —y sin desconocer que, cualquiera que fuese la

3 Aunque este debate versa sobre la naturaleza y objeto de la matemática, en la medida en que se reconozca alguna versión —por tenue que sea— del «logicismo» a cuyo tenor la matemática se reduce a «lógica» —en un sentido desde luego amplio de 'lógica', que incluye la teoría de conjuntos—, lo que está en discusión es la naturaleza misma de la lógica. Es curioso que Rescher, en el cap. 3 de [R1] (pp.213ss) sitúa como únicas alternativas en este punto: el absolutismo platónico entendido como la tesis de que la lógica es una ontología regional; el absolutismo psicologista; y diversas variantes del relativismo, todas las cuales rechazarían la naturaleza ontológica de la lógica. Sin embargo, F. Gonseth defendió la tesis de que *la logique est la physique de l'objet quelconque*; tesis que, además de hallar mucho apoyo en textos y argumentos de Frege, Russell, Husserl, Gödel y Quine, goza de los más hondos y sólidos motivos para solicitar nuestra aquiescencia; a favor de ella he argüido ya en diversos trabajos; conque no deseo aquí repetirme.

4 Sin embargo, ya de entrada, he de puntualizar que no comparto el entusiasmo por ZF —la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, a la que he aludido al comienzo de este cap.—, tan ampliamente mayoritario entre los matemáticos y creciente —aunque espero que todavía minoritario— entre los filósofos de la matemática. No sólo hay que constatar (lamentar diría yo, para ser sincero) que hasta exdiscípulos de Quine, como Hao Wang, manifiesten preferencias hacia ZF, al menos por sobre las teorías de conjuntos de Quine (aunque vide infra (nª 26)), sino que el propio Quine parece en sus últimos trabajos filosóficos retirar su aquiescencia a sus propias teorías de conjuntos para inclinarse hacia la teoría estándar. Es equivocado, a mi entender, adjudicar a la teoría estándar una motivación filosófica más genuina o defendible que a las teorías de Quine. De hecho sucede lo contrario: la teoría estándar sólo parece justificarse con una concepción de los conjuntos como la llamada iterativa. Pero ésta es un híbrido, o un engendro bastardo: un equilibrio inestable entre la concepción constructivista, articulada en la teoría ramificada de tipos, y la meramente enumerativa, finitista. Lejos de constituir esa concepción iterativa un enfoque filosófico «intuitivo», previo a la axiomatización de ZF, paréceme a mi un apaño artificial, *ex post facto*, forjado *ad hoc* para aureolar a ZF con los oropeles de una supuesta motivación independiente del mero constituir una manera taimada de obviar las paradojas. (El cap. 1º de la Sección IV del presente libro vendrá consagrado a debatir sólo una de las dificultades de esa teoría estándar de conjuntos, a saber: la suscitada por el principio llamado de buena fundación.)

atención con la que Cantor siguió la obra de Frege, Frege apreció mucho la labor de Cantor—,[5] el hecho es que a principios de siglo encontrábase ya la teoría de conjuntos, a poco de nacer, en plena crisis: en efecto tanto en la teoría de conjuntos ingenua de Cantor cuanto en la axiomatizada de Frege presuponíase o postulábase un **principio de abstracción** (también llamado **principio de concreción**), [PA], según el cual, para cualquier descripción o matriz, ⌜p⌝, que contenga una variable libre, ⌜x⌝, el conjunto λxp —el de las cosas que p— abarca a un elemento cualquiera, e, ssi es verdadero el resultado de reemplazar uniformemente en ⌜p⌝ cada ocurrencia libre de ⌜x⌝ por una de ⌜e⌝ —e. d. por una de un término cualquiera que denote a e. Dedujéronse de ahí las célebres paradojas conjuntuales, como: la de Russell (el conjunto de cuantos conjuntos no se abarcan a sí mismos se abarca a sí mismo ssi no lo hace —de donde, a su vez, sale esta consecuencia: que se abarca y no se abarca a sí mismo);[6] las de Cantor, Burali-Forti y otras más.

Viose inmediatamente la necesidad de restringir, mediante una axiomatización adecuada, los asertos de la teoría de conjuntos, aunque algunos de tales asertos por sacrificar fueran muy «intuitivos», como sin duda parecía serlo el irrestricto principio de abstracción. Exploráronse dos vías. Una fue la del propio Frege en la reelaboración de su sistema; aunque falló su intento, por ese género de sendero se encaminó Zermelo cuya tentativa sí fue coronada por el éxito (si bien, según lo veremos más abajo, la reelaboración fregeana en un punto crucial se parece más a la teoría de conjuntos ML de Quine). La otra vía fue abierta por Russell.

En la teoría de Frege, como en la de Russell, desnivélanse las entidades categorialmente —siguiendo una tradición que se remonta a Aristóteles. Quiere eso decir que no existe ninguna propiedad común a todas las cosas, ni siquiera la de existir. Antes bien ‘existir’ deja de ser unívoco: en una acepción se predica de entes de un cierto nivel categorial, p.ej. individuos (si los hay) —o sea entes del nivel más bajo; en otra acepción de propiedades de tales entes; en otra de propiedades de tales propiedades; y así sucesivamente. Complícase el asunto cuando tomamos en cuenta, además de las

5 El libro de Cantor sobre teoría de conjuntos, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* apareció en 1883. Al año siguiente venia publicado el de Frege, *Grundlagen der Arithmetik* —evidentemente escrito a lo largo de una serie de años anteriores. En su libro desarrolla Frege, ya claramente, los principios básicos de su teoría de conjuntos, que luego ampliará y desmenuzará en los *Grundgesetze der Arithmetik* (2 vols, 1893 y 1903 respectivamente). Ya en una reseña —aparecida en 1892— de otro libro anterior de Cantor, referíase Frege a la concepción cantoriana de conjunto, aunque la criticaba por oscura, si bien veía en ella un anticipo de la suya propia. (Vide [P1], p.266, n.4 —y passim— sobre la concepción fregeana de extensión.) En los *Grundlagen* expresa Frege su cálido aprecio de la obra de Cantor, manifestando que las divergencias entre ambos en torno a la naturaleza de los números son meramente terminológicas. Sobre eso cf. [K1], pp.443ss. Acerca de las paradojas de la teoría de conjuntos vide ibid., pp.652ss. Cantor fue quien descubrió la primera paradoja, la de Burali-Forti, asi llamada porque fue expuesta al público por vez primera en un trabajo de 1897 de ese autor italiano: es la de que el número ordinal correspondiente al conjunto de todos los ordinales habría de ser más pequeño que sí mismo. En 1899 descubrió Cantor la paradoja (de Cantor) del conjunto de todos los conjuntos, el cual, a tenor del teorema de Cantor según el cual cualquier conjunto es menor que la clase de sus subcconjuntos, habría de ser menor que sí mismo. La noción fregeana de **extensión** de un «concepto» —que, en la acepción que Frege le da a la palabra, es una propiedad objetivamente existente— es, en verdad, la de conjunto o clase; llámala también Frege curso o recorrido de valores (aunque algunos intérpretes prefieren entender el curso de valores como un conjunto de pares ordenados, cada uno de los cuales tendría como segundo miembro a la Verdad o a la Falsedad según que el primer miembro perteneciera o no a la clase dada; e.d. una función característica de esa clase; pero esa diferencia es desdeñable en el contexto extensionalista fregeano). Sucede, empero, que — según lo señala T. Parsons en ([P1], pp.266ss— Frege llevó a cabo una denodada lucha contra una concepción de los conjuntos, a saber aquella que los ve como «agregados», entes cuya entidad estribaría en la de sus miembros, viniendo éstos «dados» con prioridad [respecto a los conjuntos]; sin duda cabe ver en esa concepción —representada por Dedekind— un precedente de la teoría iterativa de conjuntos, o sea una como la ZF. Frente a tal punto de vista, el de Frege es que los conjuntos son secundarios respecto a las propiedades de las cuales son respectivas extensiones. En la crisis de su pensamiento que siguió al descubrimiento de la paradoja russelliana llegó paulatinamente Frege al convencimiento de que no cabe siempre postular extensiones de conceptos, o no en el sentido originariamente supuesto, pues a dos propiedades diversas puede corresponderles una sola extensión que sea el conjunto de objetos que caigan bajo una sola de las dos y no bajo la otra —a pesar de lo cual puede lícitamente llamarse a ese conjunto también ‘la extensión’ de la otra propiedad; de donde poco a poco resultó un cierto abandono de los conjuntos o extensiones. (Vide [P1], loc. cit.) Vide infra, los últimos caps. de la presente sección.

6 Russell descubrió su famosa paradoja en junio de 1901, cuando estaba acabando de escribir sus *Principles of Mathematics*. Se esforzó por entonces en vano por resolverla. En junio de 1902 escribió a Frege comunicándole su descubrimiento; a vuelta de correo contestó el gran lógico y filósofo alemán, reconociendo que con el descubrimiento de Russell se tambaleaba desde sus cimientos la obra de toda su vida. Frege amañó apresuradamente unas reparaciones tentativas a su sistema para obviar la contradicción (vide infra, cap. 11º de esta Sección); con tales reparaciones apareció el 2º volumen de los *Grundgesetze der Arithmetik* fregeanos, en 1903. Por su parte, Russell pergeñó una solución, también tentativa, en s*us Principles*, publicados el mismo año. Siguieron intentos por parte de Russell, quien consagró largos meses, de abril de 1904 a enero de 1905, a forcejear o «fuñar» con papel y lápiz. En la primavera de 1905 se le ocurrió a Russell su teoría de descripciones, por la cual el artículo determinado ‘el’ venía eliminado, al parafrasearse convenientemente una oración que lo contuviera; de suerte que una descripción definida, «el tal o cual», venía a ser considerada como un símbolo incompleto. Con ese instrumento conceptual más una sugerencia de Poincaré, en 1905, elaboró Russell su solución, la teoría **ramificada** de tipos, en 1907. Vino expuesta en los *Principia Mathematica*, que escribió con Whitehead, en 1910. El cap. II de la Introducción (pp.37ss de [W3]) sigue constituyendo una lectura fundamental para una comprensión de la teoría de tipos y de sus motivaciones filosóficas, muy aristotélicas por cierto. Un examen de tales motivaciones y su articulación técnica de lo más interesante es éste de Nino Cocchiarella: «The Development of the Theory of Logical Types and the Notion of a Logical Subject in Russell’s Early Philosophy», *Synthese* 45/1 (sept. 1980), pp.71-115. (No puedo entrar a discutir aquí las ideas expuestas en ese trabajo.) Una bella exposición de la solución russelliana, la teoría ramificada de tipos, hállase en Alonzo Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton U.P., 1956, pp. 346ss.

propiedades, las relaciones. Para entes de cualesquiera niveles, n_0, n_1, n_2,…, n_i, siendo i≥0 (cada nivel n_j de ésos será ≥0), habrá entes (relacionales) de nivel <n_1, …, n_i>, de tal modo que, para cualquier nivel j, <j>=j+1. Partiendo de tales supuestos —que en el fondo son ya la teoría de tipos— ¿cómo es que surgía en la teoría de Frege la apuntada contradicción? Porque, a la vez, para cada propiedad («concepto» en la terminología de Frege) postulábase en esa teoría la existencia de la extensión de esa propiedad, o sea de la clase de entes que caen bajo el concepto (propiedad) en cuestión; y se reconoce una propiedad relacional de abarque, la cual, cuando liga a dos entes, son éstos del mismo nivel, a saber: individuos («objetos» en la terminología de Frege) tales que el primero ha de ser la extensión de algún concepto. Pero entonces piérdese en las «proyecciones» o «sombras» de esos entes de categorías u órdenes superiores a cero —sendas «extensiones» suyas, las clases o conjuntos— aquello que se había ganado con el desnivelamiento categorial. Carecerá de sentido decir que una propiedad cae o no bajo sí misma, pero no carecerá de sentido decir que una clase se abarca a sí misma.

Conviene, antes de seguir, entender un poco mejor el fondo de esa problemática en la concepción de Frege. Hay diversas razones para postular un desnivelamiento categorial (y otras para no hacerlo); pero en los argumentos de Frege fue decisiva ésta: que, de no hacerse tal desnivelamiento, entonces ni en la realidad podrían las cosas ligarse o relacionarse ni en nuestro lenguaje habría conexidad, estructura, un aglutinante, algo que haga de una ristra de signos un signo analizable. En efecto: si, p.ej., todas las palabras fueran verbos, o todas nombres, no podrían formar juntas oraciones, ni en general expresiones complejas; si la realidad fuera un conglomerado de objetos nada más, habría en ella este objeto más aquel, pero nada que hiciera de ellos **juntos** un algo, o que hiciera que, dados uno o varios objetos, resultara de ese «darse» los mismos un *tertium quid*; puesto que, en efecto, sólo tendríamos un objeto, otro, otro; de añadirse objetos adicionales a título de aglutinantes, nada aglutinarían, sino que vendrían sólo a interponerse como más objetos. Así pues, el mismo problema se plantea en el lenguaje y en la realidad —paralelismo óntico-lingüístico. La solución es el desnivelamiento: entre categorías ontológicas (objetos vs funciones —las propiedades o conceptos son aquellas funciones que toman como valores sólo valores veritativos); y entre categorías lingüísticas (expresiones completas vs incompletas —entre éstas las locuciones predicativas o verbales). Sin embargo, hay razones para postular —y así lo hace Frege, según hemos visto— también extensiones de conceptos; entre otras, el mero hecho de que a veces tenemos que nominalizar verbos, siendo así el resultado una locución nominal que —si es correcta nuestra argumentación— no puede denotar a un concepto, sino sólo a un objeto. En 'Balduino reina', el verbo denota a una función, pero en 'El reinar es cada vez más infrecuente' el infinitivo sustantivado no puede hacerlo: denotará a la extensión de ese concepto, la cual tendrá esa propiedad de ser cada vez más infrecuente. Entre objetos no puede haber, por definición, desnivelamiento categorial. De ahí la antinomia.

Al serle comunicada ésta por Russell, trató Frege de recomponer su sistema de una manera a la que más abajo me referiré (en el capítulo 11º), al examinar el estudio que hace Quine de la misma. No fue coronado ese intento por el éxito. Frege, al parecer, no volvió a intentar una reelaboración de su sistema formal. Algunos autores (p.ej. Thiel en [T1], pp.263-4) juzgan que el reo debería de ser el platonismo de Frege, e.d. su realismo u ontologismo, su postulación de clases o extensiones; habría debido de abstenerse al menos de postular extensiones conceptuales correspondientes a expresiones nominales que sólo cobran existencia como resultado de su propia escritura conceptográfica. El problema está en que no es eso tan fácil de hacer. O bien se renuncia al realismo —pero entonces desvanécese también el recién evocado motivo para hablar de un desnivelamiento categorial ontológico, haciéndose así el sintáctico bastante enigmático e inexplicable—, o bien resultará *ad hoc* la restricción que sugiere Thiel —aparte de que, desde luego, la antinomia de Russell es formulable perfectamente en román paladino.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 3º.— EL FONDO CONSTRUCTIVISTA DE LA TEORÍA RUSSELLIANA

Fracasado el intento de Frege, tócale el turno a Russell. Éste se basó en la sugerencia de Poincaré.[7] ¿Qué es lo común a las contradicciones suscitadas en teoría de conjuntos, y también a las semánticas como la de Richard, p.ej., u otras de esa índole? Pues, ni más ni menos, que el que de algún modo introducen en su especificación un cuantificador, un 'todos', tal, sin embargo, que la entidad especificada por la expresión global —si existe— tendría que ser uno de esos todos a los que se alude en su especificación; debería tal entidad estar en el campo de variación de la variable del cuantificador. Ahora bien, para Poincaré los conjuntos no son entidades independientes de nuestra construcción, sino «algos» que vienen constituidos o cobran realidad precisamente en el proceso mismo de ser pensados.[8] (Su enfoque es idealista, constructivista, operacionalista —y en parte de raíz kantiana, como todo un anchuroso sector del pensamiento francés.) Conque, no existiendo de antemano, no puede cuantificarse sobre «ellos» cuando todavía no hayan cobrado realidad. El 'hay' del cuantificador existencial ha de equivaler a 'ya hay', no a 'hubo, hay o habrá', si en esta última conyunción el 'hay' está en presente temporal; y desde el punto de vista idealista-constructivista no cabe un presente atemporal, pues sería un presente más allá de ser presente-para-mí-ahora, presente para mi presente capacidad cognoscitiva o constructiva-mental. Y el cuantificador universal, 'todo', equivale a 'No hay nada que no sea tal que'. Por consiguiente, hemos de entender 'hay un conjunto tal que' o 'todo conjunto es tal que' así, respectivamente: 'ya hemos construido un conjunto tal que' y 'todo conjunto que hemos ya construido es tal que'. Así pues, evidentemente, un conjunto por definir —o sea por construir— no puede ser uno de esos conjuntos ya construidos.

Para Poincaré todas las paradojas envolvían una **falacia de círculo vicioso**, un hacer caer la entidad todavía por construir en el campo de variación de las variables utilizadas en su construcción —o sea tomarla como una de «todas las entidades» así o asá con referencia a la totalidad de las cuales venía definida la nueva entidad. Así, «la clase de cuantas clases no se abarcan a sí mismas»: «cuantas» o «todas las» no ha de tener como campo de variación uno que contenga a algo todavía no existente hasta que se haya dado la definición; y, sin embargo, para que sea posible esa definición, sí tiene esa misma entidad que estar en tal campo de variación. Similarmente, paradojas semánticas como la de Berry: el menor número natural no especificable en español con menos de 14 palabras resulta ser (compruébelo el lector, contando el número de palabras que forman lo que acabo de escribir) un número natural, sea el que fuere, especificable en español con 13 palabras; contradicción (aparente al menos). Similarmente, la paradoja de Richard: tomemos los sintagmas del castellano [escrito] ordenados de tal modo que uno preceda a otro siempre que tenga menos letras, mientras que cuando tengan el mismo número, cuente el orden lexicográfico; eliminemos cuantos sintagmas no denoten a decimales en el intervalo entre 0 y 1. Con esos instrumentos cabe ordenar a los decimales recién aludidos, según el orden de los sintagmas. Para cada uno de esos decimales tenemos que, en su expresión decimal completa, son de la forma $\ulcorner ,e_1,e_2,\ldots \urcorner$ y cada uno de esos e_i es un guarismo. Para un decimal d, i_d será su iº guarismo ($1\leq i$). Definamos ahora: «Aquel decimal que difiere, para cada i, del iº decimal [en el orden recién brindado] en que, si el iº guarismo de éste es $j<9$, $i_d=j+1$; y si es $=9$, $i_d=1$». Es fácil comprobar que ese número decimal es uno que cabe denotar en castellano con un sintagma finito; y que,

7 Vide [K1], pp. 654ss. En sus *Principles of Mathematics* (1903; vide reimpr. (1979), de la 2ª ed., de 1937: Londres: Allen & Unwin, pp. 522ss), tras comentar escueta pero aprobatoriamente la solución de Frege, desarrolla Russell, en el Apéndice B, el primer esbozo de su teoría de tipos; pero —según lo reconoce la Introducción de la 2ª edición— falta ahí todavía la idea central de la solución definitiva, e.e. de la teoría ramificada de tipos: el principio [de exclusión] del círculo vicioso.

8 Ya se aludió en la nª 6 a la determinante influencia, al respecto, de Poincaré en el pensamiento de Russell. Una exposición bien detallada (y, precisamente, en un marco idóneo para la presente discusión) de la filosofía matemática de Poincaré es el cap. IV (pp.138ss) de [C2]. Otras dos exposiciones de útil consulta: J.J.A. Mooij, *La philosophie des mathématiques* de Henri Poincaré (París: Gauthier-Villars, 1966); y Javier de Lorenzo, *La filosofía de la matemática de Poincaré* (Madrid: Tecnos, 1974, pp.107ss, 332ss).

no obstante, es diverso de todos y cada uno de los que cabe denotar en castellano así; diverso, pues, de sí mismo. ¡Contradicción!

El fallo para Poincaré —que se guía en esa solución por el propio Richard— es el ya apuntado: la **impredicatividad**, el círculo vicioso. Russell le da la razón. Tanto más cuanto que esa restricción en la manera de entender los cuantificadores se compagina bien con el propio escrúpulo aristotélico sobre las condiciones de sentido de la predicación, e.d. la motivación filosófico-lingüística del principio de desnivelamiento categorial: sólo tiene sentido predicar una entidad de otra de nivel inferior; propiedades, de individuos; o propiedades-de-propiedades, de propiedades [de individuos]; y así sucesivamente. Sólo que ese principio de desnivelamiento categorial antes de Poincaré [casi] sólo se basaba en consideraciones de filosofía del lenguaje, como las ya apuntadas, mientras que Poincaré y Russell aportan una motivación más honda, que mana de una visión constructivista de lo real (aunque Russell no fuera en eso consecuente, ni de lejos). Así pues, el 'todo', el 'hay', el 'algo', los indefinidos en general, han de venir siempre restringidos, siquiera contextualmente. 'Todo es autoidéntico' carece de sentido. ¿Todo qué? Sí, todo individuo es autoidéntico, vale. Toda propiedad es autoidéntica, pero ahora en otro sentido de 'autoidéntico', pues sería un zeugma decir, quizá a lo Platón, que tanto la rosa cuanto su fragancia son autoidénticas; o que existen (o, más a lo Platón todavía, que tanto la rosa cuanto su belleza son, ambas, bellas). Bien, éstas son ideas también de Frege, y se remontan a Aristóteles. Lo nuevo en Russell estriba, no en restringir en consecuencia el campo de variación de las variables de un cuantificador a un nivel ontológico determinado de entidades, con exclusión de los demás —habíalo hecho expresamente Frege—, sino en excluir de ese campo de variación de un cuantificador a cualquier entidad que venga descrita, directa o indirectamente, con ayuda de ese mismo cuantificador. Así, y con ello, se pasa de la teoría simple de tipos de Frege a la ramificada de Russell.[9]

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 4º.— LA TEORÍA RAMIFICADA DE TIPOS

¿Cuáles son esas ramas? Las siguientes. En Frege —se recordará— tenemos: objetos, entes de tipo 0; y, para entes de tipos, $t^1,\ldots,t^n$, entes de tipo $<t^1,\ldots,t^n>$; tiene sentido una fórmula $f(a^1,\ldots,a^n)$ si ⌜f⌝ denota a un ente de tipo $<t(a^1),\ldots t(a^n)>$, donde t es una función que envía a cada ente sobre su tipo. No vale eso en la teoría ramificada. En ésta divídense en órdenes los entes de tipos superiores a 0. Un ente que sea una relación n-ádica y cuyos argumentos hayan de ser, respectivamente, de los tipos $t(a^1),\ldots,t(a^n)$, será de un orden m cuando en la expresión que lo denota los cuantificadores de más alto **orden** sean de orden m-1. (Lo recién dicho constituye una primera e inexacta formulación; véase, para una enunciación más cuidadosa, el párrafo siguiente.) Así, correspondiendo a un mismo tipo (de argumento) habrá órdenes (infinitos) diversos (que, sin embargo —y como en seguida se verá— no están **dentro** de ese tipo sino por encima de él). Un orden (o,t) es, pues, un orden determinado de propiedades de entes del tipo t; si t es el tipo de individuos, (o,t) podrá ser, o bien el de propiedades denotables con expresiones que contengan cuantificadores de primer orden, o… Además, eso de «cuantificadores de orden enésimo» quiere decir aquí algo diverso de lo que quería decir en la teoría de Frege: el orden de un cuantificador, y de su variable respectiva, es el **orden** de los entes que forman

9 En [W1], pp. 123ss, expone Hao Wang una serie de consideraciones sobre el principio del circulo vicioso y las definiciones predicativas que, aunque un tanto deslavazadas, resultan bastante sugerentes — y algunas atinadas. P.ej., apunta una importante dificultad (p.127): ¿qué sucede en el caso de especificaciones que se den, no mediante una formulación o «fijación» aislada, sino un haz de formulaciones o definiciones? Respuesta: 'if a definition A contains bound variables with a range including things to be defined in B, then the classification determined by A has to be adjusted by that determined by B, and, in general, there are complicated questions of satisfying simultaneously a group of conditions'.

su campo de variación; conque los cuantificadores de segundo nivel no son todos homogéneos: haylos de tantos órdenes «segundos» cuantos órdenes hay (o,0). (Sólo hay un orden que es único para un tipo de argumento que le venga dado: el de los individuos; porque, sencillamente, es un orden de propiedades 0-ádicas, o sea entes que no toman ningún argumento —si bien más abajo sugeriré una modificación o atenuación de esa identificación de los individuos con propiedades 0-ádicas.) Todo ello sin entrar ya en órdenes de relaciones (poliádicos), muchísimo más complicados evidentemente.

Para dar una idea más exacta, cabe proceder así: empezamos por agrupar a los entes en tipos como los fregeanos. Para cada uno de tales tipos, t, un ente es de orden (o_i,t) si es una propiedad (monádica) de entes de tipo t cuando la expresión que lo denota contiene cuantificadores a lo sumo cuyos campos de variación respectivos sean tipos iguales o menores que i, conteniendo al menos uno de tipo i. Así erigida esa primera jerarquía de órdenes de propiedades de entes del tipo t, erígese una segunda así: ordénanse los **órdenes** recién introducidos de manera obvia (y ha de estar claro que un orden (o_i,t) es superior [o posterior] tanto a o_i como, desde luego, a t); y después, para cada uno de esos órdenes, i, se tiene el nuevo orden (o_i,t). Seguimos todavía, sin embargo, dentro del «nivel» de entidades que en la teoría simple (la de Frege) era (homogéneamente) el tipo < t >, ahora escindido en esos infinitos órdenes. Reiterando el procedimiento constrúyese una tercera jerarquía, una cuarta, etc. ¿Es el fin? No. Porque, simultáneamente y para cada uno de los otros tipos originales (fregeanos), habremos hecho lo propio (en cada caso han de engendrarse infinitas jerarquías de órdenes de propiedades de entes del mismo tipo). Luego engéndranse nuevas infinitas jerarquías al incluirse órdenes (o_i,t) donde i sea **cualquiera** de los órdenes ya introducidos. Y así al infinito, recursivamente. Además, cada orden es también un tipo. En efecto, para cada orden (o_j,t) las propiedades de entes de ese orden no pueden ser propiedades de entes de ningún otro orden (no pueden ser ni poseídas ni dejadas de poseer por ellos). Conque decir —con formulación inexacta— que cada tipo se divide en órdenes es decir que, dado un tipo t, hay infinitos órdenes (o_i,t); no es decir que todos esos órdenes son partes del mismo tipo, sino sólo que son órdenes de propiedades de entes del tipo t. Pero, dado un orden i cualquiera, para cada uno de esos órdenes, j, habrá infinitos órdenes (o_i,j) diversos de cualesquiera órdenes (o_i,j’) cuandoquiera que $j \neq j'$. (Por eso cada nuevo orden constituye también un nuevo tipo.) Hasta aquí sólo hemos tenido en cuenta órdenes de propiedades monádicas, e.d. órdenes de la forma (o,t), órdenes que son «ámbitos» de propiedades, no ámbitos de relaciones. Para cada orden i y para cualesquiera **órdenes** $o^1,\ldots,o^n$, hay un n-tuplo $<o^1,\ldots,o^n>$ tal que habrá una primera jerarquía de órdenes (o_i, $<o^1,\ldots,o^n>$), construida por el procedimiento ya descrito pero cada vez con más ingredientes; luego una segunda, etc. Después de todas ellas, vuelta a empezar: cada nueva jerarquía introducida nos lleva a desdoblar o desglosar infinitamente cada uno de los órdenes previamente introducidos; y así infinitamente al infinito. Y luego hay que seguir multiplicando jerarquías al tomarse en consideración otras adicidades (otros n-s); p.ej., un orden (o_i,t) donde t es el orden 0 de individuos y o_i sea el de una relación 27-ádica entre entes especificadamente de sendos órdenes, el más alto de los cuales (digamos, el 99!º en la escala previamente construida) será i.[10]

Se le ha objetado a esa teoría que nadie puede creerse que exista todo eso. Sin embargo, es un hecho que, si es correcto el principio de predicatividad (exclusión del círculo vicioso), entonces tiene que darse todo eso. Por otra parte, sin embargo, desde un punto de vista constructivista trataríase de una jerarquía «potencial». Pero ¿en qué consistiría esa potencialidad? Sería una potencialidad «en principio», no efectiva, claro. Y ¿qué es eso? Nadie podría ir muy lejos en la construcción. Russell, menos aristotélico que Poincaré, no se satisfizo con una «potencialidad» un tanto escurridiza e incomprensible, sino que aseveró la existencia efectiva de todo eso, alegando que una mente infinitamente poderosa podría dar todos esos pasos en la construcción. Sin embargo, los órdenes existen —según él— no por esa construcción, sino en sí; sólo que están estructurados como los organizaría en su construcción una mente infinita, si la hubiera, en vez de ser tipos cuya entidad fuera mentalmente

10 Una exposición mucho más condensada, pero así y todo bonita, de la teoría ramificada figura en [F2], pp. 171ss.También podría uno —acaso debería, para ser consecuente— introducir tipos transfinitos; la idea fue de von Neumann; y los sistemas «predicativos» (pero con reservas) de Hao Wang $\Sigma\omega$ articulan esa idea dentro de una teoría ramificada flexibilizada. (Vide infra (nª 26).)

inconstruible —cual serían tipos que se presupusieran a sí mismos, por decirlo así. No hay, pues, incoherencia en la concepción de Russell. Es un constructivismo divino, un idealismo objetivo, si se quiere, según el cual el ser (al menos el de entes que no sean de primer orden) depende del pensar, de un pensar, además, constructivo, pero acaso infinitamente potente; de un pensar que, si no existe, podría existir y, si existiera, obraría así. Claro que un teísta podría objetar que Dios tiene otros modos de pensar «no constructivos»; que su pensar se identifica con su obrar, con su causar, con el ser de las cosas, de suerte que no habría inconveniente en que un objeto del pensamiento divino se presupusiera a sí mismo. Pero Russell se resiste a ello: entendemos qué sea pensar por analogía con nuestro pensar, que es constructivo, no autopresupositivo.

La refutación más convincente de Russell no es la de que su teoría es pragmáticamente inaceptable (haría imposible todo rigor, en la práctica de la construcción teórica), aun siendo ésa una objeción certera (ha de haber en la realidad una razón suficiente de tal inviabilidad práctica, y lo más sensato es suponer que la razón suficiente en cuestión es que la realidad no es así ni puede ser así); la refutación más persuasiva estriba en alegar que nuestro pensamiento no es constructivo, sino autopresupositivo.[11] No hay, pues, razón para rechazar la no-constructividad del pensamiento divino, o del angélico. El propio Russell se va a dar cuenta de ello.

En teoría de conjuntos defínese (desde Dedekind) un número real cualquiera, r, como el conjunto de racionales no mayores que él ($\sqrt{3}$ es el conjunto de números racionales x tales que $x^2 \leq 3$; luego se extienden analógica y recursivamente esas mismas relaciones, como la de ser ≤, a los propios reales). Para cada conjunto acotado (por arriba) de números reales, C, hay una mínima cota superior, e; ésta entonces sólo puede definirse como la unión conjuntual de C, e.d. el conjunto de racionales abarcados por uno u otro miembro de C. Sea C un conjunto (o, para Russell, una propiedad) de entes de orden o_j. ¿Cuál será el orden de la mínima cota superior de C? Será un orden más elevado que o_j, puesto que en la definición de tal cota entra un cuantificador de orden o_j precisamente. Luego ni podrá afirmarse ni negarse —contrariamente al principio de continuidad, que es la disyunción de tal afirmación y tal negación— que esa cota venga abarcada por C. ¡Adiós matemática superior! La matemática no es constructiva. Ni, menos, son constructivas otras partes más complejas de nuestro pensamiento.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

11 Que buena parte del pensamiento humano es impredicativo o tal que involucra forzosamente un «círculo vicioso» en la especificación del objeto sobre el que verse fue uno de los argumentos que, con razón, se esgrimieron contra la filosofía matemática de Poincaré; Gödel halló en eso un argumento que le pareció decisivo contra el principio del circulo vicioso. Como un caso extremo de impredicatividad estarían los operadores combinatorios —por los que Gödel mostró gran interés— que se especifican en términos que involucran a cualesquiera entes, incluyendo ellos mismos, que son también argumentos de sí mismos. (Vide infra, capítulo 14º.) Entre los ejemplos extramatemáticos más palmarios de pensamiento impredicativo cabe mencionar ciertas paradojas semánticas (o no paradojas, según los casos), como las estudiadas por A.N.Prior —y ya por Juan Buridán, en parte—: vide «On a Family of Paradoxes», *Notre Dame JFL* 2 (1961, pp.16-32; N. Rescher, *NDJFL* 5/3 (1964), pp. 218-20. Consideraciones como las de Prior han suscitado la teoría de la verdad de Kripke, muchísimo más prometedora que la de Tarski: «Outline of a Theory of Truth», *Journal of Philosophy* 72/19 (nov. 1975), pp. 690ss. Kripke llega al punto de sostener que una prolación puede engendrar un enunciado —en ella proferido por primera vez—, haciéndolo verdadero, o falso, o neutro, o indefinido; sea ello así o no, es lo cierto que situaciones como las que evoca Prior suceden a menudo y conllevan impredicatividad: Leoncio, que aprecia mucho a Andrés, cree que todo lo que esté ahora pensando será verdad, porque Andrés está examinándose de matemáticas; pero en ese momento lo que piensa Andrés es que Leoncio no da una en el clavo. En la más reciente literatura sobre teoría de conjuntos y sus aplicaciones a una amplia gama de problemas —principalmente de teoría de computación— han salido a la luz muchos otros casos de impredicatividad fuerte, o de autoenvolvimiento de ciertos cúmulos. Lo que era una herejía hace pocos años es hoy ya una tesis respetable. Brindo una reflexión sobre el asunto en el capítulo 1º de la Sección IV del presente libro.

Capítulo 5º.— EL PRINCIPIO DE REDUCIBILIDAD

Para solventar ese problema postuló Russell el **principio o axioma de reducibilidad** [AR] a cuyo tenor hay, para cualquier ente e de tipo (o,t) donde o es un orden más elevado que el tipo (=orden) t, otro ente coextensivo con él, e', de orden (t-1,t), e.d. de un orden que engloba a entes denotables con expresiones en las que no figuran cuantificadores de orden superior a t. A la vez que, según el axioma de reducibilidad, se puede siempre tomar, para un ente de orden dado, (o_j,t), como vicario o sucedáneo suyo otro de orden (t,t), también cabe representar a un ente de orden (t-1,t) por otro de orden (t,t) (y, cuando t=0 [el orden de los individuos], entenderemos que t-1 no será nada, de suerte que (0-1,0) será el orden de propiedades de individuos denotables por expresiones sin cuantificadores de ningún género.) En efecto, «la propiedad de ser un ente de tipo t tal que p» equivale a «la propiedad de ser un ente idéntico a un ente de tipo t tal que p». De ahí que haya cómo brindar esta otra formulación del axioma de reducibilidad: **dada una propiedad cualquiera, , de entes de tipo t, sea del orden que fuere, existe otra propiedad, , coextensiva con y que es de orden (t,t)**. (Eso no conlleva «elevar» de categoría u orden a los entes, si bien alguna elevación así es viable en un marco diferente del de la teoría de tipos ramificados.[12] Lo curioso del axioma de reducibilidad es que con él esa misma teoría de tipos viene en cierto modo desramificada, a través de los sucedáneos.) Esto suscita una conocida dificultad: hemos hablado de «la» expresión que denota a un ente; pero puede haber varias, unas con unos cuantificadores, otras sin ellos. Para Russell hay un paralelismo lingüístico-ontológico. Un ente será de aquel orden al que corresponda la expresión más «baja» con que pueda ser denotado. (Pero una abreviación definicional no crea otra expresión nueva, sino que el definiendum es el mismo definiens sólo que visto éste compacta o macizamente y sin fijarse uno en su estructura interna.)

Estriba la coextensividad recién aludida entre dos entes o propiedades en que cualquier ente que caiga bajo la una cae también bajo la otra. Llévanos eso a considerar el **principio de extensionalidad** [PE] y la concepción russelliana de las clases. He venido hablando indiferentemente de propiedades o de clases. Siguiendo a Quine no veo entre unas y otras diferencia alguna si no es ésta: preferentemente úsase el vocablo 'clase' o 'conjunto' cuando se aplica a la entidad referida un principio de extensionalidad; 'propiedad' —si es que quiere uno diferenciar propiedades de clases—, cuando no.[13] Principio de extensionalidad que suele definirse así: dos clases coextensivas son idénticas (son, no dos, sino una sola y misma clase). Luego veremos que hay principios menos fuertes, pero que merecen también la denominación de **extensionalidad**.

Russell no identifica a dos propiedades, del orden que sean (idéntico o diverso), porque sean coextensivas, e.d. porque cada ente que caiga bajo la una también caiga bajo la otra. El axioma de reducibilidad no dice, pues, que toda propiedad sea **predicativa en sentido fuerte** (e.d. de un orden (o_i,t) tal que o_i no sea superior a t), sino tan sólo que cada propiedad es coextensiva con otra que sí es predicativa [en sentido fuerte]. (Las propiedades predicativas [en sentido fuerte] son marcadas por Russell con una admiración: ⌜f!x⌝ significa que x posee la propiedad predicativa [en sentido fuerte] f.) Pero con ello se volatiliza en la práctica a casi todos los efectos el principio de predicatividad (la

[12] La identificación de los «individuos» con sus respectivas clases unitarias o síngulos es una constante en Quine —salvo quizá en trabajos recientes en los que parece claudicar ante los adeptos de la teoría estándar de conjuntos, ZF o alguna otra afín como NB. Vide, p.ej., [Q3], p.276; [Q2], pp.122-3 & 135. Pero es interesante ver que Frege —quien precisamente fue el primero en criticar la confusión en que, antes de él, se solía incurrir entre un ente y su síngulo (mostrando que el conjunto de los reyes magos abarca a tres, mas su síngulo sólo a uno)— propuso no obstante identificar a ciertos entes con sendos síngulos, a saber: a la Verdad y a la Falsedad. Resultan de tales identificaciones consecuencias muy interesantes. Vide [T2] p.287, p.297. Podríamos traducir a nuestra notación la ecuación fregeana así: $\lambda x(x)=\lambda x(x=\forall x(x=x))$; de donde se deduciría $\lambda x(x)=\lambda x(x=\lambda x(x))$. Sólo la Verdad sería verdadera —y sólo la Falsedad falsa, aunque esto último, dicho sea de paso, no es probablemente compatible con otras cosas que dice Frege. Claro que resulta más plausible un enfoque, en eso, como el de Russell: la Verdad sería la existencia (de estados de cosas). Ese enfoque russelliano es el que subyace al enfoque propuesto en el capítulo 14º de la presente Sección. (Sobre la identificación de cada individuo con su síngulo, vide infra, el final del capítulo 9º.)

[13] Cf. [Q3], p. 2 y passim; [Q2)], pp.120-1. Pero también Russell en la 2ª edición de PP.MM. (vide infra, cap. 10º) afirma (p. xxxix de [W3]): 'Consequently there is no longer any reason to distinguish between functions and classes'. ¿Como consecuencia de qué? De haber abrazado el principio de extensionalidad.

exclusión del círculo vicioso). Por eso, Ramsey y, a su zaga, casi todos los lógicos, optaron por abandonar de hecho la teoría ramificada, reemplazándola por la teoría simple de tipos.

Hay más que decir sobre las clases. Russell abrazó con ardor (en la 1ª edición de PP.MM., que es aquella cuya doctrina estamos ahora considerando) su «no class theory» a tenor de la cual las expresiones de clase son, cual descripciones definidas, pseudoexpresiones, símbolos incompletos. Decir que $x\in\lambda zfz$ (x viene abarcado por el conjunto de entes, z, tales que fz) sería, simplemente, decir que $f!x$ [o —acaso más exactamente— que $\exists g(\forall y(fy\equiv gy)\wedge g!x)$]. $\ulcorner f\urcorner$, pues, es una expresión denotativa de una propiedad. Las propiedades no son extensionales. (Cuando, en la segunda edición, pasaron a ser reconocidas como extensionales, fueron identificadas entonces con los conjuntos. Vide infra, cap. 10º.) No es verdad que $\ulcorner\forall x(fx\equiv gx)\supset.f=g\urcorner$ (si todo ente, x, es tal que fx ssi gx, entonces f=g). Pero decir que λxfx (la clase de entes x tales que fx) tiene la propiedad g (o sea $g\lambda xfx$) es decir que $\exists h(\forall x(fx\equiv h!x)\wedge gh)$: hay una propiedad predicativa [en sentido fuerte], h, que abarca a un ente cualquiera, x, ssi fx, siendo ese algo, h, tal que gh. (Pero en todas esas fórmulas las variables tienen que venir escalonadas según lo impuesto por la teoría ramificada de tipos: $\ulcorner x\urcorner$ será de orden inferior a $\ulcorner h\urcorner$, también inferior a $\ulcorner f\urcorner$, siendo $\ulcorner g\urcorner$ superior a $\ulcorner h\urcorner$.) Así es como si postuláramos clases extensionales: decir que el conjunto de guatemaltecos es numeroso es decir que hay una propiedad (predicativa [en sentido fuerte]) coextensiva con la de ser guatemalteco que es numerosa. El principio de extensionalidad cobra en la teoría de Russell esta forma: $\ulcorner\forall x(x\in\lambda xfx\equiv x\in\lambda xgx\supset.\lambda xfx=\lambda xgx)\urcorner$.

Eso significa tan sólo que, si cuanto tiene [una propiedad coextensiva con] la propiedad f tiene también [una propiedad coextensiva con] la propiedad g, y viceversa, entonces hay sendas propiedades coextensivas con f y con g, respectivamente f' y g', tales que para cualquier propiedad de nivel inmediatamente superior, h, h abarca a f' ssi también abarca a g'. Eso es obvio. Porque, para cada propiedad f que sea coextensiva con otra, g, hay alguna propiedad g^1 coextensiva con ambas, a saber la propia g, tal que, para cualquier propiedad h, g^1 posee h ssi g posee h (obvio, pues $g^1=g$). Ese principio es, pues, tautologico. No refuerza el sistema de Russell de ninguna manera, ni restringe ni elimina alternativas. (En cambio, cuando, en el sistema modificado de la segunda edición, venga abandonado el axioma de reducibilidad, será menester, entonces sí, postular el principio de extensionalidad que ya no será, en ese nuevo marco, tautológico, sino que reforzará el sistema. Vide infra capítulo 10º.) La extensionalidad es aparente, una impresión superficial debida a la notación. Sin embargo a todos los efectos es como si sí se postulara el principio de extensionalidad. ¿Por qué? Pues porque en la práctica Russell tiene que acudir cada vez más a hablar de clases y no de propiedades; cada vez más, en lugar de decir $\ulcorner hf\urcorner$ tiene que decir $\ulcorner\lambda x(fx)\in\lambda g(hg)\urcorner$ y cosas así. Signos incompletos, sí, pero que son los que acaparan cada vez más la atención y aquellos con los que se trabaja. No interesa qué propiedades tenga una propiedad dada, f, sino cuáles tenga —o por qué clases venga abarcada— alguna propiedad predicativa [en sentido fuerte], sea la que fuere, coextensiva con f.

El procedimiento funciona para evitar caer en la trampa en que caía la teoría de Frege, porque las clases no son todas del mismo nivel. Como las expresiones de clase son pseudoexpresiones, cada fórmula que contenga una o más expresiones de ésas será parafraseable como otra fórmula sin tales expresiones, en notación primitiva. Tan sólo se postulan como existentes las propiedades (atributos) de órdenes diversos.

El inconveniente de todo ello es que se pierde el género de motivación filosófico-lingüística que en la teoría de Frege llevaba en unos casos al desnivelamiento y —correspondientemente y para ser consecuentes— en otros casos al nivelamiento categorial. Para Frege toda nominalización habrá de denotar a un objeto («individuo», ente de nivel 0). Para Russell no. Propiamente en su teoría no hay nominalizaciones (más que aparentemente). Sin embargo ¿de dónde esa apariencia, de dónde la necesidad de recurrir a ese expediente definicional? Eso no encuentra explicación con esa teoría.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 6º.— EL SINO DE LOS CUANTIFICADORES

Peor es un defecto común a toda teoría de tipos, la de Frege lo mismo que la de Russell. Un cuantificador es un signo compuesto de un prefijo —'∃' para el existencial, '∀' para el universal— más una variable. ¿Qué cosa viene significada por el prefijo? Los russellianos responderán: nada, es un signo incompleto; «contribuye» de cierto modo al significado del todo, pero no aporta nada, salvo la manera de tal contribución. No creo que esa respuesta sea satisfactoria. Si el signo de marras contribuye de cierto modo a la significación o denotación de la expresión total, ¿de qué modo lo hace? Dígase. Y será algo como esto: para una expresión ⌜fx⌝ que, cuando se da como valor a la variable ⌜x⌝ el ente e, significa algo (un valor de verdad según Frege, un estado de cosas según Russell), el resultado de prefijarle '∀x' significará algo, pongamos la Verdad, ssi ⌜fx⌝ significa la verdad para cada valor e dado a ⌜x⌝. Bien, está claro que hay una cierta **relación** entre lo significado por ⌜f⌝, lo significado por ⌜x⌝ bajo una cierta asignación de un valor (ese mismo valor) y, por último, lo significado por ⌜∀x(fx)⌝. **Ésa** es la relación de universalidad, si se quiere: la que guarda, p.ej., Argelia con la autoidentidad porque lo mismo que es autoidéntica Argelia lo es cualquier otro ente (por lo menos del mismo «orden» o nivel ontológico que Argelia). El papel de '∀' es, pues, el de, vinculándose o combinándose de cierta manera con las otras expresiones, hacer que el todo así formado denote a la Verdad —o a un estado de cosas verdadero, o acaso existente— ssi se da entre los entes significados por esas expresiones esa relación de universalidad. Luego es perfectamente razonable decir que '∀' significa a esa relación (o que la denota, o expresa, o representa, o hace las veces de la misma, o…). O, como mínimo, que su papel es el ya apuntado. Ahora bien, según la teoría de tipos no puede haber ninguna relación de universalidad en general, sino una universalidad de primer nivel (relación entre objetos y propiedades de primer orden), otra de segundo etc. (Eso en teoría simple de tipos y sin tomar en cuenta a las relaciones, sino sólo a las propiedades. Cómo sea la jungla resultante en teoría ramificada adivínelo el lector.) Pero ¿hay algo en común entre esas diversas relaciones? Aparentemente sí, ¿no? Aparentemente son «análogas» con analogía, acaso, de proporcionalidad, propia seguramente. Mas (dejando de lado las enormes dificultades lógicas de la teoría de la analogía, que desde luego no haría suya ninguno de los autores ahora sacados a la palestra) resulta que cuanto hubiera en común sería **algo**, un «rasgo» o lo que fuera, una propiedad de tal o cual orden; mas resulta que entes de diversos órdenes no pueden tener **nada**, nada de nada, en común.

Entonces, ¿qué nos autoriza a usar el mismo prefijo para cuantificadores de diversos niveles? ¿O a llamar **variables** a las de órdenes diferentes? ¿O a hablar de una relación similar entre la variable y el objeto que se le dé como valor en uno u otro caso? No: han de desterrarse el 'hay', el 'todo', el 'algo' y el 'cualquiera'. En cada caso ha de acuñarse una nueva expresión **primitiva**. Infinitas, sí, para los infinitos tipos (y órdenes), pero —además y sobre todo— tales que carezca de sentido dar una explicación de una de ellas por analogía con otra previamente introducida. En suma, el sistema es impresentable, informulable, inefable. (Y, si pudiera formularse, nadie podría aprenderlo.)

Por último, hay **otra** dificultad en la lectura en lengua natural de los cuantificadores de orden superior al primero, dificultad que viene a sobreañadirse a la de plurivocidad de 'hay' y 'todo': es imposible tal lectura **sin** nominalización. Mas, si vale el argumento de Frege a favor del desnivelamiento categorial (el único convincente que abone en tal sentido —como no se opte por el constructivismo que anima a la teoría ramificada pero sin el axioma de reducibilidad), entonces ninguna nominalización puede denotar a algo denotable por un verbo. Para Russell esa dificultad es pragmática y revela cuán mal hecho está el lenguaje natural. Lo malo es que él nunca pudo (porque es imposible) elaborar un lenguaje ideal exento de ese defecto; su notación incurre en la ambigüedad sistemática que, sin embargo, viene (o, más bien, habría de venir) proscrita por su [meta]teoría. Además, puestos a aceptar soluciones así, cabría alegar que cualquier necesidad de desnivelamiento categorial entre diversas partes de la oración es resultado de algún género de limitación inherente a los lenguajes, sea en general, sea en particular los humanos; no teniendo eso nada que ver con cómo es la realidad. Que algo queda así sin explicar es verdad; pero ni más que lo que deja sin explicar la teoría de tipos ni, sobre todo, algo tan inquietante, pues por lo menos con esa salida no estaremos abocados ni a inefabilidad ni a las desmesuras ontológicas de órdenes o tipos.

Y conste que la principal dificultad con esas desorbitadas postulaciones no es ya que conculquen un principio de economía ontológica, sino algo más grave. Creer que existe algo es una situación, un «estado» —o lo que sea— que ha de involucrar, directa o indirectamente, una relación [de creencia] entre uno (el creyente) y ese algo, al menos cuando la creencia sea verdadera. Pero entre un ente y todo el ámbito de entes de un tipo o nivel no puede nunca darse una relación que tenga algo en común con otra relación que se dé entre dicho ente y **otro** ámbito así. (No puede, pues, haber creencia alguna en los órdenes y tipos múltiples de la teoría de tipos; ni, por ende, postulación conjunta de tales tipos y órdenes. Si es verdadera esa teoría, no existe.)

(Entre paréntesis: esto mismo que se acaba de decir sería verdad según la teoría de tipos, pero no podría decirse; más exactamente: no sería ni verdadero ni falso, pero en algún sentido enigmático sí sería como verdadero, pues sería un aserto de la propia teoría de tipos, toda la cual es inefable, empezando por la afirmación de que nada es común a entes de diversos tipos, o el que éstos sean tipos; porque, si nada es común, no es común tampoco el no tener nada en común el uno con el otro, que sin embargo se les está atribuyendo a ambos por igual.)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 7º.— CÓMO SE EVITA LA PARADOJA DE CANTOR EN LA TEORÍA RAMIFICADA

En el sistema russelliano de los PP.MM. explotábase el axioma de reducibilidad para definir la identidad así: ⌜x=z⌝ significa que x posee las mismas propiedades predicativas [en sentido fuerte] que z. Como cada propiedad es coextensiva con una predicativa [en sentido fuerte], dedúcese de ahí que, si son idénticos, tienen todas sus propiedades en común. Así pues, con el axioma de reducibilidad las únicas propiedades que interesa tomar en consideración, a cualquier efecto, son las predicativas. (Para evitar confusiones conviene puntualizar que hay dos sentidos, uno **fuerte**, el otro **débil**, de 'impredicativo' en Russell. En sentido fuerte, sería impredicativa una clase o propiedad ϕ cuya existencia viniera de algún modo presupuesta por su propia especificación, e.d. tal que ϕ —o algo cuya especificación presupusiera la existencia de ϕ— cayera en el campo de variación de una variable cuantificada que figure en la especificación de ϕ. [La teoría ramificada afirma que no existen propiedades o clases impredicativas en ese sentido fuerte.] En sentido débil es impredicativa una clase o propiedad cuya especificación contenga una variable cuantificada que tenga por campo de variación un orden de entes superior al de los argumentos de tal clase o propiedad, e.d. las cosas de las que puede decirse con sentido que poseen o dejan de poseer tal propiedad —e.d. que vienen o dejan de venir abarcadas por tal clase. Correspondientemente, es **predicativa** en sentido fuerte una propiedad que no sea ni siquiera impredicativa en sentido débil.) Con el axioma de reducibilidad, las propiedades o clases impredicativas (en sentido débil), si bien existen, son, en verdad, redundantes. Fue eso lo que llevó, en 1926, a Ramsey, y con él a la mayoría de los lógicos, a acabar prefiriendo la teoría simple de tipos. (Los dos autores de PP.MM., Russell y Whitehead, siguieron otro camino, más razonable, pero que no por ello es inocuo (vide infra, cap.10º))

Se ha argüido que cualquier paradoja evitable con la teoría ramificada viene también frustrada con la teoría simple de tipos. Tal es la opinión de Quine,[14] como asimismo de la gran mayoría de los autores: la eficacia de la solución permanecería incólume, pues para evitar las paradojas bastaría un principio de estratificación según el cual sólo tiene sentido $\ulcorner hf \urcorner$ (o, en otro modo de decirlo, $\ulcorner f \in h \urcorner$) si $\ulcorner h \urcorner$ es de un tipo inmediatamente superior al de $\ulcorner f \urcorner$. El único fallo en la teoría de Frege sería, pues, el de desestratificar las clases o extensiones. (Aunque ya hemos visto los hondos motivos filosóficos que movían a Frege a hacer eso.) A coro se ha repetido que la complicación que conlleva la teoría ramificada es superflua para soslayar las paradojas lógicas, o teórico-conjuntuales propiamente dichas, e impotente para obviar las semánticas (la del mentiroso, la de Richard, la de Berry etc., o sea las que involucran esencialmente relaciones semánticas como las de «denotar», «ser verdad» etc.; vide infra, Capítulo 9º y (nª 14)). No es ése mi parecer. Desde luego es cierto que se esquivan las paradojas conjuntuales con la teoría simple de tipos **sin clases** (o sea, según el procedimiento de la «no class theory» de [la 1ª edición de] PP.MM.: reducción definicional de clases a propiedades o atributos —aunque ya vimos que eso no deja de suscitar dificultades filosóficas serias). Pero no del mismo modo que como se evitan en la teoría ramificada sin axioma de reducibilidad (o sea: la de la 2ª edición). En ésta encuentran un obstáculo de principio, motivado filosóficamente por consideraciones que no dependen de un postulado de filosofía lingüística, cual es el único fuerte motivo independiente para la teoría simple (fregeana) de tipos (la ya mencionada cuestión de cómo se engarzan dos segmentos de una expresión compleja para constituir a ésta, y cómo es la realidad para fundar, por adecuadas relaciones semánticas, ese comportamiento de las expresiones lingüísticas, que parece forzosamente entrañar heterogeneidad radical entre signos «saturados» e «insaturados» según el vocabulario de Frege). Veámoslo con un ejemplo. El **teorema de Cantor** es la tesis de que cualquier conjunto es más pequeño que su respectivo **potencial** (e.d. que el conjunto de sus subconjuntos). Pruébase así: supongamos lo contrario, o sea que hay una **sobreyección** s del conjunto C sobre su potencial, PC; para cada miembro de PC, S, habrá, pues, un miembro de C, m, tal que s(m)=S, mientras que no habrá ningún otro miembro de PC, S', tal que s(m)=S'; para cada m llamemos **s:m** (o **s(m)**) al S correspondiente; o bien cada m viene abarcado por el respectivo s:m; o bien algunos no; sea f el conjunto de éstos últimos (no se presupone que no sea vacío); vacío o no, f será un subconjunto de C, y por lo tanto un miembro de PC; habrá pues un miembro m de C tal que f=s:m; problema: ¿es abarcado m (**ese** m) por f? Si sí, entonces cumplirá la condición de pertenencia, o sea la de no venir abarcado por el subconjunto de C con el que lo correlaciona s; ese subconjunto es, ni más ni menos, f [e.d. s:m]; o sea: si sí es abarcado, no lo es; luego no es abarcado; pero entonces cumple la condición; y —en virtud del **principio de abstracción** [del cual me ocuparé en seguida]— cuanto cumpla la condición de pertenencia a un conjunto viene abarcado por ese conjunto; luego, si no es abarcado, sí lo es; por tanto es abarcado; ergo: contradicción: sí y no.

En la teoría simple de tipos demuéstrase el teorema de Cantor que viene a sonar así: no existe ninguna sobreyección $x_{i,j}$ tal que la imagen por $x_{i,j}$ del conjunto de los conjuntos z_i incluidos en u_j esté incluida en u_j. (Los números suscritos son índices del **tipo** de las respectivas variables; **venir incluido en** es **ser un subconjunto de**; la imagen de un conjunto C por una relación r es el conjunto de entes para cada uno de los cuales, x, hay un miembro de C, m, tal que rmx [m guarda con x la relación r]; si C es la tiranía y r la relación de oprimir, la imagen en cuestión es la propiedad de ser oprimido por un tirano; una función es una relación tal que nada guarda esa relación con más de un ente; y —según lo recién apuntado— una sobreyección del conjunto A en el conjunto B es una función f tal que para cada m∈A hay un j∈B tal que j=f(m).) Ahora bien, aun probado ese teorema, evítase en la teoría simple de tipos la paradoja de Cantor, a saber que el conjunto de todos los conjuntos sea más pequeño

14 Dice Quine en [Q3], p.255: 'The notion that Russell's orders were relevant to such paradoxes is not one that I know how to make plausible while maintaining a distinction between attributes and open sentences, which he confused under the head of propositional functions. It seems clear in any event that by rights the semantic paradoxes should be blamed on special zconcepts foreign to the theory of classes ... But the semantic paradoxes are of no concern to the theory of classes'. Paréceme que Quine está equivocado en ese punto. Cualquier predicado es «*of concern to the theory of classes*» al menos de una que postule un PA suficientemente vigoroso (en vez del raquítico de ZF, que sólo tolera subconjuntos de algún conjunto ya «dado»). Porque una teoría de conjuntos con un principio de abstracción fuerte y brioso [y en seguida explicaré en qué consiste el principio de abstracción] puede probar que determinados predicados tienen que venir excluidos del lenguaje; o que, si se dan, tienen condiciones de aplicación diferentes de las que se habían supuesto. (Vide infra, capítulo 9º.)

que sí mismo. Esa paradoja se probaba en la teoría ingenua así: sea C tal conjunto; abarca a todo; por tanto a cada subconjunto de C también; sea i la función que envía a cada síngulo [conjunto unitario] sobre su único miembro, y a los demás subconjuntos de C sobre uno de sus miembros, arbitrariamente tomado (enviando al conjunto vacío sobre un miembro cualquiera). Obviamente i es una sobreyección de PC sobre C, contrariamente al teorema de Cantor. En la teoría [simple] de tipos no podrá formularse siquiera la hipótesis de existencia de tal sobreyección, porque infringiría las cortapisas sintácticas estipuladas a tenor del desnivelamiento categorial ontológico impuesto por la teoría. Y es que no cabe, en teoría de tipos, hablar en general de un conjunto del cual todos los demás serían subconjuntos, sino que hay que precisar siempre de qué nivel se está hablando. Mas a esa restricción añade otra la teoría ramificada, a saber: en ésta última ni siquiera tendrá sentido hablar del conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado, sino, en cada caso, del conjunto de sus subconjuntos de tal **orden** (jamás del conjunto de sus subconjuntos de un orden cualquiera).

Así pues, la teoría ramificada bloquea la demostración del teorema de Cantor. Veámoslo más de cerca: «el conjunto de miembros m de C tales que m no es abarcado por s:m» es una abreviación de «el conjunto de miembros m de C tales que hay un miembro S de PC y m no es abarcado por S»; esta especificación es ilegítima, porque habría de ser la de un conjunto J de un orden superior al de cualquier cuantificador en la especificación, y por tanto al de cualquier ente que esté en el campo de variación de la variable de ese cuantificador; por lo tanto, J sería un conjunto de orden superior al de aquellos subconjuntos de C que vengan abarcados —o dejen de venir abarcados— por PC; PC no puede ser, por consiguiente, el conjunto de todos los subconjuntos de C, sino tan sólo el de todos los subconjuntos **de determinado orden**; p.ej. de los predicativos [en sentido fuerte], mas en tal caso él no será un conjunto predicativo.

Importantísima es la precedente observación, puesto que revela que en la teoría ramificada se evita la paradoja de Cantor de la misma manera que se evita la de Russell: en efecto, supongamos el conjunto de Russell, o sea el conjunto de cuantos conjuntos no se abarcan a sí mismos (λxN(xx)); si existe, habrá —en virtud del principio de abstracción— de abarcarse a sí mismo ssi no se abarca a sí mismo. En la teoría simple de tipos proscríbese sin más ⌜xx⌝ como mal formado, porque carece de sentido decir que x_j abarca o no abarca a z_j (sólo tiene sentido decir esto de x_{j+1}). Pero en la teoría ramificada se da una solución más honda. El conjunto de Russell ha de ser, si existe, de un orden superior al del cuantificador que figura en su especificación; y, por ende, al de los conjuntos —si los hay— que forman el ámbito o campo de variación de la variable de tal cuantificador; luego, aunque hubiera conjuntos que abarcaran o dejaran de abarcar a entes de orden idéntico al de ellos mismos, el conjunto de Russell no podría ser ninguno de esos conjuntos; es más: el argumento se generaliza y concluye (aunque vide infra Capítulo 9, *sub fine*) que no puede haber conjuntos así (pues un conjunto C que abarcara o dejara de abarcar a entes del mismo orden que C sería especificable sólo con una cláusula **fuertemente** impredicativa —una que violara las restricciones impuestas por la teoría ramificada; cf. sin embargo el final del Capítulo 9, infra, sobre una posible excepción a esa regla).

λxN(xx) es = λxN((i:x)x) o sea: el conjunto de entes que no vienen abarcados por aquel subconjunto del conjunto universal con el cual los correlacione la relación de identidad; o sea sería aquel ente cuya especificación conduciría a la paradoja de Cantor. Por eso en la teoría ramificada hay una única solución a las dos paradojas; no así en la teoría simple de tipos. Y, desde luego, la motivación de la solución es muchísimo más honda y seria en la teoría ramificada, mientras que la de la teoría simple resulta un tanto *ad hoc*, cuando se abandona la noción fregeana de extensiones desestratificadas entre sí, por ser —todas— objetos o entes de nivel 0.[15] Pero —eso sí— con una

15 Chihara, en [C2], pp.5ss, brinda una explicación un poco diferente de cómo se evita la paradoja de Cantor en la teoría ramificada de tipos. Pero en el fondo no hay desacuerdo entre mi planteamiento y la lectura ofrecida por Chihara. Cabe señalar que la presentación que hace Chihara (pp.20ss) de la teoría ramificada de tipos difiere de la que aquí figura, pero —me parece— más en terminología que en cuestión de fondo. Es sólo de lamentar que Chihara desatienda un tantico la importancia central que, para la jerarquización de órdenes, juega la presencia de cuantificadores de determinado orden. Quizá, lo mismo que Cocchiarella (en el trabajo citado supra, nº 6), está preocupado por el hecho de que los órdenes son ontológicos mientras que la presencia o ausencia de cuantificadores es algo lingüístico, algo de las expresiones que denotan a sendos entes, no algo de los mismos. Ahora bien, está de por medio el principio del paralelismo óntico-lingüístico —tan bien analizado por Vuillemin en su grandiosa interpretación de las primeras fases de la filosofía russelliana, *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Paris: Armand Colin, 1968. Y, si bien la teoría [russelliana] de descripciones parece una infracción a tal principio, y a lo mejor lo es, esa teoría no es indispensable para el conjunto de la ontología russelliana de la fase de los PP.MM. Y, en cualquier caso, el constructivismo que anima

genuina y no aguada teoría ramificada —como la brindada en la 2ª edición de PP.MM.— no cabe ningún axioma de reducibilidad. Ni cabe, por ende, una teoría suficientemente interesante de números reales.

Capítulo 8º.— EL AXIOMA DE REDUCIBILIDAD Y LA EXISTENCIA DE SITUACIONES PRÓXIMAS A LA IMPREDICATIVIDAD EN SENTIDO FUERTE

El axioma de reducibilidad entraña que $\forall x,y(x \neq y \supset \exists z(z!x \wedge N(z!y))$ —donde z es una variable de un orden predicativo (o_j,o_j) si es que ⌜x⌝ e ⌜y⌝ son, ambas, variables de orden o_j; por esa razón sostuvo Russell que el axioma de reducibilidad es una versión generalizada del principio leibniziano de identidad de los indiscernibles.[16] Es dudoso que sea correcto tal aserto salvo en el sentido muy banal de que cualquier condición suficiente de identidad entre entes de determinada índole (o sea, cualquier condición necesaria de diferencia) es una generalización de ese principio leibniziano. En cualquier caso, eso (por sí solo) no suministra al axioma de reducibilidad mayor plausibilidad que, pongamos por caso, al principio de que, si dos hombres son diversos, llevan diferente apellido (un principio que, lo mismo que el axioma de reducibilidad, entraña que, si dos hombres son diversos, uno de ellos posee una propiedad de la cual carece el otro). Russell y Whitehead trataron de probar que, si existen clases, es verdadero el axioma de reducibilidad; como lo muestra Chihara, el supuesto es, no la [mera] existencia de clases, sino el principio de abstracción; mas, comoquiera que sea, Russell sostuvo [en el sistema de la 1ª edición de PP.MM.] que no existen clases, e.d. que no existen extensiones de atributos o propiedades, sino sólo esos atributos, y que éstos no son extensionales (de serlo, serían clases). Luego el argumento vale de poco en su teoría.

Lo que sí es verdad es que la [pseudo]teoría de conjuntos desarrollada dentro del sistema de PP.MM. (1ª edición) necesita el axioma de reducibilidad; sin él no sería posible probar ni siquiera la versión russelliana del principio de abstracción (o sea de ⌜$\forall x(fx \equiv x \in \lambda y fy)$⌝; de hecho, cuando se pone en notación primitiva, ese principio es equivalente al axioma de reducibilidad: entráñalo y viene entrañado por él; vide [C2] p.48). Ahora bien, ello revela —a mi entender— que, si uno es consecuente en adherirse a la teoría ramificada, han de arrojarse por la borda, con el axioma de reducibilidad, toda la teoría de conjuntos y toda la teoría de los números reales.[17]

El axioma de reducibilidad engendra algo muy cercano a la existencia de propiedades impredicativas **en el sentido fuerte**, o sea en el de que caen en el ámbito de cuantificadores —y, por lo tanto, de

a la teoría ramificada pone limites a todo realismo excesivo sobre las propiedades: existirán, sí; en sí mismas, de acuerdo; pero sólo de aquella manera como hubiera podido **construirlas** mentalmente una mente infinitamente poderosa, sí, pero que sólo operase constructivamente, escalón por escalón.

16 Sobre ésta y otras cuestiones afines ofrece Chihara, op. cit. ([C2], pp.44ss) interesantes comentarios en torno al axioma de reducibilidad.

17 A menos que se abrace el principio de extensionalidad, que es lo mejor que cabe hacer dentro de una teoría ramificada consecuente —o sea: sin AR. Eso es lo que hizo Russell en la 2ª edición. (Vide infra, capítulo 10º.) Con ello, sin embargo, no se evitan todos los males, pues sigue, lamentablemente, perdiéndose hasta el mero **sentido** de buena parte del análisis numérico —teoría de números reales— y también cualquier formulación fuerte del principio de inducción matemática. Así y todo, que es lo mejor que cabe lo revela el hecho de que, mediante ese recurso, sálvanse el principio de abstracción (en la versión, eso sí, atenuada que puede brindarle una teoría de tipos u órdenes) y buena parte de los teoremas generales de teoría de conjuntos.

variables cuantificadas— que se emplean en su propia especificación.[18] Veámoslo con el mismo ejemplo examinado más arriba: el del teorema de Cantor. Con el axioma de reducibilidad pruébase que, aunque no venga abarcado por PC ese atributo impredicativo que sería $\ulcorner\lambda x(Cx\wedge\exists f(f\subseteq C\wedge(sf=x)\wedge N(fx)))\urcorner$ (donde $\ulcorner A\subseteq B\urcorner$ significa que A está incluido en B) —abreviadamente $\ulcorner h\urcorner$— (expresión que, para estar bien formada en esa teoría, habrá de comportar adecuados subíndices), aun así —supuesta la premisa de que s es una relación funcional— habrá una propiedad coextensiva con h y que sea [fuertemente] predicativa, siendo, por lo tanto, abarcada por PC. Sea g una propiedad (o clase no extensional) predicativa y coextensiva con h, e.d. con la propiedad ([débilmente] impredicativa) de ser un miembro m de C no abarcado por aquella propiedad incluida en C con la que m venga correlacionado por s.[19] Por el axioma de reducibilidad sabemos que hay alguna propiedad g así; cuya especificación es a través de la propiedad impredicativa h; h es impredicativa porque se especifica en términos de propiedades de un orden superior a los argumentos que puede tomar. Por su parte, g no será débilmente impredicativa, pero estará afectada por algo parecido a una impredicatividad fuerte, ya que g viene especificada mediante una descripción que emplea un cuantificador cuya variable habrá de tener como campo de variación uno que abarque a g. Lo único que diferencia esa situación de g de la impredicatividad fuerte propiamente dicha es que g no está **definida**, sino sólo indefinidamente descrita como **una** propiedad así o asá. Pero también eso es una especificación, aunque sea en un sentido más tenue, si se quiere. Piénsese en qué géneros, si no de paradojas exactamente, sí al menos de cuasiparadojas semánticas se podrían entonces reproducir en PP.MM. (si hemos de usar la teoría ramificada como broquel único que nos defienda de las paradojas semánticas), sin más que reemplazar ‘el’ por ‘un’, con ajustes apropiados (el embustero pasaría a ser ‘Estoy diciendo algo falso’). Sobre esta cuestión, vide las interesantísimas consideraciones de Gödel al respecto en [G2] pp.311ss.[20]

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 9º.— LA TEORÍA RAMIFICADA Y LAS PARADOJAS SEMÁNTICAS Y EL TRATAMIENTO DE LAS DESCRIPCIONES DEFINIDAS

Voy ahora a probar que la teoría ramificada (sin axioma de reducibilidad) sí es capaz de evitar las paradojas semánticas. En efecto: para no remitirme a otras cuyas especificaciones respectivas claramente contienen cuantificadores que habrían de ser del mismo orden que el ente especificado (las de Richard etc.), limitándome a la más simple, la del embustero, es esto lo que puede hacer la teoría ramificada: ‘Es falso lo que estoy diciendo’ contiene una descripción definida; la manera más eficaz de tratar tales descripciones en teoría de conjuntos es la de identificar «el ente que p» con «la unión

18 Contrariamente a lo que dice Chihara, op. cit., p.51 sub fine.

19 Nótese que no es menester que sea «la» única propiedad así: Chihara critica un análisis de Copi (que tiende a mostrar cómo con el axioma de reducibilidad se reproducen en el sistema de PP.MM. paradojas semánticas como la de Grelling, a saber la de si es autoaplicable o no la expresión ‘autoaplicable’: vide [C2], pp.53-4), alegando que nada garantiza la unicidad de la propiedad predicativa, coextensiva con una propiedad impredicativa dada, cuya existencia venga impuesta por ese axioma. Pero en la prueba de Copi parece dispensable ese supuesto de unicidad, de aplicarse una regla como la de instanciación existencial, que, en ese contexto —el de una reducción al absurdo—, sería cabalmente correcta. Lo propio parece suceder aquí.

20 Aunque no discuto en este libro las ideas de Gödel, resultará obvio a quienes las conozcan que estoy casi totalmente de acuerdo con la mayoría de ellas —aunque rechazo la existencia de «intuiciones» matemáticas en cualquier sentido un poco fuerte, o sea que vaya más allá del de meras conjeturas u opiniones.

del conjunto que abarca a cualquier ente que sea el único que p» (donde la unión de C es el conjunto de entes abarcados por uno u otro miembro de C). Eso es así porque el conjunto A que abarque a cualquier ente que sea el único que p sólo abarcará a un ente o a ninguno; si abarca a uno, la unión de A será el conjunto de miembros de ese único miembro de A —y, siendo cada ente el conjunto de sus propios miembros, esa unión será, pues, el único miembro de A; si A no abarca a ningún miembro, esa unión será la clase vacía o nula. (Para afirmar el principio de que cada ente es un conjunto —el de sus respectivos miembros— es menester identificar a cada ente de los que no se suelan concebir como conjuntos con un cierto conjunto; p.ej., a un cuerpo podémoslo ver como conjunto de sus partes, con lo cual la unión del conjunto unitario —o síngulo— que sólo abarca a la Torre Inclinada de Pisa será, ni más ni menos, esa misma torre; igualmente, una prolación puede entenderse como el conjunto de los movimientos musculares que la forman.) Bien, según eso 'Es falso lo que estoy diciendo' contiene la especificación 'lo que estoy diciendo' que sólo impredicativamente (de manera **fuertemente** impredicativa) puede verse atribuir la falsedad si ésta ha de atribuirse con sentido (con verdad o falsedad) a algo que esté yo diciendo; pues la oración significa: 'Es falso el conjunto de entes e tales que hay un único miembro, m, del conjunto de cosas que estoy diciendo tal que me [m abarca a e]' (o sea —en virtud de la hipotética identificación de unas líneas más atrás—: 'Es falso el conjunto de movimientos musculares que forman mi actual prolación'). Ahora bien, la especificación de ese conjunto comporta un cuantificador existencial, 'hay', en cuyo campo habría de figurar el propio conjunto por especificar. Luego en esa paradoja el predicado 'falso' viene empleado impredicativamente —y, por ende, infringe las estipulaciones de la teoría ramificada. Así pues, la teoría de conjuntos misma (si se ajusta al principio de predicatividad) demuestra la inexistencia de una propiedad de falsedad compartida por todo ente especificable como una prolación. Y, por ello mismo, de rebote, demuestra que no existe ninguna prolación así, cuya existencia venga presupuesta por su propia especificación. (Sólo que, acaso más bien, todo eso pone de manifiesto la falsedad del principio de círculo vicioso: «One man's *modus ponens* is another man's *modus tollens*».)

Cierto es que el tratamiento recién sugerido no es el que el propio Russell brindó a paradojas como la del embustero (cf. [C2], p.8). Sin embargo, hay motivos para preferir el tratamiento que acabo de presentar. Sabido es que, si pasó Russell de la solución provisional que había brindado en sus *Principles* de 1903 a las paradojas conjuntuales (una versión de la teoría simple de tipos, e.d. la fregeana) a la solución de los PP.MM. (la teoría ramificada) fue principalmente porque la primera no solucionaba las paradojas semánticas y no aportaba ninguna motivación o fundamentación lo bastante profunda de las restricciones tipales.[21] Pues bien, si centramos el principio [de exclusión] del círculo vicioso, o de predicatividad —que es el meollo de la teoría ramificada— en la inexistencia de una [clase o] propiedad cualquiera, $\lambda x p$, tal que ⌜p⌝ contenga un cuantificador de un orden tal que, si existiera $\lambda x p$, sería un ente de ese mismo orden (no pudiendo $\lambda x p$ especificarse de ningún modo que obvie tal dificultad), entonces cabe una solución general a las paradojas semánticas que haga de cada descripción definida un término abstractivo de la forma ⌜$\lambda x p$⌝. La teoría de descripciones que hace eso es la de Frege para lenguajes formales; teoría desarrollada, o modificada en parte, por autores como Carnap y, sobre todo, Quine.[22] Con la teoría russelliana de descripciones no salen a flote esas conexiones entre paradojas de uno y otro género. Cabe notar, por último, que tanto la teoría de descripciones definidas aquí utilizada cuanto la formulación del axioma de reducibilidad brindada más arriba presuponen —contrariamente a la formulación oficial de la teoría russelliana de tipos— que los individuos, si los hay, son [coextensivos con] [clases o] propiedades, a saber cada uno es [coextensivo con] la [clase o] propiedad de lo por él abarcado; sin embargo, no puede lo por él abarcado ser otro individuo o ente del mismo orden. Conque no puede haber ningún orden mínimo, sino que habría órdenes negativos: un individuo, p.ej. la Giralda, sería —supongamos— la clase de sus partes

21 Cf. de nuevo [C2], p.14; y también, del propio Russell «Mathematical Logic as Based on the Theory of Types», ap. *Logic and Knowledge*, ed. por R. Marsh, Londres: Allen & Unwin, 1956, pp.39-56: publicado por vez primera en 1908.

22 Vide [Q2], pp.146ss; [Q3], pp.56-8; y mis propias discusiones al respecto en el cap. VI de *Fundamentos de ontología dialéctica* (Editorial Siglo XXI, Madrid, 1987, pp.167-200) y en el cap. 14º de la Secc. II de *El ente y su ser* (Universidad de León, 1985, pp.527-57).

macroscópicas; si la primera es una «sustancia», esas partes no serían sustancias, sino «partes de sustancias»; cada una de ellas sería, a su vez, una clase o propiedad, a saber —supongamos— la de sus partes microscópicas; resulta difícil seguir imaginando cómo se continuaría hacia abajo en la escala infinitamente descendente. Alternativamente, y siguiendo a Quine,[23] podrían amortiguarse las restricciones de la teoría de tipos sólo para individuos, de suerte que cada individuo x={x} (o sea λz(z=x)). Que la Giralda **es** la Giralda sería lo mismo tanto si 'es' significa identidad cuanto si significa abarque (o su conversa: pertenencia). (A quienes, contra esa identificación quineana, alegan que es un mero expediente, cabe replicar que no sería tan implausible suponer que lo artificial resultara diferenciar —**en un caso así**— los dos 'es'. Sin embargo, mi propio parecer no coincide con el quineano; aunque no es éste el lugar de decir en qué y por qué.) Si definimos la identidad x=z como el que x abarque sólo todo lo abarcado por z (tal es la definición de Quine), entonces lo único que haría impredicativa (en el sentido fuerte) la especificación del síngulo λz(z=x) es el hecho de que, en tal caso y según la hipótesis, λz(z=x) (o sea, el propio x) sería uno de esos «todos los entes abarcados por x» (en verdad lo único). Mas ¿por qué no autorizar (sólo) **esa** impredicatividad [fuerte], la de individuos no más? Sería inocua, pues los individuos ya están dados, en la concepción constructivista de los conjuntos. Ningún daño resultará de reespecificarlos de manera impredicativa, puesto que ya estaban especificados de antemano, al venir «dados». Lo único malo sería especificar impredicativamente lo que no se supiera previamente si existe o no.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 10º.— LA EXISTENCIA DE CLASES Y LA SEGUNDA EDICIÓN DE PP.MM.

Cuando, en 1927, publicaron Russell y Whitehead la 2ª edición de PP.MM., había corrido mucha agua bajo los puentes. En un artículo publicado en polaco en 1921 —pero luego también en alemán (aunque la versión completa fue facilitada a Russell en forma de manuscrito)— L. Chwistek proponía reemplazar la teoría ramificada de tipos por la simple. Por esa misma desramificación había abogado Ramsey en 1925 ¿Cuál fue la reacción de Russell? No la de abrazar él la teoría simple, sino la de reelaborar su propia teoría ramificada. Y para mejor. Precisemos, no obstante, que [el cuerpo principal de] PP.MM. apareció inalterado; añadiéndole empero una nueva Introducción en la que venía propuesta la modificación del sistema ([W3], pp.xxxix ss.). Abandónase, con buen juicio, el axioma de reducibilidad —pues es incompatible con el propósito y la motivación filosófica del sistema. Pero, a raíz de ello, es menester cambiar la definición de identidad, pues ahora ya nada garantiza que dos entes con las mismas propiedades predicativas sean idénticos (o sea, nada garantiza que tengan **todas** sus propiedades en común). Pero, para evitar el debilitamiento excesivo del sistema que ello acarrearía —y su impotencia para fundar la matemática, aun la elemental—, compensa Russell esa pérdida postulando el principio de extensionalidad: si algo (de cierto nivel) carece de una propiedad **de un nivel determinado** poseída por otro algo (del mismo nivel), es que son entes diversos —y, por ende, si son propiedades de algún nivel, algún ente de nivel inferior posee sólo a una de las dos. (No obstante, en el sistema de Russell, bajo cualquiera de sus versiones, eso sólo puede **decirse** con sentido para propiedades **de un nivel dado**, no para cualesquiera propiedades, en general, de uno u otro nivel.) Ese reforzamiento lleva a Russell a reconocer que no existen diferencias entre conjuntos y propiedades.

23 Vide supra (nª 12).

(Vide supra (nª 13).) Con la teoría así reelaborada se pueden seguir probando resultados fuertes, como el teorema de Schöder-Bernstein, p.ej.;[24] y se gana la gran ventaja de bloquear el teorema de Cantor. Se volatiliza así la llamada matemática de los transfinitos.[25] Poca es la monta de tal pérdida, ya que no existen pruebas, independientes del teorema de Cantor, de la existencia de transfinitos inenumerables. Como lo señalan Whitehead y Russell (p.xliii) normalmente se desea probar que dos conjuntos son del mismo tamaño, y esas pruebas siguen siendo correctas según el nuevo sistema; lo único que, al respecto, se pierde es la demostración, muy raramente deseada (por motivos independientes) de que dos conjuntos dados no son del mismo tamaño —salvo si son finitos, pues entonces siguen valiendo las demostraciones. Más grave que ésa es la pérdida de versiones fuertes de la inducción matemática, pues las mismas sólo podían probarse con el axioma de reducibilidad (dentro del sistema de PP.MM.). Los autores concluyen conjeturando que hay alguna manera de reforzar su sistema —sin volver a incurrir en la postulación indeseable del axioma de reducibilidad— que permita compensar suficientemente esas pérdidas y obtener como resultado una matemática, al menos de lo finito, lo bastante fuerte. Aparentemente eso quedó en esperanza (aunque el sistema Σ de Wang podría verse como un paso interesante en tal dirección).[26] Por último conviene notar que, si bien no se prueba en el nuevo sistema de Russell que sea inenumerable el continuo (el cardinal del conjunto de los números reales), ello de por sí no entraña que se pruebe el llamado **axioma de elección** (sobre el cual se dirán unas palabras más abajo); porque tampoco se demuestra en ese sistema que el continuo sea numerable.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

24 El teorema de Schröder-Bernstein es la tesis de que, cuando exista una sobreyección de un conjunto x sobre otro, z, existiendo a la vez una sobreyección de z sobre x, entonces hay una biyección de x sobre z. (Una presentación diferente, pero en el fondo equivalente, la brinda elegantemente Javier de Lorenzo en *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos*, Madrid: Tecnos, 1972, pp. 116-7; alternativamente puede verse otra presentación —con el término de 'teorema de Cantor-Bernstein'— en Lía Oubiña, *Introducción a la teoría de conjuntos*, Buenos Aires: Eudeba, 1971, p. 127.) Un análisis interesantísimo de los presupuestos existenciales de las demostraciones usuales de ese teorema hállase en [Q3], pp. 203ss. Recordemos que una sobreyección de x sobre z es una relación funcional r (o sea tal que, para cualesquiera entes u,v, u╪v sólo si no existe ningún ente e tal que no sólo reu sino también rev) tal que no existe miembro alguno u de z sin que algún miembro v de x sea tal que rvu (no existe ningún ente abarcado por z que no sea el **valor** de la relación r para algún argumento perteneciente a r). Biyección es una sobreyección cuya conversa es también una sobreyección.

25 ¿Es eso deplorable? Quizá un tanto descreído, F. Fitch —uno de cuyos sistemas combinatorios altamente impredicativos también bloquea el teorema de Cantor (sobre alguno de ellos hablaré algo en el capítulo 14º)— ve en ello una ganancia y comenta sarcásticamente que los matemáticos que se alborozan tanto con los transfinitos son como dizque es Dios, tan aficionado a escarabajos que ha creado numerosísimas subespecies de ellos. A favor de los escarabajos y en contra de los transfinitos habría, empero, mucho que decir. Hasta Cantor, ¿a quién se le hubiera ocurrido suponer que haya varios infinitos —o, lo que es más, que haya transfinitos inaccesibles, hiperinaccesibles etc. etc.? Véase, sobre esto, el comentario que figura en la nª 43 más abajo.

26 Sobre el sistema Σ de Wang, vide en particular [C2], pp.174-240; [W2], pp.147ss; Hao Wang, *A Survey of Mathematical Logic* (Amsterdam: North Holland, 1963), última parte. Otros sistemas de sesgo predicativo fueron propuestos en los años 20 por L. Chwistek; tales sistemas revelan interesantes rasgos en teoría de pruebas. Vide A. Fraenkel & Y. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*. (North Holland, 1959), pp.150-60, 196-264. Podría articularse —siguiendo en parte los pasos de Hao Wang con su sistema Σ— una teoría de conjuntos predicativa que acudiera a un principio converso de reducibilidad, a saber: para cada conjunto de un orden hay otro coextensivo con él de orden inmediatamente superior; mas restringir el principio de abstracción de modo que —por decirlo así— no cuente sólo de qué orden »sea» un conjunto para que satisfaga una instancia del principio de abstracción, sino también a título de ente de qué orden esté «actuando»; y añadiríanse axiomas como el de la unión, que postularía que la unión de una familia de conjuntos «actúa» (¿siempre?) a titulo de ente del mismo orden que esos conjuntos (si bien con ello se arruinaría el bloqueo del embustero propuesto más arriba). En algún trabajo futuro pienso explorar tales opciones, que guardan conexión parcial con parte del procedimiento de construcción de mi sistema CD: vide capítulo 14º. Vale la pena señalar que, en «What is Logic?» (*Journal of Philosophy* 76/6, jun. 1979, pp. 285-319), Ian Hacking defiende una concepción de la lógica que ha sido muy discutida en estos años, pero que, comoquiera que sea, constituye un planteamiento interesante; pues bien, en ese trabajo muestra Hacking que la teoría subyacente a esa concepción suya de la lógica es la ramificada, precisamente. El que la teoría ramificada no pueda fundar ni el análisis numérico ni siquiera la aritmética recursiva es visto por Hacking, no como un fallo, sino como una virtud, ya que, a su juicio, la matemática no es lógica.

Capítulo 11º.— LA ESCAPATORIA DE FREGE Y EL PLANTEAMIENTO DE QUINE

Al tomar conocimiento del descubrimiento por Russell de la célebre antinomia en su sistema, lo remendó Frege del siguiente modo. Detectó primero el origen de la dificultad, que era el **principio de abstracción**, a saber (escribiendo en todo este capítulo ⌜p’⌝ en lugar de una fórmula igual a ⌜p⌝ sólo que conteniendo ocurrencias libres de ⌜z⌝ únicamente dondequiera que ⌜p⌝ contenga sendas ocurrencias libres de ⌜x⌝): ⌜∀z(λxpz≡p’⌝). Luego procedió a debilitar ese axioma reemplazándolo por éste: ⌜∀z(λxpz≡.z╪λxp∧p’⌝). Lo cual quiere decir que el conjunto de entes tales que p abarca a un ente ssi ese ente es diverso del propio conjunto en cuestión y es además tal que p. Es curioso que esa tesis tiene **algo** en común con el principio de predicatividad o (de exclusión) del círculo vicioso, a saber: un conjunto no puede ser un ente cuya especificación conlleve que uno de los entes que satisfagan la condición de membría estipulada en tal especificación sea el propio ente en cuestión; al revés, la especificación de un conjunto cualquiera, λxp, se hará siempre sobreentendiéndose que el conjunto de entes que p no tiene por qué abarcar a todos los entes que p, sino tan sólo a aquellos que, **no** siendo [idénticos a] ese mismo conjunto (λxp), sean tales que p. En otro sentido, sin embargo, ese nuevo postulado infringe, por supuesto, el principio del círculo vicioso, toda vez que la especificación de λxp de alguna manera presupondrá la existencia de λxp, o sea contendrá un cuantificador cuya variable tendrá un campo de variación en el que forzosamente esté el propio λxp. Y es que, a tenor de tal postulado, ⌜λxp=λx(x╪λxp∧p)⌝: el conjunto de entes que p es (lo mismo que) el conjunto de entes que, siendo diversos del conjunto de entes que p, son tales que p. Como lo demuestra Quine en [Q4] (pp.492ss)[27], el sistema fregeano así enmendado da lugar a demostrar que sólo existe un único objeto, la clase universal, la cual sin embargo no abarcará nada; esa clase sería idéntica a la clase nula o vacía, pues abarcaría a todo objeto existente diverso de sí mismo, o sea a ninguno: ella sería el único objeto.

En [Q4] analiza Quine las raíces de esa escapatoria de Frege —a partir de una sugerencia de Geach. Tenemos el principio de abstracción, ya citado. Tenemos el **principio de coextensión** [PCE] para abreviar, a saber ⌜∃x(p≡q⊃.λxp=λxq)⌝. Tenemos el converso de éste, CPCE, a saber ⌜∀x(λxp=λxq⊃.p≡q)⌝ (o sea, desprenexando: ⌜λxp=λxq⊃∀x(p≡q)⌝). Un conjunto puede que venga especificado de algún modo, puede que no. Lo que nos preocupa es qué pasa cuando sí viene así especificado, qué sucede con un conjunto que para cierta matriz o fórmula ⌜q⌝ es λxq. Lo primero que parece no hemos de cuestionar es el principio de coextensión, pues sin ese principio podría suceder que, p.ej., el conjunto de entes que sufren fuera diverso del de los que sufren y sufren, pese a la idempotencia de la conyunción (equivalencia entre ⌜p⌝ y ⌜p∧p⌝). En cambio CPCE ya no es tan evidente. Muestra Quine que este principio viene entrañado por el principio de abstracción —pero, habría que precisar, supuesto el principio de extensionalidad, o sea ⌜∃y(xy≡zy⊃.x=z)⌝. La reconstrucción intentada por Frege conllevaba un sacrificio de CPCE (o una matización, lo que para el caso es igual). Con ello había también de abandonar la versión irrestricta del principio de abstracción.

Para Quine conculcar el principio de abstracción sin cejar en la utilización del signo ⌜λxp⌝ encierra una grave dificultad: la de que no parece tener sentido seguir empleando la locución «el conjunto de entes que p» cuando ese conjunto o no abarca a todos los entes que p o abarca a algún ente que no p. (La negación es aquí —como en todos los autores de los que vengo ocupándome en la presente Sección— siempre negación fuerte, equivaliendo, pues, a ‘no…en absoluto’; únicamente en los últimos capítulos de esta Sección se introducirá una negación no fuerte.) En ese como en otros lugares presupone Quine que, si existe el conjunto de [todos los] entes que p entonces es un conjunto de todos

27 Una demostración más simple bríndala P. Geach, en un trabajo contenido en la misma antología en que figura (Q4), a continuación de éste (pp. 502ss). Geach exagera, no obstante, el resultado —en su presentación informal del mismo. Lo que prueba no es una contradicción; no es que sea inconsistente el sistema de Frege remendado; sino sólo que en ese sistema se demuestra que sólo existe un objeto. Es curioso que en algunas teoría de conjuntos con PA irrestricto basadas en ciertas lógicas paraconsistentes demuéstrase exactamente eso mismo, que con razón viene tachado de un grave inconveniente de tales teorías de conjuntos.

esos entes, y, por lo tanto, entonces existe un conjunto tal, o sea un conjunto que, para esa matriz $\ulcorner p \urcorner$, satisface el principio de abstracción.

Un fallo del principio de abstracción conllevaría, pues, inexistencia del respectivo conjunto de los entes que p. Hasta tal punto está normalmente convencido de ello que en muy diversos lugares equipara sin más ambas cosas. Para Quine el principio de abstracción equivale al **principio de agregación** [P.Ag] a saber: $\exists y \forall x(yx \equiv p)$, suponiendo que $\ulcorner y \urcorner$ carezca de ocurrencias en $\ulcorner p \urcorner$. En [Q4] sostiene que la ventaja del principio de agregación estriba en que éste no emplea la expresión «el conjunto de entes que p», o sea $\ulcorner \lambda xp \urcorner$, de suerte que negar una instancia del principio de agregación no acarrea decir que λxp [el conjunto que abarca sólo a todos los entes que p] no es un conjunto que abarque sólo a todos los entes que p. Ahora bien, esas consideraciones de Quine no son tan sin vuelta de hoja como pudiera parecer a sobrehaz. En efecto, distingamos tanto del principio de abstracción cuanto del principio de agregación el **principio de comprensión** [PC], a saber «Existe λxp».[28] Supuesto el principio de comprensión, el principio de abstracción entraña el principio de agregación. El entrañamiento inverso suele meramente estipularse decretando que cada instancia del principio de abstracción es una mera abreviación de la correspondiente instancia del principio de agregación (o sea estipulando que $\ulcorner \lambda xpz \urcorner$ abrevia $\ulcorner \exists y \forall x(yx \equiv p \wedge yz) \urcorner$. Sin embargo, en [Q3], con la introducción, utilísima, de la notación de «clases virtuales», el principio de abstracción resulta válido por definición, mientras que el principio de agregación no es verdadero en general (por no serlo el principio de comprensión). Pero, si bien el principio de comprensión es una premisa requerida para deducir del principio de abstracción el de agregación —a menos de hacerlo por estipulación definicional—, una instancia del principio de comprensión no entraña por sí sola ni la correspondiente del principio de abstracción ni tampoco la correspondiente del principio de agregación. ¿Por qué iba a entrañarlas? ¿Síguese de que exista el conjunto de holgazanes que ese conjunto abarca a sólo todos los holgazanes? Así sin más («de entrada»), no. ¿Qué premisa adicional es menester aducir para que se siga eso? Hace falta alegar que el conjunto de todos los holgazanes es **un** conjunto de (sólo) todos los holgazanes. Alegato que puede basarse en el argumento de que la descripción definida entraña la indefinida: «el ente que p, si existe, es un ente que p»; si veo al cartero, veo a un cartero. Llamemos a ese esquema el **principio de descripción**. Puede invocarse a su favor el **principio de especificación**, a saber «El ente que p es tal que p». Ninguna teoría de descripciones definidas puede defender una forma tan irrestricta de este último principio salvo cayendo en resultados difícilmente admisibles.[29] Pero el principio de descripción es, en cambio, mayoritariamente admitido. Mas no unánimemente. En teorías de descripciones definidas como la de Frege para lenguajes formales, las de Carnap y el propio Quine admítese en ciertos casos la existencia del ente que p sin que sea (en absoluto) un ente que p, a saber: cuando $\ulcorner p \urcorner$ es satisfecho por varios entes o no lo es por ninguno (en absoluto); entonces «el ente que p» denota al conjunto vacío. Y hay mucho que decir a favor de una opción así. Hay no obstante un defecto común a todas las teorías de descripciones hoy disponibles (incluidas las dos propuestas por el autor de estas páginas), a saber: no toman previsiones para el caso en que, no existiendo [en absoluto] un solo ente que p (o hay varios o no hay ninguno en absoluto), sí hay un ente que es el único en ser tal que q, donde $\ulcorner q \urcorner$ está «suficientemente próximo» a $\ulcorner p \urcorner$ en significado (o incluso, en vez de que haya un único ente que q, hay varios pero uno de ellos se destaca de los demás por algo —mayor grado de satisfacción del predicado o lo que sea— que hace más propio decir que él es tal que q). En un caso así no es seguro que el uso cotidiano del lenguaje imponga abstenerse de reconocer la existencia del ente que p, el cual será, en tal caso, no un ente que p, mas sí un ente que q.

28 Suplico indulgencia para con las (fácilmente explicables o hasta excusables) fluctuaciones terminológicas en este asunto. En otros muchos lugares he llamado 'principio de separación' a lo que llamo aquí 'principio de abstracción'. La primera de esas denominaciones procede de Zermelo, cuyo *Assonderungsaxiom*, sin embargo, era una versión restringidísima de lo que aquí llamo 'P.Ag' ('principio de agregación'). En Zermelo esa denominación de principio de desgajamiento o separación viene de que el esquema que él propone es éste: $\ulcorner \forall u \exists y \forall x(yx \equiv .ux \wedge p) \urcorner$: dado un conjunto u existe otro conjunto que abarca sólo a todos los miembros de u tales que p.

29 En mi libro *Fundamentos de ontología dialéctica* (cit. supra (nª 22)) discutí la articulabilidad de una teoría así tildándola de 'teoría libre de descripciones', si bien no es lo que más comúnmente recibe esa denominación, pues esto último se parece antes bien a una de las teorías que yo mismo he propuesto tanto en el lugar citado como en *El ente y su ser* (también citado en la nª 22).

Algunos tratadistas de estas cuestiones (como Saul Kripke y Ruth Barcan Marcus) hacen hincapié en una dizque discontinuidad radical y tajante entre nombres y descripciones definidas; cuando se reconoce la existencia del ente que p sin reconocerse la de un ente que p —nos dicen—, está usándose la expresión «el ente que p» como un mero nombre propio, denotativa mas no «connotativamente»; así en 'el Sacro Imperio Romano Germánico'. Dudo que lleven razón. La disparidad no es tan tajante. Porque hay grados de propiedad en la aplicación de una denominación o un predicado. Así es menos inapropiado llamar 'Imperio Romano Germánico' al de los Otones —de la Casa de Sajonia— que al de José II. También hay grados de metaforicidad. No es tan metafórico llamar a Somoza 'el monarca de Nicaragua' como lo sería llamar a Rodrigo Borja 'el monarca del Ecuador'; de hecho lo primero es casi, casi literal (en su momento).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 12º.— EL PRINCIPIO DE COMPRENSIÓN: ¿CATERVAS O CORRILLOS?

Teniendo todo eso en cuenta, podemos aceptar una instancia del principio de comprensión sin aceptar la correspondiente del principio de abstracción. Y de hecho eso es lo que viene a hacer Quine en [Q4], sólo que, más que usando, en el vernáculo idioma, «el conjunto de entes que p», valiéndose de la expresión $\ulcorner\lambda xp\urcorner$ o «la extensión correspondiente al predicado p», o circunloquios así. Dejando de lado esa cuestión como si fuera una logomaquia, veamos lo que nos dice Quine sobre su propio sistema ML.[30] De cuantas teorías de conjuntos axiomáticas han sido propuestas (dentro del marco de la lógica clásica) es ML (el sistema expuesto en [Q2]) la única que permite introducir un operador $\ulcorner\lambda x\urcorner$ de **extensión de** (para cualquier predicado dado) de manera general. Y ¿por qué? Porque para que sea aplicable en general ese operador hace falta que haya de entre todos los conjuntos uno que sea el que esté más cerca de ser el de los entes que p. Y es eso lo que pasa en el sistema ML. Aunque fracasado, el intento de recomposición de su sistema llevado a cabo por Frege en 1903 iba en tal sentido, en el sentido de poder seguir usando siempre ese operador de extensión como la mejor aproximación a lo que idealmente sería, en cada caso, el conjunto que abarca sólo a todos los entes que p; sacrificando con ello, eso sí, el CPCE (vide al comienzo del precedente Capítulo), o sea $\ulcorner\forall x(\lambda xp{=}\lambda xq{\supset}.p{\equiv}q)\urcorner$.

Si, como es obvio, no podemos postular —en general y sin reservas o restricciones— el principio de agregación (a saber: $\ulcorner\exists y\forall x(yx{\equiv}p)\urcorner$), ni por tanto el principio de abstracción, pero queremos abrazar el irrestricto principio de comprensión (a saber λxp existe), entonces habrá que adoptar medidas compensatorias adecuadas. El conjunto de entes que p será, a veces, un conjunto que abarque sólo a cuantos entes sean tales que p; pero otras veces no. Cuando no lo sea, ¿qué será? Ofrécense dos alternativas. La primera es que abarque a algo más; pero (esperamos) que sea el más pequeño de cuantos conjuntos abarquen a todos los entes que p. Ni Frege ni Quine ni nadie hasta la publicación

30 Aunque el debate terminológico no es tan baladí como pudiera pensarse. En efecto: puede que haya buenas razones para abogar por una teoría de descripciones flexible, como la aquí aludida. Sólo que habrá que trabajar duramente antes de haber resuelto las pavorosas dificultades que acarrea; sin embargo es dudoso que, sin resolverlas, lleguemos a tener una teoría de descripciones parecida a la del lenguaje natural, pues en el habla corriente menciónase «al ente que p» cuando hay analogía suficiente (variando según los contextos cuánta suficiencia sea menester) entre cómo sea el ente así llamado y cómo sería un ente, si lo hubiera, que plenamente mereciera esa denominación.

del presente libro había explorado esa vía.[31] Y es que hay motivos (no decisivos, según me parece hoy) para no optar por ella. Un conjunto que sea así (el más pequeño de los que abarquen a todos los entes que p pero abarcando a algo más) vendrá ahora llamado una **caterva**, la de los entes que p. En cambio, a un conjunto que sea el mayor de cuantos abarquen sólo a entes que p podrá llamarse **el corrillo** de entes que p.

Tanto Frege cuanto Quine (y, a la zaga de éste, el autor de estas páginas en precedentes trabajos) han preferido la postulación de corrillos a la de catervas. ¿Por qué? Probablemente porque a menudo queremos averiguar características de las cosas sabiendo que vienen abarcadas por determinados conjuntos (a saber: averiguamos que cumplen sendas condiciones características de pertenencia a esos conjuntos), lo cual no es posible si tales conjuntos son catervas. A cambio, resultaría más fácil demostrar que algo viene abarcado por un conjunto si no hubiera corrillos aunque sí hubiera catervas. Pero esa ventaja parece, a primer vista, menos importante, porque en las aplicaciones más interesantes de la teoría de corrillos pueden tomarse ajustadas medidas adicionales —aunque sean un poquitín *ad hoc*— para contrarrestar la pérdida, en general, del principio de abstracción. Y cabe temer que no resulte ni tan claro ni tan plausible ni acaso tan fácil tomar medidas adecuadas en caso de postulación de catervas.

En efecto, si hay corrillos, podemos suponer que el conjunto de entes que p, λxp, será una clase que abarque a todo lo que cumpla dos condiciones: 1ª) ser tal que p; 2ª) alguna adicional (quizá especificable para todos los casos, quizá no). Con idóneas postulaciones podemos asegurar que en muchísimos casos, por lo demás inocuos mas no anodinos, se cumple esa segunda condición. Alternativamente, si lo que postulamos son catervas tendremos que λxp será una clase que abarque a entes que: o bien son tales que p; o bien cumplan una condición alternativa. Aunque determinemos que algo cumple esta última condición y que, por ende, es abarcado por λxp, no descubrimos nada sobre si es tal que p. En general parece mucho más frecuentemente practicable que el recorrido inverso aquel camino epistémico que va de saber que algo es abarcado por una clase a saber cómo es ese algo. En particular las aplicaciones matemáticas de la teoría de conjuntos pueden parecer mejor aseguradas con sistemas que —como le sucede a ML— aceptan corrillos que con otros que sólo acepten catervas.

Y ¿por qué no intentar una solución ecléctica, la de aceptar para unas especificaciones corrillos y para otras catervas? Porque seguramente una teoría de conjuntos así sería tremendamente inmanejable. No podríamos tener en ella ninguna de las dos mitades del principio de abstracción, a saber: ni ⌜∀z(λxpz⊃p)⌝ ni ⌜∀z(p⊃λxpz)⌝ (mantengo aquí la convención sobre ⌜p⌝ del capítulo anterior). Y sin duda deseamos que al menos una de esas dos mitades sí sea teoremática en nuestro sistema, junto con la mayor aproximación posible a la otra mitad.

Ilustremos todo eso con un ejemplo: el conjunto de Russell. Sabemos que, si vale el principio de abstracción, y si además aceptamos el principio de comprensión irrestricto, o sea que λxp existe, entonces λxN(xx)λxN(xx)≡N[λxN(xx)λxN(xx)]: el conjunto de Russell se abarca a sí mismo ssi no lo hace. Para evitar esa contradicción (y la **super**contradicción que resultaría reemplazando uniformemente en esa fórmula la negación simple o natural, ‘N’, por la supernegación, ‘¬’), podemos pensar o que λxN(xx) (respectivamente, λx¬(xx)) es un corrillo, o que es una caterva. (A estas alturas, una contradicción no nos va a asustar, desde luego, pero lo malo es que si aplicáramos sin restricciones los principios de comprensión y de abstracción, surgiría la **super**contradicción siguiente: λx¬(xx)λx¬(xx)∧¬(λx¬(xx)λx¬(xx)). Y eso es harina de otro costal.) Si lo primero (si λxN(xx) es un corrillo), entonces, aunque cumplirá la condición para la pertenencia a sí mismo, no se abarcará, sino

31 Con la excepción, no obstante, de algunas «teorías de propiedades» neomeinongianas diseñadas para un tratamiento de los entes literarios. Otra excepción parcial son mis propias teorías de conjuntos donde los entes transcendentes o **perantiomáticos** (la Existencia misma y sus Atributos, los entes que en todos los aspectos tengan un grado de realidad infinito) vienen abarcados por muchos conjuntos sin cumplir, o sin cumplir en ninguna medida aproximadamente igual, la condición de pertenencia correspondiente. Además en mis teorías de conjuntos precedentemente elaboradas cada ente realmente real (existente en todos los aspectos, pues sólo ellos entraban en tales teorías en el campo de variación de las variables) pertenece a todo conjunto, aunque sea sólo infinitesimalmente. Pero con convenientes ajustes, como los que de hecho se dan en esas teorías, ese desbordamiento de los conjuntos no acarrea inconvenientes, al paso que filosóficamente ofrece la ventaja de venir motivado por el principio de gradualidad —la tesis de que todas las diferencias son de grado—, que muchas consideraciones contribuyen a hacer plausible. No discutiré aquí todo eso, que vendrá aclarado en (el cap. 1º de) mi próximo libro: *Hallazgos filosóficos*.

que se dejará («indebidamente» o «inesperadamente», en todo caso anómalamente) fuera de sí mismo. Si lo segundo, si es una caterva, entonces sí se abarcará a sí mismo, pero sin cumplir la condición (normal) para tal pertenencia: «indebida» o insólitamente se abarca a sí mismo sin ser una de las cosas que no se abarcan a sí mismas.

A pesar de todas esas consideraciones, voy a quedarme con catervas en vez de corrillos. Y es que las catervas nos aseguran una gran ventaja, a saber: un principio reforzado de extensionalidad (matizada) a cuyo tenor basta, para saber que son idénticos «dos» cúmulos dados, saber que la pertenencia a los mismos viene especificada por condiciones que son cumplidas, en todos los aspectos, por los mismos entes «normales» y en la misma medida (eso con una restricción o matización más, que luego saldrá a flote, pero que de momento no hace al caso). De haber corrillos, no bastaría saber que dos cúmulos están ligados así (p.ej. que, si son λxp y λxq, se cumple la condición ⌜∀x(Ψx⊃B(pIq))⌝, (donde ⌜Ψx⌝ es una fórmula [definida de un modo u otro, o de ninguno] que significa que x es un ente «regular» o «normal», uno de esos que, en su abarcar y venir abarcado, cumple el principio de abstracción sin reservas —o comoquiera que se especifique la condición de «normalidad» según el marco teórico-conjuntual por el que se opte). No basta eso en una teoría de corrillos porque cabe que sólo uno de entre los dos cúmulos dados (λxp y λxq) abarque también a entes irregulares pero que cumplen la condición especificativa de pertenencia al cúmulo. Por ende, en uno de tales corrillos no cabrá postular ⌜∀x(Ψx⊃B(pIq)⊃.λxp=λxq⌝ (ni siquiera tomando la precaución de que no haya en ⌜p⌝ ni en ⌜q⌝ otra variable libre que ‘x’).

Para soslayar esa dificultad, cabe, en una teoría de corrillos postular ese esquema (principio reforzado de extensionalidad): ⌜∃x(Ψx⊃B(pIq)⊃.λxp=λxq)⌝. El precio a pagar sería que, si bien entonces se tendría la identidad ⌜λxp=λx(Ψx&p)⌝, no habiendo —en ese marco— catervas, ningún ente irregular podrá, en ningún aspecto, venir abarcado, en absoluto, por ningún cúmulo, toda vez que será condición **necesaria** —y no suficiente— en una teoría de corrillos para pertenecer a λxp el ser tal que p; por ende, par pertenecer a λx(Ψx&p) el ser tal que Ψx&p; luego, para venir abarcado por λxp (sea ⌜p⌝ la fórmula que fuere) un ente tendrá forzosamente que ser regular). Una teoría de corrillos desembocaría así: o en prescindir del principio reforzado de extensionalidad; o, alternativamente, en exiliar a los entes anómalos fuera de todos los cúmulos, incluso del cúmulo universal. Con lo cual, dicho sea de paso, será muy difícil —o imposible del todo— concebir una modelización apropiada para la teoría. Cualquier universo de entidades que se tome como modelo sería algo que no podría describirse con verdad en términos de la propia teoría, ya que ésta no admitiría ningún cúmulo de veras universal (los entes irregulares no vendrían abarcados en absoluto por ningún cúmulo, ni por lo tanto tampoco por un cúmulo dizque universal).

Nada semejante sucede postulándose catervas. El cúmulo absolutamente universal, aquel que lo abarque absolutamente a todo (a todo ente plenamente en todos los aspectos) no dejará de sí nada, y ni siquiera tendrá que ser una caterva, salvo que tenga alguna especificación con respecto a la cual sí lo sea. Que, como puede haber varias especificaciones para un cúmulo, una clase puede ser caterva con respecto a una de las dos especificaciones sin serlo con respecto a la otra. Así, podemos aseverar el principio reforzado de extensionalidad (o, mejor, una versión matizada del mismo, que luego veremos); un cúmulo dado cualquiera, λxp, será también λx(Ψx&p); podrá ser una caterva con respecto a la especificación ⌜Ψx&p⌝ (e.d. podrá abarcar a entes x que no cumplan **en absoluto** esa condición, aunque sí cumplan la otra, ⌜p⌝).

Con una teoría de cúmulos que acepte catervas, mas no corrillos, podemos pensar que la Realidad lo abarca todo, al paso que con una con corrillos y sin catervas sólo podremos concebir que la Realidad abarque a todos los entes regulares (a menos que abandonáramos el principio reforzado de extensionalidad —mas, si lo hiciéramos, quedaría muy maltrecha la fecundidad teorética del cálculo resultante).

Así pues, el balance de este debate me lleva a inclinarme por el reconocimiento de catervas y el rechazo de corrillos. Todo cúmulo abarca a todo cuanto cumple su condición especificativa de pertenencia en la medida en que lo cumple; podrá abarcar también a otras cosas que no cumplan, en absoluto, esa condición especificativa. Así, el cúmulo russelliano fuerte, λx¬(xx), se abarcará a sí mismo aun sin cumplir en absoluto su condición especificativa (la de no venir en absoluto abarcado por sí mismo).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 13º.— LOS ELEMENTOS Y LA CONDICIÓN DE ESTRATIFICACIÓN: NEW FOUNDATIONS

Ya vimos cuáles eran los corrillos de Frege: λxp era el de los entes x⫩λxp tales que p. En el sistema de Quine ML λxp es el corrillo de elementos tales que p. Un **elemento** es algo abarcado por uno u otro conjunto. (La idea fue elaborada en 1925 por von Neumann, pero, al igual que tantas otras, tiene sus precursores.[32]) Conque el principio de abstracción de ML dice que viene abarcado por λxp todo ente que, viniendo abarcado por uno u otro conjunto, es tal que p. Y ¿cuáles entes son elementos? Hay en ML un esquema axiomático adicional, el **principio de elementaridad**, que dice que es un elemento todo conjunto λxp tal que la matriz ⌜p⌝ cumple ciertas condiciones, a saber: 1) ⌜p⌝ está estratificada; 2) cada cuantificador en ⌜p⌝ está restringido a elementos; 3) además la instancia en cuestión de ese esquema es afirmada sólo condicionalmente, como apódosis de una prótasis que diga «Si es un elemento x^1, y lo es también x^2, …, y lo es x^n», donde $x^1,\ldots,x^n$ son todas las variables que figuren libres en ⌜p⌝.

La condición (3) asegura que no se cuelen indirectamente entre los elementos entes que no puedan serlo. Algo similar pasa con la condición (2).[33] Bien, lo único que nos ha de ocupar ahora es la condición (1). El punto de partida es la teoría **simple** de tipos. En ella una concatenación o yuxtaposición ⌜xy⌝ está sintácticamente bien formada sólo si ⌜x⌝ es del tipo inmediatamente superior a ⌜y⌝. En la teoría de tipos originaria había también tipos de relaciones; una concatenación ⌜$xy^1\ldots y^n$⌝ que no sea una subconcatenación de otra más larga está bien formada si (expresando por ⌜t(z)⌝ el tipo de la variable ⌜z⌝, para cualquier ⌜z⌝) $t(x) = \langle t(y^1),\ldots,t(y^n)\rangle$. Wiener y Kuratowski contribuyeron a idear un procedimiento para prescindir de tipos no monádicos. En vez de concebir una relación diádica r como un algo que venga atribuido en cada caso a dos entes «tomados en cierto orden», pasa r a ser concebida como una **propiedad** [monádica] no de esos entes, u, v, sino de la **díada** (dúo ordenado) <u,v>, donde tal díada viene definida como el dúo {{u},{u,v}}, o sea un dúo (conjunto de dos miembros) que abarca sólo, por un lado a {u}, por el otro lado a {u,v}; {u} es {x:x=u}, al paso que {u,v} es {x:(x=u)∨(x=v)}. (Hubiera podido definirse {u,v} como {{v},{u,v}} desde luego; poco importa, con tal que se haga siempre igual.) El tratamiento de las relaciones según ese procedimiento de

32 Von Neumann las llamó 'clases propias' y, en escritos posteriores, Quine las ha denominado 'clases últimas'. La idea, al parecer, se remonta a König (1905) y Cantor (1899) (vide [Q3], p.302). Los dos sistemas en los que más fecunda se ha revelado esa idea de admitir no elementos (entes inclasificables) son el propio sistema ML de Quine y el de NBG (von Neumann-Bernays-Gödel). Simplificando bastante, cabe decir que éste último es al de ZF como ML es al sistema precedente de Quine — del cual se hablará más abajo—, NF. Sólo que NBG es muchísimo más apocado y parco en su agrandamiento del universo de ZF. NBG sólo acepta [las instancias correspondientes d]el principio de comprensión —e.d. la existencia de λxp— cuando los cuantificadores en ⌜p⌝ vengan restringidos a elementos. (Vide [Q3], pp. 310ss.)

33 La condición (2) fue añadida por Hao Wang, pues faltaba en la primera edición de [Q2], razón por la cual el sistema de esa primera edición era inconsistente (y, en lógica clásica, inconsistente significa también delicuescente). Otros problemas sobre las teorías de conjuntos de Quine ML y NF vendrán abordados en otro articulo, en preparación ya.

Kuratowski suscita un cierto número de dificultades.[34] Así y todo, imaginemos aquí que resuelve satisfactoriamente los problemas y, en adelante, limitémonos a las propiedades monádicas (salvo lo que se dirá más abajo, en el Capítulo siguiente, sobre el tratamiento combinatorio).

El requisito (1) para cualquier instancia del principio de elementaridad es que $\ulcorner p \urcorner$ sea una fórmula que, traducida al lenguaje de la teoría [simple] de tipos, tendría sentido en la misma. Como ML no es una teoría de tipos, las variables no llevan índices superescritos o suscritos, sino que son generales. Pero, si tradujéramos a la teoría de tipos una fórmula de ML, tendríamos en cada caso asignar a cada variable uno u otro tipo. Bien, si hay una traducción así de una fórmula $\ulcorner p \urcorner$ de ML que sea una fórmula correctamente formada de la teoría de tipos, entonces (con tal que se cumplan los otros dos requisitos para $\ulcorner p \urcorner$) λxp es un elemento. Lo cual quiere decir que toda clase cuya existencia tenga sentido afirmar en la teoría de tipos será un elemento en ML. En la teoría de tipos sólo tiene sentido afirmar la existencia de un conjunto cuando es teoremática esa afirmación; por ende, sólo tiene sentido negar la existencia de un conjunto cuando tal negación es declarada falsa por la propia teoría. Al pasarse de la teoría de tipos a ML sucede, en cambio, que todo conjunto que la teoría de tipos declara ser un elemento —y la teoría de tipos declara que cada conjunto es un elemento— es también reconocido como un elemento por ML; los demás conjuntos son reconocidos como existentes, pero no siempre como elementos. Muchos conjuntos cuya existencia o inexistencia no tenía sentido decir en la teoría de tipos son proclamados en ML como no-elementos, entes inclasificables, pero así y todo conjuntos. Aunque habrá algunas de tales clases que en ML no sólo existan sino que sean elementos (su condición de tales vendrá probada indirectamente). Así pasa con la clase universal, V ($=\lambda x(x=x)$). Como la matriz $\ulcorner x=x \urcorner$ cumple los tres requisitos, $\lambda x(x=x)$ resulta ser un elemento; y, una vez probado eso, resulta así ya sin sujeción ninguna a tipos. En teoría de tipos para cada variable $\ulcorner x \urcorner$ existe $\lambda x(x=x)$, pero eso disimula el hecho de que no existe ningún conjunto universal sino uno para cada nivel o tipo. En ML es transitorio el paso por las horcas caudinas de las construcciones sintácticas de la teoría de tipos; una vez efectuado, se emancipa la expresión de toda sujeción a tipos. (Además demuéstrase en ML que $\lambda x(x=x)$, o sea V, es idéntico a $\lambda x\exists y(yy\wedge yx\wedge .x=x)$, aunque en teoría de tipos la matriz que figura en este último designador de clase ni siquiera está bien formada.)

¡De qué no se habrá motejado a tal principio de elementaridad! (En otro lugar discutiré esas objeciones.) La verdad es que, cualquiera que sea la base «intuitiva» de la teoría de tipos (y alguna habrá que reconocerle, ¿no? —aunque sería mejor abstenerse de usar una palabra tan manoseada y malsocorrida), se conserva incólume en ML, sólo que mucho mejor.[35] En efecto: ¿para qué tildar de «sin sentido» a ciertos asertos cuando se evitan las paradojas reputando muchos de esos dizque sinsentidos meramente como afirmaciones falsas —y alguno que otro, de paso, como una tesis verdadera, puesto que sólo a causa de un rebote indeseado venía excluido por las draconianas restricciones de la teoría de tipos? El engorro de tener que adjudicar tipos a las variables ya no es aquí —sí lo era en teoría de tipos— un amargo vía crucis que había que seguir recorriendo a todo lo largo de cualquier demostración de arriba abajo —y de cualquier serie de ellas—, sino tan sólo un requisito para aseverar una instancia cualquiera del principio de elementaridad.

Sin detenernos en esta cuestión, sí conviene apuntar algo sobre la relación entre ese sistema propuesto por Quine en 1940 (ML) —ulteriormente perfeccionado por Hao Wang para curarlo de su inconsistencia inicial— y otro propuesto por Quine tres años antes, NF, hasta ahora resistente a intentos de probar que es incoherente (Hao Wang ha probado que, si no lo es, tampoco lo es ML). En NF —al

34 Sobre ese tratamiento de las relaciones vide *Fundamentos de ontología dialéctica* (op. cit. en la nª 22, supra), cap. II.10, pp.72ss. Vide también mi articulo «Notes on Bergmann's New Ontology and Account of Relations», *Philosophy Research Archives* 12 (1986), pp. 221-49.

35 Desde la perspectiva de ML cabe reconocer que la base «intuitiva» de la teoría de tipos es, precisamente, que sólo hay garantía de que un ente, en general, sea clasificable cuando pueda venir especificado sin infringir la estratificación; no porque carezca de sentido toda infracción de la estratificación; ni siquiera porque toda infracción haya forzosamente de ser falsa; sino por esto solo, a saber: que un conjunto especificable de manera estratificada es un ente la pertenencia al cual no conlleva anomalías susceptibles de enredarlo en líos o dificultades si él mismo viniera luego a pertenecer a otros conjuntos (o a sí mismo, que suele ser lo más escabroso). Reconócese que lo «normal» es un escalonamiento de abarques: el abarque por un conjunto de conjuntos de «nivel» inmediatamente inferior y así sucesivamente. (Aunque luego, indirectamente, pruébase que esa normalidad no se da de manera general.) Además, los niveles no son rasgos consustanciales e inamovibles, sino papeles que se desempeñan.

igual que en la teoría de tipos— todo ente es un elemento (y, por supuesto, viceversa), pero no se postula el principio de comprensión, «λxp existe» (en general), sino un principio de comprensión más restringido: Si ⌜p⌝ es una fórmula estratificada, λxp existe. La relación entre ML y NF es, más o menos, ésta: todo conjunto cuya existencia viene afirmada en NF es un elemento en ML; pero en ML existen además otros entes, que son conjuntos, pero que no vienen abarcados por nada aunque ellos sí abarcan algo. Cuando NF asevera la existencia de λxp, ¿cuál es el ente, λxp, que en ML es un elemento? Aquel cuyas variables vienen restringidas a entes cuya existencia se postulaba en NF —para lo cual están las condiciones (2) y (3) del principio de elementaridad. (Restringir a elementos los cuantificadores quiere decir que no haya ninguna cuantificación universal, ⌜∀xq⌝, que no sea ⌜∀x(*elem*x⊃q')⌝, ni cuantificación existencial alguna ⌜∃xq⌝ que no sea de la forma ⌜∃x(*elem*x∧q')⌝ —donde ⌜*elem*x⌝ significa «x es un elemento».) La relación entre NF y la teoría de tipos es ésta: todo conjunto que en ésta última viene reconocido como existente también lo es en NF; casi todos los demás son considerados como inexistentes en NF (a saber los no elementos de ML), pero, al igual que en ML, en NF algunos conjuntos inaceptables en teoría de tipos consiguen, indirectamente, el reconocimiento de ser elementos.

No permitiéndome la angostura de espacio explayarme en estos temas, diré no más para concluir este capítulo, que tanto NF cuanto ML son sistemas filosóficamente plausibles, muy potentes, basados en consideraciones juiciosas, exentos de la tremenda adhocidad de las postulaciones de casos particulares del principio de comprensión que con cuentagotas vienen efectuadas en otras teorías de conjuntos (la teoría estándar —tan en boga entre los matemáticos— de ZF y otras afines como NB). NF ofrece la ventaja adicional de que **puede** ser verdadera —**puede** en el sentido epistémico de «poder», a saber: el de que no tenemos pruebas suficientemente fuertes de que sea falsa—, al paso que, desgraciadamente, no les sucede lo propio ni a ML ni a ninguna versión de la teoría estándar; porque para que sea verdadera una teoría de conjuntos hace falta que sea verdadero lo que dice; NF dice que hay un conjunto universal y que él abarca a todo; ML dice que lo hay pero no abarca a todo; la teoría estándar dice que no lo hay. Pero, si es verdadera una teoría de conjuntos, entonces tiene un modelo, **que es la Realidad**; si existe ésta, existe el conjunto universal; si deja sin abarcar algo, ese algo no es real.

Luego sólo NF cumple la condición de poder tener a la Realidad como modelo. (Sólo, de entre esas alternativas, claro.) Lo malo es que NF no carece de inconvenientes. Paso por alto el que con ella se prueban resultados reputados «raros», pues las matemáticas pululan en consecuencias sorprendentes, que lo dejan a uno de piedra. No, lo malo de NF es que no permite probar ninguna versión fuerte del principio de inducción matemática. Y malo también es que no acepte en general el principio de comprensión, la existencia de λxp, para cualquier ⌜p⌝. (Con lo cual, por cierto, vienen consiguientemente restringidos los dos principios de abstracción y de agregación: el primero, con una premisa de existencia de λxp; el segundo, con la condición de estratificación de ⌜p⌝.) En cualquier caso, lo que no cabe soslayar es que tanto NF como ML, heredando ambas cuanta base justificativa sana pudiera abonar a favor de la teoría simple de tipos, están exentas de las dificultades filosóficas que asediaban a esa teoría, como su inefabilidad, la plurivocidad de los prefijos cuantificacionales '∀' y '∃' y la falta de una noción general de existencia —con lo cual ni siquiera estaba claro qué se quería decir al proferir las oraciones (condenadas, por lo demás, como sinsentidos por la propia teoría) que aseveraban la existencia en lo real tanto de entes de cierto nivel cuanto de entes o conjuntos de niveles superiores. Si algún núcleo de verdad había en la teoría simple de tipos, agotábase en brindar una manera de obviar las paradojas aduciendo el comportamiento «normal» del abarque —o no abarque— de conjuntos de nivel inferior por los de nivel inmediatamente superior. La realidad será —así lo reconocen ML y NF— normal en los más casos; pero no en todos.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 14º.— UNA ALTERNATIVA DIFUSA, PARACONSISTENTE Y COMBINATORIA

No sólo en la lógica clásica sino también en la mayor parte de los sistemas de lógica no-clásicos el cálculo cuantificacional (de primer orden) se construye sobre la base [y a partir] del cálculo sentencial, al paso que la teoría de conjuntos se construye sobre la base [y a partir] del cálculo cuantificacional. (Según lo ha puesto de relieve Quine en diversos lugares, los llamados cálculos cuantificacionales de órdenes superiores a 1 no son sino teorías de conjuntos de la índole, precisamente, de teorías de tipos; son, pues, teorías de conjuntos plurisortales, donde un sistema es plurisortal si tiene varios tipos de variables no intercambiables, e.d. si es tal que, no porque dos signos, ⌜f⌝, ⌜x⌝, se combinen, por separado, con un mismo prefijo cuantificativo '∀' (o '∃') para formar cuantificadores ⌜∀f⌝, ⌜∀x⌝, no por eso van a ser reemplazables en otros contextos esos dos signos sin desmedro de la corrección sintáctica.) Las lógicas combinatorias son en cambio sistemas en los cuales existen ciertos signos primitivos, entre ellos unos **combinadores**, de tal índole que mediante concatenaciones cualesquiera de ellos se obtienen las fórmulas no sólo del cálculo sentencial y del cuantificacional, sino también de la propia teoría de conjuntos. (O sea: al venir reducidas a notación primitiva, las fórmulas del cálculo sentencial y del cuantificacional son ya fórmulas de la teoría de conjuntos; en vez, pues, de que venga ésta construida con vocabulario adicional al del cálculo cuantificacional, éste está formado por fórmulas que son abreviaciones de sendos asertos teórico-conjuntuales. Eso no obsta para que también en una lógica combinatoria la teoría de conjuntos propiamente dicha sea extensión del cálculo cuantificacional, a saber: éste es un subconjunto propio de los teoremas, al paso que aquélla no lo es.) Los axiomas, postulados y reglas de inferencia aseguran que el sistema tenga, así, toda la fuerza de una teoría de conjuntos al par que, con ello naturalmente también, de un cálculo cuantificacional y, por ende, de un cálculo sentencial. Además, las teorías de conjuntos así obtenidas pueden ser muy potentes; aunque habrá que pagar el precio de que el cálculo sentencial sacrifique algo del de la lógica clásica, so pena de incoherencia (delicuescencia).

Cífrase la diferencia recién señalada en que, según el modo de proceder más usual (el «clásico»), los signos del cálculo sentencial no se definen a partir de signos del cálculo cuantificacional, ni éstos a partir de los de la teoría de cúmulos o conjuntos; en cambio, en una lógica combinatoria todos los signos vienen definidos a partir de ciertos operadores o combinadores teórico-conjuntuales.

Un **combinador** es un signo µ que viene caracterizado porque, para todos (o muchos) signos ⌜p^1⌝, ⌜p^2⌝, …, ⌜p^n⌝, la concatenación ⌜$\mu p^1 p^2 \ldots p^n$⌝ (con asociatividad hacia la izquierda —o sea ⌜pqr⌝=⌜(pq)r⌝ etc.) es reemplazable **con verdad**, en virtud de los postulados del sistema por otra en la que ya no figura la ocurrencia inicial de 'µ' y que es el resultado de combinar de diversos modos ⌜p^1⌝, …, ⌜p^n⌝; o sea, la nueva concatenación es la concatenación de concatenaciones de… de concatenaciones de ⌜p^1⌝, …, ⌜p^n⌝ (no forzosamente de todos ellos). En un sistema combinatorio, cualquier combinación o concatenación (yuxtaposición) de signos es también un signo.

Una manera particularmente elegante de introducir un cálculo combinatorio es con ayuda de dos combinadores primitivos, Σ, Λ, tales que, para todos los símbolos (o muchos de ellos) ⌜p⌝, ⌜q⌝, ⌜r⌝: ⌜Σpqr=pr(qr)⌝; ⌜Λpq=p⌝. 'Σ' denotará a la relación que se da, p.ej., entre el admirar, la belleza y Narciso, puesto que Narciso admira su propia belleza —o sea: Narciso se admira la belleza—: trátase, pues, del **operador de voz media** o automediador; Λ será la relación que se da entre un ente y otro cualquiera en la medida en que existe el primero de ellos —una relación tal que el que se dé entre Ceilán y Singapur es, ni más ni menos, el propio Ceilán; con otras palabras Λ será la determinación de ser un ente, x, tal que existe la determinación de ser un ente, z, tal que existe x. (Presupongo la identidad entre un ente y su existencia.)

Con ayuda de esos dos combinadores defínense otros. Uno, Δ, es así: defínese como Σ(ΛΣ)Λ; y es tal que para todos los argumentos (o muchos de ellos), p, q, r: Δpqr=p(qr); es un **asociador** (es, p.ej., la relación que hay entre la fama, la crueldad y Alejandro en la medida en que sea famosa la crueldad de Alejandro). Otro combinador, Γ, viene definido como Σ(ΔΔΣ)(ΛΛ) y es tal que para todos o muchos p, q, r: Γpqr=prq; es, pues, un operador de **conversión**: la relación que, p.ej., se da entre el conquistar, la Galia y César, en ese orden. (Si p=amar, Γp=ser amado.) Luego tenemos 1, definido como ΣΛΛ, que es la existencia (o verdad): una determinación tal que, para cualquier p, 1p=p (ya que, en efecto, cada ente es lo mismo que su existencia, según he tratado de probarlo en diversos trabajos). Otro combinador es Ω, definido como ΓΣ1, que es tal que, para todos o muchos p, q: Ωpq=pqq: trátase del **reflexivizador** (una relación que guarda el coronamiento con Napoleón cuando Napoleón se corona a sí mismo).

Supongamos que tales ecuaciones valen sin restricción alguna y que el sistema contiene un operador de negación ~. Entonces pruébase lo siguiente. Sea R definido como Ω(Δ~); demuéstrase fácilmente esto: RR=~(RR). Ahora, si el sistema contiene también reglas que de ⌜p=q⌝ y ⌜∨rp⌝ (nótese que esta última fórmula sería usualmente escrita así: ⌜p∨r⌝) permitan deducir ⌜∨rq⌝, entonces, si el sistema contiene el principio de tercio excluso ⌜∨(~p)p⌝, de RR=~(RR) cabrá deducir: ∨(~(RR))(~(RR)); lo cual es obviamente equivalente a ~(RR) (pues ⌜=p(∨pp)⌝). De manera similar se demostrará RR. Y así tendremos la contradicción: RR∧~(RR), si es que el sistema es **copulativo** (e.d. tal que contenga la regla p, q ⊢ p∧q: lo que es verdadero por separado es también verdadero junto, conyuntado lo uno con lo otro).

Una solución es, precisamente, la que consiste en abandonar el principio de tercio excluso. Tal es el enfoque de Fitch, en su sistema Q.[36] Nótese que R es el conjunto de Russell (también podemos denotarlo con la expresión 'Σ(Λ~)(Σ11))'. En el sistema Q de Fitch demuéstrase, pues, que el autoabarque de R por sí mismo es idéntico al no autoabarque de R por sí mismo; con otras palabras, que tal autoabarque es lo mismo que la inexistencia del mismo. Pero no se deduce ninguna contradicción o antinomia de la forma ⌜p∧~p⌝.

Que una lógica combinatoria como la de Fitch constituye una poderosa teoría de conjuntos muéstralo el hecho de que en la misma valen sin reservas los principios de comprensión (PC) —o sea la existencia en general del conjunto de entes que p— y de abstracción (PA) —o sea que el que ese conjunto abarque a algo, x, es idéntico a que ese x sea tal que p. En efecto, definimos así las expresiones abstractivas. Suele usarse, en este contexto, el operador lambda minúscula, en vez del circunflejo (aunque yo no voy a usar aquí ninguno de ellos, sino las llaves, mucho más corrientemente utilizadas hoy en teoría de conjuntos). De ahí que los llamados **cálculos lambda** constituyan variantes notacionales de sendas lógicas combinatorias. La enorme importancia de tales cálculos ha venido recientemente realzada y patentizada todavía más por el empleo de los mismos en teoría de la computación y en lenguajes de programación. (Vide, p.ej., [S3], donde figura una excelente y logradamente pedagógica exposición de los cálculos lambda en ese contexto; para un tratamiento más a fondo de los cálculos en sí, vide [B1]; cf. también [P5].)

Para una fórmula cualquiera ⌜r⌝, dada otra fórmula ⌜p⌝, defínese ⌜{r:p}⌝ así: si ⌜r⌝=⌜p⌝, ⌜{r:p}⌝='1'; si ⌜r⌝ no figura en ⌜p⌝, ⌜{r:p}⌝=⌜Λp⌝; cuando no se da ninguna de esas dos circunstancias y ⌜p⌝=⌜sq⌝, entonces ⌜{r:p}⌝=⌜Σ{r:s}{r:q}⌝. Con esas definiciones pruébanse el principio de comprensión y el de abstracción. (Nótese que en un sistema combinatorio no hacen falta variables, aunque pueden introducirse como símbolos definidos; el cuantificador —sea el universal, 'U', sea el existencial, 'E'— viene postulado como un primitivo —si 'U' es primitivo, defínese 'E' así: Σ(Λ(Σ(Λ~)U))(Σ(Λ~)); y viceversa; la universalidad, lo denotado por 'U' es aquella determinación que abarca a una determinación o clase, sea la que fuere, sólo en la medida en que ésta, a su vez, abarque a cualquier ente; es, pues, la determinación de abarcarlo todo.)

Pero el precio a pagar es demasiado alto. El principio de tercio excluso es el más útil y evidentemente verdadero de todos los principios lógicos. Ninguno tanto como él anda en la boca de

36 Vide Frederic B. Fitch, *Elements of Combinatory Logic*, New Haven: Yale U.P., 1974.

cualquiera, del hombre de la calle, a cualquier hora; ninguno como él es fértil para demostraciones científicas; decimos: «O bien p, o bien no-p; si p, tal cosa; si no-p, tal otra; luego o tal cosa o tal otra». Despojarnos de la legitimidad de tales modos de razonar parece un costo excesivo para, a cambio, lograr tener un principio de comprensión y uno de abstracción irrestrictos; la plausibilidad de estos dos principios es menor que la del tercio excluso.

Mas, ¿no hay contraejemplos aparentemente persuasivos contra el tercio excluso? Aparte de que se ha alegado que falla en oraciones cuyos sujetos sean inexistentes —lo cual es muy discutible y, a mi juicio, equivocado—, y aparte también de los presuntos fallos de ese principio proclamados por los adeptos de la matemática intuicionista, aquello que más a menudo se ha aducido contra la corrección general del tercio excluso es la existencia de propiedades difusas. No podría —alégase— decirse 'Es guapo o no lo es', porque hay grados de guapura y puede que tenga tal propiedad sólo hasta cierto punto. Bien, efectivamente, pero eso no entraña que no pueda decirse esa disyunción: si tiene guapura hasta cierto punto, tiene guapura. (Tal es —según venimos sabiéndolo desde la Sección I de este libro— la **regla de apencamiento**, basada en este principio: es verdadero cuanto no sea totalmente falso.) Para que sea (en algún grado, mayor o menor) correcto, fiel a la realidad —verdadero, en suma— decir algo no es menester que lo así dicho sea plenamente verdadero, sino que basta con que tenga (en ese grado) verdad, a secas. Una prolación es totalmente falsa si no mienta o denota hecho alguno real; pero si denota algo, un hecho que posea algún grado de existencia, alto o bajo, entonces la prolación será —en ese mismo grado— verdadera. Y, por eso mismo, cuando nos topamos con hechos difusos o graduales —como los que consisten en el abarque de un individuo por una determinación o clase en un grado no pleno—, no es que nos abstengamos tanto de decir '**Sí**' cuanto de decir '**No**' y asimismo de decir sí o no; antes bien decimos: 'Ni es calvo ni deja de serlo' (o 'Ni es calvo ni no es calvo'), 'Ni me gusta ni deja de gustarme', 'Ni fue divertido ni dejó de serlo', 'Ni llueve ni no llueve', 'Ni es árido ni deja de serlo' etc. etc. Ahora bien, tanto en la lógica clásica cuanto en el sistema Q de Fitch y, en verdad, en la mayor parte de los cálculos lógicos, «Ni p ni no q» equivale a «q y no-p» (dedúcese tal equivalencia de una de las leyes de DeMorgan más el principio de involutividad); por consiguiente, «Ni p ni no p» equivaldrá a «p y no p». 'Ni llueve ni no llueve' equivale a 'Llueve y no llueve'; que es lo que efectivamente suele decirse en casos de garúa u orballo. Lo propio sucede con cada uno de los demás ejemplos.

Resulta entonces que lo entrañado por la existencia de determinaciones difusas, y de abarques difusos o graduales por tales determinaciones de unos u otros entes, es, no una quiebra del tercio excluso, sino, antes bien, la existencia de verdades mutuamente contradictorias. Lo cual no constituye tampoco una quiebra del principio de no contradicción, una ausencia de verdad de este principio, sino una presencia, junto a él, de verdades que son negaciones de instancias particulares de dicho principio. Nos hace falta, pues, no una lógica sin tercio excluso, sino una lógica que, con él, así como también con el principio de no-contradicción, autorice a la vez la existencia de verdades mutuamente contradictorias, e.d. de contradicciones verdaderas (verdaderas y simultáneamente —en virtud del principio de no contradicción— falsas). Una lógica así será una lógica **paraconsistente**. ¿Qué requisitos ha de cumplir una lógica para ser paraconsistente? No entronizar la regla de Cornubia (aquella que de un par de premisas mutuamente contradictorias, sean las que fueren, permite concluir cualquier cosa). Para evitar esa regla de Cornubia hay que abandonar también el silogismo disyuntivo: $p \lor q$, $Np \vdash q$.

El **cálculo de determinaciones**, CD, es una lógica combinatoria propuesta por el autor de estas páginas; la versión que de ella expongo a continuación difiere de otras publicadas en trabajos anteriores; pero en un sentido profundo —aunque no estándar— se trata de un solo y mismo sistema.[37]

Concluiré este capítulo enumerando algunos rasgos de ese sistema.

— Al igual que en cualquier otro sistema combinatorio, cada ente es una relación. El que p esté guardando una cierta relación r con un ente q viene expresado así: rpq; o sea, consiste en que el

37 Uno de los precursores —o, si se quiere, una de las encarnaciones previas— del sistema aquí propuesto, CD, es el sistema *Ac*, que presenté en el trabajo «Algunos resultados recientes en la articulación de lógicas temporales», ap. *Lenguajes naturales y lenguajes formales*, comp. por Carlos Martín Vide, Barcelona: Universidad de Barcelona, 1989, pp. 413-39.

venir abarcado p por r abarque a su vez a q (p, q serán entes cualesquiera). El amor de Buda es, pues, la determinación de ser amado por Buda.

— Existen en CD las dos negaciones de *Aj* que ya conocemos, a saber: una débil, ‘N’, y otra fuerte, o **supernegación**, ‘¬’; la última se puede definir así en CD: ¬=Σ(ΛH)N.

— En CD no se acepta el principio clásico de extensionalidad ⌜(∀x,y∃z(xz≡yz⊃.x=y))⌝, pero sí este otro (siendo ‘0’ una constante definida que se lee ‘[Existe] lo absolutamente falso’ y que no significa o denota nada): ⌜∀x,y∃z(B(x0Iy0∧.xzIyz)⊃.x=y)⌝: son idénticas dos determinaciones si es afirmable con verdad que la una abarca a cualquier ente en la misma medida en que lo haga la otra y si, además, es también afirmable con verdad que la una abarca a lo absolutamente inexistente en la misma medida en que lo haga la otra. Vale también en CD esta **regla de extensionalidad**, x0Iy0∧.xzIyz ├ x=y —aunque no la regla clásica de extensionalidad, a saber: xz≡yz ├ x=y. (Ya sabe el lector que es teoremático en *Aj* —siéndolo, por lo tanto, también en CD, que es una extensión de *Aj*— el esquema: ⌜pIq⊃.p≡q⌝, mas no el recíproco ⌜p≡q⊃.pIq⌝; porque ⌜pIq⌝ quiere decir que ⌜p⌝ y ⌜q⌝ son igual de verdaderos (o falsos), al paso que ⌜p≡q⌝ únicamente excluye que uno de los dos sea verdadero y el otro enteramente falso.)[38]

— En CD vale la mitad del principio de abstracción: ⌜p→{r:p}r⌝.

— En CD vale para una amplia gama de casos el esquema recíproco del anterior, o sea la otra mitad del principio de abstracción. En particular valen las ecuaciones siguientes (la identidad, =, puede definirse en CD así: ⌜p=q⌝ abr. ⌜B(pIq)⌝): ⌜{x:p}x=p⌝; ⌜{x:p}r=p⌝ (si ⌜p⌝ es el resultado de reemplazar uniformemente en p las ocurrencias libres de ⌜x⌝ por sendas ocurrencias libres de ⌜r⌝, y si ⌜r⌝ es una expresión que no contenga ni ‘H’ ni ‘I’); además de esas ecuaciones, muchas otras instancias del principio de abstracción son demostrables en CD, pero su formulación es algo más larga.

— CD es un sistema contradictorio (vide infra, §2 del capítulo 15º, págª 245).[39] Contiene, en particular, contradicciones como ésta (definiendo ‘R’ como más arriba): ‘RR∧N(RR)’. En cambio, cuando se defina ‘R’ como ‘Ω(Δ¬)’ o su equivalente ‘{x:¬(xx)}’, entonces pruébase ‘RR’, pero no ‘¬(RR)’. Por ello pruébase para algunas oraciones ⌜p⌝ y ⌜r⌝: ⌜¬({r:p}r=p)⌝. {x:¬(xx)} es una

38 En la práctica, vale para casi todos los casos una regla de extensionalidad más fuerte, a saber xzIyz ├ x=y. (Para probar esa regla úsase la regla, derivada en CD, de universalización existencial: p ├ ∀zp.) Porque en casi todos los casos se prueba fácilmente o bien x0Iy0 o bien ¬(x0Iy0). Y sólo en algún caso muy excepcional es verdad ∀zB(xzIyz) y, sin embargo, x╪y —por la interferencia de 0, que en esos casos es tal que ¬(x0Iy0). ¿Cómo cabe eso si ‘0’ no denota nada? ¿Cómo puede esa «nada» venir abarcada por un cúmulo, por una determinación? Porque una determinación es algo que, dándosele un **argumento**, haga (o no) corresponderle un **valor**, pero también algo que, yendo a tomar argumento y no recibiéndolo (en absoluto), puede así y todo dar —espontáneamente— un valor. Tal es el caso, p.ej., de F (e.d. ΔB¬), la determinación de ser absolutamente falso o inexistente (totalmente falso en todos los aspectos), la cual es tal que para ningún ente x existe Fx, pero en cambio sí existe F0, que es lo absolutamente real, e.d. la Realidad (=Verdad, la Existencia), lo denotado por ‘1’. Alternativamente, podría reforzarse el sistema con un principio de extensionalidad más fuerte (⌜∀x,y∃z(xz=yz→.x=y)⌝), pagando el precio de tomar una serie de medidas compensatorias, entre ellas que se restrinjan ulteriormente los principios de abstracción (en CD hay, no un único esquema generalmente válido que sea «el» principio de abstracción, sino una serie de esquemas así con unas u otras restricciones). Paréceme, de momento, ventajoso atenerme a la actual versión del sistema. (Y el que sea ventajoso es un indicio que nos permite **conjeturar** que la realidad es así.)

39 Ni CD ni sus inmediatos antepasados —los sistemas de la familia *A*, que he venido construyendo desde la segunda mitad de la década de los 70— son los únicos sistemas de teoría de conjuntos contradictorial. Otros así son: (l) los sistemas de teoría de conjuntos construidos con lógicas relevantes como la de Routley (Sylvan), que ofrece características muy interesantes, pues careciendo de la ley de contracción (⌜p→(p→q)→.p→q⌝) parece escapar incluso a la paradoja de Curry-Moh Shaw-Kwei aun con un principio de abstracción irrestricto (aunque eso no es seguro); (2) los sistemas de teoría de conjuntos construidos sobre la base de los cálculos sentenciales *C* de da Costa, sistemas ampliamente investigados por A.I. Arruda, hasta su muerte, y que desgraciadamente suelen saldarse con resultados indeseables, pues incluso con el más débil de tales cálculos, C_ω, asoman consecuencias sumamente indeseables (con un principio de abstracción irrestricto), como la existencia de un único conjunto. (Vide capítulo 11º de la presente Secc.); (3) un esbozo de sistema elaborado por N. Rescher y R. Brandom (en *The Logic of Inconsistency*, Oxford: Blackwell, 1980, pp.36ss.), cuya idea central estriba en partir el principio de abstracción en dos mitades: una que estipula la condición suficiente de pertenencia a un conjunto; la otra que enuncia la condición necesaria; ese sistema no es copulativo, así que del par de premisas ⌜p⌝, ⌜q⌝ no se desprende la conclusión ⌜p∧q⌝. Conque de que el conjunto R sea tal que, para todo x, N(xx)⊃Rx y también tal que Rx⊃N(xx) no se sigue esto: ∀x(Rx≡N(xx)). Incluso si se demuestra (lo cual no está claro) que, por un lado, RR, por otro lado N(RR), no se sigue RR∧N(RR). Algunos críticos atribuyen a Rescher una división del cúmulo de entes que p en dos: uno, el de todo lo que p; y el otro, el de sólo lo que p. Esa no parece ser la idea de Rescher, pero sí se entroncaría con nuestra precedente discusión, más arriba, sobre las condiciones necesarias y suficientes de abarque de una cosa por el conjunto o cúmulo de entes que p, con las cuatro opciones de aceptar catervas o aceptar corrillos, o ambas cosas, o ninguna. De ser fundada esa aludida lectura, la propuesta de Rescher y Brandom estribaría en reemplazar el conjunto único R por una caterva y un corrillo, cada uno de ellos provisto de medio principio de abstracción. En su libro *Many-Valued Logic* (vide [R1] en la bibliografía), pp.208-9, ya exponía Rescher interesantísimas consideraciones sobre el tratamiento de la paradoja de Russell en lógicas multivalentes.

caterva y, a la vez, un ente entradizo o infiltradizo (o «coladizo», puesto que se cuela de rondón en algunos cúmulos, en particular en sí mismo).

— Al igual que en cualquier otro sistema combinatorio, no hay en CD diferencia entre oración y otras expresiones. Cada expresión es una fórmula, pues cada ente es lo mismo que el hecho de su existencia (o «verdad» en el sentido ontológico). En CD no hay barreras categoriales (ni siquiera las pocas que, implícitamente, quedaban todavía en los sistemas de Quine, como aquella que se daba en ellos entre los «entoides» —o lo que sean— denotados por functores del cálculo sentencial y los entes propiamente dichos).

— Pero hay en CD una diferencia entre entes realmente reales, o existentes en todos los aspectos, y entoides que existan sólo en algunos aspectos. Para realzar esa discrepancia, cabe explotar la dualidad de vocablos 'determinación' vs 'conjunto', reservando este último (o el de 'propiedad'), en un sentido más restringido, para denotar con esta última palabra a un ente realmente real. (Las determinaciones en general pueden también llamarse **cúmulos**.)

— En CD vale el principio de comprensión con una sola excepción, a saber {x:p} existe [al menos relativamente], salvo si {x: p}=Λ0 (donde '0' se define como 'N1', según sabe bien el lector; en CD, lo mismo que en *Aj*, es un teorema esto: H1: la Realidad es totalmente real —o verdadera).

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 15º.— EL SISTEMA CD

Se ha originado el sistema CD, en la presentación que aquí brindo de él, por un proceso de rectificaciones a partir de su antepasado, el sistema *Am*, que vino expuesto por primera vez en *Contradiction et vérité*, Universidad de Lieja, l979. Hasta qué punto pueda decirse que el mismo sistema persiste a través de alteraciones es asunto —ya aludido más arriba— en el que no procede ahondar aquí. Si prefiere sostener uno que cualquier alteración en los axiomas, postulados o reglas de inferencia de un sistema entraña el reemplazo del mismo por otro, entonces considérese que **este** CD es un sistema nuevo aquí presentado por vez primera. El autor no ve en él un producto final, sino un resultado provisional, una conjetura (como todas nuestras elaboraciones teoréticas en cualquier campo, sin excepción), avalado por evidencia abundante y estimable, mas merecedor de ulteriores mejoras.

§1.— La base del sistema CD

Vayan por delante ciertas convenciones. La concatenación o yuxtaposición de dos signos es un signo. Tal concatenación se entenderá siempre asociativa hacia la izquierda ($\ulcorner$pqr$\urcorner$ equivale a $\ulcorner$(pq)r$\urcorner$). Acudiremos a paréntesis desambiguantes; a veces, en vez de paréntesis, corchetes simples —cuando no haya duda de que se usan así y no como indicación de qué variables figuren o dejen de figurar en una fórmula, según el procedimiento que vino expuesto al comienzo del cap. 5º de la Sección II ; procedimiento que, por lo demás, también vendrá utilizado aquí).

REGLAS DE FORMACION:

(1) •, ↓, H, U, I, B, Σ, Λ, a son signos

(2) Si $\ulcorner$p$\urcorner$, $\ulcorner$q$\urcorner$, $\ulcorner$r$\urcorner$ son signos, también lo son $\ulcorner$pq$\urcorner$ y $\ulcorner$p(qr)$\urcorner$.

ABREVIACIONES

‘Δ’ abr. ‘Σ(ΛΣ)Λ’	‘Γ’ abr. ‘Σ(ΔΔΣ)(ΛΛ)’
‘Ω’ abr. ‘ΣΣ(Λ1)’	‘N’ abr. ‘Ω↓’
‘∨’ abr. ‘Δ(ΔN)↓’	‘∧’ abr. ‘ΓΔ(Δ↓N)N’
‘¬’ abr. ‘ΔHN’	‘L’ abr. ‘ΔN(ΔHN)’
‘→’ abr. ‘Σ(ΔΔI)∧’	‘⊃’ abr. ‘Δ∨¬’
‘½’ abr. ‘Iaa’	‘X’ abr. ‘Ω•’
‘0’ abr. ‘∨(⊃(I½(N½))(I½a))(N(ΣΛΛ))’	‘1’ abr. ‘N0’
‘S’ abr. ‘Ω(Δ∧N)’	‘n’ abr. ‘•(Na)’
‘m’ abr. ‘Δ(ΔNn)N’	‘≡’ abr. ‘Σ(ΔΣ(Δ(Δ⊃)∨))∧’
‘Y’ abr. ‘Ω(Δ∧(Ia))’	‘f’ abr. ‘Ω(Δ∧(Δ¬Y)’
‘&’ abr. ‘Δ∧L’	‘E’ abr. ‘Δ(ΔNU)’
‘\’ abr. ‘Σ(ΔΣ(Δ(Δ∧)→))(Γ(Δ(Δ¬)→))’	‘*f*’ abr. ‘Σ(Δ&(Ω(Δ\n)))(ΔfS)’
‘K’ abr. ‘Δ(ΔNX)N’	‘J’ abr. ‘Δ(Δ¬B)¬’
‘=’ abr. ‘Δ(ΔB)I’	‘F’ abr. ‘ΔB¬’
‘╪’ abr. ‘Δ(Δ¬)=’	‘⇒’ abr. ‘Δ(ΔB)→’

Procederé además con arreglo a las siguientes convenciones. Llamaré **functores monádicos** a los signos H, B, N, ¬, L, X, n, m, Y, f, *f*, K, J; **functores diádicos** a los signos •, ↓, I, ∨, ∧, →, ⊃, ≡, &, \. (1) cuando en ⌜p⌝ figure un functor diádico ╥ en el signo ⌜╥rr’⌝, reemplazamos éste por (lo «abreviamos» como) ⌜⟦r╥r’⟧⌝; en cambio (2) llamamos **fórmula** (no total) a un signo entre corchetes dobles y, si ⌜r^1⌝, ⌜r^2⌝ son fórmulas y ╥ un functor diádico, fórmula es también ⌜⟦r^1╥r^2⟧⌝; (3) Si ☼ es un functor monádico y ⌜r⌝ una fórmula, figurando en ⌜p⌝ ⌜☼(r)⌝, reemplazamos esto por ⌜⟦☼r⟧⌝ que es también una fórmula, estipulando que ☼ rige a la **fórmula** más corta que lo siga (con una salvedad estipulada en el punto (5) más abajo); (4) cuando no haya confusión los corchetes dobles vienen reemplazados por paréntesis o se suprimen —en especial, suprímense en general los corchetes dobles **dentro** de una fórmula más amplia que esté a su vez encerrada entre corchetes dobles (salvo cuando los corchetes interiores vengan requeridos por la condición (2), a fin de tratar como fórmula a un signo que, de no, no lo sería); (5) dos fórmulas yuxtapuestas están más unidas, formando una fórmula, que cualquiera de ellas por separado con un functor monádico o diádico: si ⌜r^1⌝, ⌜r^2⌝, ⌜r^3⌝ son fórmulas, ⌜⟦r^1∨r^{2}r^3⟧⌝ se entiende como ⌜⟦r^1∨(r^{2}r^3)⟧⌝, y ⌜⟦Nr^{1}r^2⟧⌝ se entiende como ⌜N(r^{1}r^2)⌝. Dentro de corchetes dobles sólo usaré letras esquemáticas para hacer las veces de fórmulas, o sea: como esquemas de fórmulas únicamente. En especial, llamaremos fórmulas (no requiriéndose encerrarlas en corchetes dobles ni paréntesis) a estos signos: a, ½, 0, 1. Así pues, dentro de una **fórmula** total, una ocurrencia de ‘Σ’ no es una fórmula, mas sí lo es una de ‘⟦Σ⟧’; igualmente un functor, ‘N’ p.ej., no es fórmula, pero sí lo es ‘⟦N⟧’: si ⌜p⌝ es fórmula, entonces —cuando y donde se apliquen estas estipulaciones, o sea dentro de una fórmula total— ⌜NNp⌝ abrevia a ⌜N⟦Np⟧⌝ mientras que ⌜⟦NN⟧p⌝ equivale a ⌜(NN)p⌝).

Otras convenciones abreviativas a tener en cuenta son éstas: Si ⌜r⌝ es un signo que no figura en ⌜p⌝, ⌜{r: p}⌝ abrevia a ⌜⟦Λp⟧⌝; si ⌜r⌝=⌜p⌝, ⌜{r: p}⌝ = ⌜⟦ΣΛΛ⟧⌝; si ⌜r⌝╪⌜pq⌝ figura en ⌜pq⌝, ⌜{r: pq}⌝ abrevia a ⌜⟦Σ{r: p}{r: q}⟧⌝.

Como notación alternativa cabe usar una lambda minúscula en lugar de las llaves, así: ⌜λrp⌝ se define igual que ⌜{r: p}⌝; ⌜{rs: p}⌝, que viene definido como ⌜{r: {s: p}}⌝, puede reemplazarse por

⌜λrs(p)⌝ —sin embargo es menos clara, sobre todo en casos así, la notación lambda. (Igualmente, ⌜{s^1…s^n: p}⌝, que abrevia a ⌜{s^1: {s^2: {s^3: …: {s^n: p}}…}}⌝, puede reemplazarse por ⌜λs^1…s^np⌝.)

Introduzco variables como letras esquemáticas pero con una restricción: en un esquema de fórmula, ⌜p⌝, una ocurrencia de una variable ⌜x⌝ no puede reemplazarse por un signo ⌜q⌝ más que cuando se haya demostrado el teorema ⌜Jq⌝. A fuer de letras esquemáticas que son, las variables pueden venir tratadas igual que las demás letras esquemáticas ‘p’, ‘q’, ‘r’, etc., en lo que precede. Así ⌜{x: p}⌝ es un esquema claramente explicado ya. Las estipulaciones sobre variables libres y ligadas son éstas: ‘x’ está libre en ‘x’; las variables libres en ⌜pq⌝ son las que lo están ya sea en ⌜p⌝ ya sea en ⌜q⌝; las variables libres en ⌜{x: p}⌝ son las que lo están en ⌜p⌝ menos ‘x’. (Lo recién dicho de ‘x’ vale para cualquier otra, claro.) ⌜∀xp⌝ abreviará a ⌜U{x: p}⌝. Y ⌜∃xp⌝ abrevia a ⌜E{x: p}⌝.

Si ⌜p⌝ es una fórmula, ⌜∀xp⌝ y ⌜∃xp⌝ serán también fórmulas; cada prefijo cuantificacional (⌜∀x⌝, ⌜∀y⌝, ⌜∃x⌝, ⌜∃y⌝, etc.) rige a la **fórmula** más corta que lo siga inmediatamente mas con una salvedad idéntica a la de los functores monádicos, a saber un prefijo cuantificacional liga menos estrechamente que la yuxtaposición entre fórmulas, de suerte que ⌜∀xpq⌝, si ⌜p⌝, ⌜q⌝ son fórmulas, equivale a ⌜∀x(pq)⌝. ⌜∀Bxp⌝ abrevia a ⌜∀x(Bx⊃p)⌝; ⌜∃Bxp⌝ abrevia a ⌜∃x(Bx&p)⌝.

En lo que precede inmediatamente, al igual que en lo que sigue, vienen usadas las variables como metavariables; lo cual quiere decir que en tales esquemas ‘x’ p.ej. (o cualquier variable) puede reemplazarse, con tal que sea uniformemente, por cualquier otra variable —obedeciéndose, donde proceda, las estipulaciones sobre las restricciones que sean del caso acerca de las ocurrencias de tales variables en el contexto.

Nuevas abreviaciones:

‘Φ’ abr. ‘{x: ∀z({x: z}x=z)}’ ‘Ψ’ abr. ‘{x: ∃y,u(x={u: y}&∀u(xu=y))}’

‘∈’ abr. ‘{xy: yx}’ ⌜*U*xp⌝ abr. ⌜∀x(Φx⊃p)⌝

‘G’ abr. ‘Δ(ΔB)⊃’ ‘i’ abr. ‘{xy: ⟦y=x⟧}’

‘Ø’ abr. ‘{x: 1}’ ‘σ’ abr. ‘{xyz: y(xyz)}’

⌜ℓxp⌝ abr. ⌜{y: ∀x∃z(B(izx≡p[x/z])⊃xy)}⌝ ‘¶’ abr. ‘{xy: y=σx}’

‘ω’ abr ‘ℓz∀x(iØx∨∃u⟦zu&.σu=x⟧=zx)’ ‘π’ abr. ‘{xz: ∀y(zy⇒xy)}’

‘❋’ abr. ‘{zxy: ∃u(ωu&uzxy)}’ ⌜x+y⌝ abr. ⌜yσx⌝

‘≤’ abr. ‘{xy: ∃u(ωu&.x+u=y)}’ (escribiré ⌜p≤q⌝ en vez de ⌜≤pq⌝)

‘<’ abr. ‘{xy: x≤y∧.x≠y}’ (escribiré ⌜p<q⌝ en vez de ⌜<pq⌝)

‘2’ abr. ‘σ1’; ‘3’ abr. ‘σ2’; ‘4’ abr. ‘σ3’; ‘5’ abr. ‘σ4’; ‘6’ abr. ‘σ5’, etc.

‘|’ abr. ‘{xyuv: ∃z(xuz∧yzv)}’ (escribiré ⌜p|q⌝ en vez de ⌜|pq⌝)

‘"’ abr. ‘ΔL|’ (escribiré ⌜p"⌝ en vez de ⌜"p⌝)

‘@’ abr. ‘{x: 2ΔLx|1}’ (escribiré ⌜p@⌝ en vez de ⌜@p⌝)

‘χ’ abr. ‘{xy: πxy∨xy}’ ‘ß’ abr. ‘❋(∈❋)❋’

‘ℭ’ abr. ‘ßχω’ ‘*’ abr. ‘{uv: ❋(u")(iv)}’

‘∩’ abr. ‘ΔΣ(Δ∧)’ (escribiré ⌜p∩q⌝ en vez de ⌜∩pq⌝)

‘*bnord*’ abr. ‘{y: ∀x(π(yx)(2(y")(ix))∧¬(yxx))∧∀z,u∃v(zvG∃u(zu∧.yvu∨yuv)∧πzuG∃x∀v(v≠x∧uvG yxv∧ux)))’

‘*ser*’ abr. ‘{y: ∃u(*bnord*u∧∀z,x(yz∧yxG.uzx∨uxz∧.ωx∧ωzG.uxz=.*¶|xz∧.x≠z)}’

‘£’ abr. ‘{x: ∀y(χxyG⟦Ψy⟧∧.πxyG*ser*y)}’ ‘α’ abr. ‘{x: ∀z(∀u(zuGxu)G.Ez={u: ∃y(zyu)}}’

ESQUEMAS AXIOMATICOS

A01 ⟦p∧q⊃p⟧

A02 ⟦r∧sIp⊃(p↓qI.q↓s∨.q↓r)⟧

A03 ⟦pIq⊃(rIqI.pIr)∧.KXpIp∧.Yp∨Yq∨¬Y(p•q)∧.fSp∧fSq⊃(p•q\p)∧.p∧q⊃.p•q⟧

A04 ⟦q∧p∨pIp∧.Hp∧HqILH(p∧q)∧.pIq⊃(Hp∨HrIH(q∨r))∧.p•q→p∧.p•1Ip⟧

A05 ⟦pINqI(NpIq)∧.pIpI½∧.p'∧pIq⊃(q•r•sI.s•r•p∧.s•p'•r)∧.ƒp∧fNq⊃¬ƒN(p•mq)⟧

A06 ⟦pIq⊃(q⊃p)∧.mp→mnp∨Hp∧.mp→np≡(Yp∨YNp)∧.q→np∨(pImq)∧Lp∨.p→q⟧

A07 ⟦Bp∨B¬BLp∧.BpIp∨¬Bp∧.p⇒q&Bp→Bq⟧

A08 ⟦∀xp•∀xqI∀x(p•q)∧.∀xs\r[(x)]⊃∃x(s\r)∧.∀xp∧∃xq→∃x(p∧q)∧.∀x¬p→¬∃xp∧.nr\r⊃ ∃x(r→∃xp→.r→p)⟧

A09 ⟦p=q⊃.prIqr∧.rpIrq⟧

A10 ⟦*U*x(⟦p0⟧=⟦q0⟧∧.px=qx)⊃.pIq⟧

A11 ⟦p∧Jr→(Uq→qr&E{r: p})∧¬⟦Λ0⟧∧.⟦ip(Σ(Λp)1)⟧∧.Bp⊃¬(0q∨p0)⟧

A12 ⟦∀z(p→yz)⊃∀z({z: p}z→yz)∧.⟦ΛΣp⟧I⟦Σ⟧∧.{r: r}rIr∧.[Ψ{r: p}]∨p⊃.{r: p}rIp⟧

A13 ⟦∀x(Ψx⊃Φx)∧.[ΨΨ]∧[ΨΦ]⟧

A14 ⟦∀y({x^1…x^n: p}╪y≡∃x^1…x^n(p╪⟦yx^1…x^n⟧∧.Φx^1∧.…∧Φx^n))⟧

A15 ⟦∀x(Ψx⊃Ψ(σx)⟧

A16 ⟦p∨qIN(p↓q)⟧

A17 ⟦p∧qI.Np↓Nq⟧

A18 ⟦N∀xNpI∃xp⟧

A19 ⟦p↓pINp⟧

A20 ⟦¬pIHNp⟧

A21 ⟦LpINHNp⟧

A22 ⟦p→qI.p∧qIp⟧

A23 ⟦p⊃qI.¬p∨q⟧

A24 ⟦XpI.p•p⟧

A25 ⟦N⟦ΣΛΛ⟧∨(½IN½⊃.½Ia)I0⟧

A26 ⟦ƒpI.np\p&fSp⟧

A27 ⟦p≡qI.p∨q⊃.p∧q⟧

A28 ⟦SpI.p∧Np⟧

A29 ⟦KpINXNp⟧

A30 ⟦mpINnNp⟧

A31 ⟦YpIa∧pIp⟧

A32 ⟦p⇒qIB(p→q)⟧

A33 ⟦p&qI.Lp∧q⟧

A34 ⟦p\qI.p→q∧¬(q→p)⟧

A35 ⟦p╪qI¬(p=q)⟧

A36 ⟦p=qIB(pIq)⟧

A37 ⟦JpI¬B¬p⟧

A38 ⟦FpIB¬p⟧

A39 ⟦pGqIB(p⊃q)⟧

A40 ⟦∀x,y,z([x∩y]z=⟦xz∧yz⟧⟧

A40 ⟦∀x,y(ixzI.x=z)⟧

A41 Si ⌜p⌝ es una concatenación de ⌜q^1⌝ … ⌜q^n⌝, donde cada uno de entre ⌜q^1⌝, … ⌜q^n⌝ es un miembro de {'ω','❋','∈','π','χ','σ','i','|','"','@','*','¶','≤','<'} entonces esto es un axioma: ⌜Ψp⌝

A42 αω∧£𝕮

REGLAS DE INFERENCIA

rinf01 (modus ponens): p⊃q , p ├ q

rinf02 p ├ Bp

rinf03 p ├ q (donde ⌜q⌝ es el resultado de prefijar a ⌜p⌝ uno o más de entre los cuantificadores universales ⌜∀x⌝, ⌜∀y⌝, …)

rinf04 p’ ├ Φp (donde o bien ⌜p’⌝=⌜p⌝, o, si no, ⌜p’⌝ es una fórmula cualquiera con tal, eso sí, de que entonces ⌜p⌝ sea un signo *blando*, e.d. uno que no contenga ocurrencia ninguna ni de ‘H’ ni de ‘I’ (ni siquiera aunque una ocurrencia tal esté sepultada o incrustada dentro de otros signos que figuren en ⌜p⌝)

rinf05 Si ⌜¬p⌝ no es demostrable en CD (no es un teorema), entonces: ├ {r: p}r→p

rinf06 Ψr^1,…,Ψr^n ├ Ψq (donde ⌜q⌝ contiene ⌜r^1⌝,…, ⌜r^n⌝ y, además, sólo signos blandos.

La penúltima regla de inferencia (**rinf**05) es muy *sui generis*, y propiamente hablando no es una regla de inferencia, en el sentido usual. A causa de ella, es verdad lo que se dirá más abajo de que CD es —como el sistema combinatorio de Fitch— un sistema que no puede ser recursivamente axiomatizado (vide infra, puntualización 2ª del §4).

LECTURAS

‘U’: la universalidad (⌜Ur⌝ se leerá: «r es universal[mente poseída]»);

⌜pq⌝: el hecho de que (exista) p es una determinación del hecho de que (exista) q; p abarca a q;

⌜{r: p}⌝: la determinación de ser un ent[oid]e, r, tal que p;

⌜∀Bxp⌝: Todo verdadero ente es tal que p;

⌜∃Bxp⌝: Algún verdadero ente es tal que p;

‘Σ’: la determinación relacional que guarda algo, p, con otros algos, q, r, en la medida en que el que p sea una determinación de r es, a su vez, una determinación del que q sea una determinación de r;

‘Φ’: La determinación de ser un **ente morigerado**, e.d. un ente que no sea **infiltradizo**. (Un ente infiltradizo —al que cabe llamar también un **turbión**— es un ente que pertenece a algún cúmulo aun sin cumplir la condición característica de pertenencia a dicho cúmulo.)

‘Ψ’: La determinación de ser un **arel**, e.d. un cúmulo que no sea, en absoluto, una **caterva**. (Las catervas son aquellos cúmulos que abarcan a ciertos entes que, sin embargo, no cumplen la condición característica de pertenencia a los mismos.) (El nombre ‘arel’ es un vocablo regional, cuyo significado corriente es afín al de ‘cedazo’ o ‘harnero’. No obstante, lo importante y lo característico de un arel no es que seleccione a sus miembros, sino que los escoja según una pauta única y unívocamente expresable; e.e. que escoja como miembros suyos sólo a todos los entes que cumplan una cualquiera de las condiciones características de pertenencia al cúmulo en cuestión; al paso que una caterva escoge a algunos de sus miembros según un criterio o patrón que discrepa de alguna de las condiciones característas de pertenencia a dicha caterva).

§2.— Algunos resultados teórico-conjuntuales conseguibles con el sistema CD

Demuéstranse en CD, entre otros, estos resultados:

(1) $\exists x\forall yBH(xy)$: existe un cúmulo que abarca absolutamente (totalmente en todos los aspectos) a cada uno de los entes.

(2) $\forall x(1x=x)$: la Existencia (o Verdad) es tal que el que la misma abarque a un ente es, ni más ni menos, ese mismo ente.

(3) $\{x: 0\}=0$: la determinación de ser tal que sea verdadero lo absolutamente falso es lo absolutamente falso.

(4) $\exists x(x=p)\supset J\exists z(pz\vee p0)$: Si p es un ente (si es algo existente), entonces, al menos en algunos aspectos, hay algo abarcado por p o bien p abarca a lo absolutamente falso. (El que p —o lo que sea— abarque a lo absolutamente falso consiste en que, cuando va a tomar un argumento, e.d. a aplicarse a algo, y no encuentra argumento —e.d. no le viene facilitado ningún «algo»—, entonces, *motu proprio*, produce de suyo un valor.)

(5) $\forall x\neg(\{x: p\}x)\bullet\neg(\{x: p\}0)\vee\exists z(z=\{x: p\}$: el cúmulo de entes que p es algo (existente) a menos que no sólo no haya absolutamente nada abarcado por él sino que, además, ni siquiera venga abarcado por él lo absolutamente falso.

(6) $J\{x: p\}=J\exists x(\{x: p\}x\vee\{x: p\}0)$: el que sea al menos relativamente existente el cúmulo de entes que p es lo mismo que el que, siquiera en algunos aspectos, exista un ente abarcado por ese cúmulo a no ser que éste último abarque a lo absolutamente falso.

(7) $\neg\exists x[\neg\exists z(xz)\wedge NJ(x0)]$: No hay en absoluto una determinación tal que ni haya absolutamente nada abarcado por ella ni tampoco venga, ni siquiera relativamente, abarcado por ella lo absolutamente irreal.

(8) $\{x: zx\}=z$: cada ente es idéntico al cúmulo de cosas abarcadas por él. (Cada ente es, pues, su propio abarque —su propio abarcar—, al igual que es su propio existir.)

(9) $\{xy: zxy\}=z$: cada determinación es idéntica a la relación que guarda un ente con otro en la medida en que éste último viene abarcado por el abarque del primero por dicha determinación.

(10) $1=\{xy: xy\}$: la existencia es la relación de abarque. (Existir es abarcar.)

Como inciso filosófico cabe apuntar que —dentro de un tratamiento combinatorio como éste (lo cual tiene su importancia, según lo vamos a ver en seguida)— lo abarcado por un hecho «intranseúnte», como el denotado por una oración formada con un sujeto y un verbo intransitivo, p.ej. 'dormir', puede ser ese mismo hecho; lo cual explica las construcciones de «acusativo interno»: caminar su camino, vivir su vida, dormir su sueño, morir su muerte; por otro lado los individuos o cuerpos son cúmulos de sus respectivas partes —una de ellas es el propio cuerpo, parte total: si hay átomos, entes corpóreos indescomponibles o incompuestos, cosa dudosísima, entonces ellos son «individuos» en la acepción quineana considerada más arriba (vide supra (nª 12); aunque también los hechos intranseúntes serán —a tenor de la conjetura recién propuesta— «individuos» en esa acepción.

Merece la pena detenerse aquí a considerar otros resultados, que puede que parezcan curiosos, si se comparan con el tenor de sistemas estándar, como las teorías clásicas de conjuntos. Figuran entre los mismos aquellos que se refieren a σ, que es una relación a la que cabe llamar **de sucesión**. Sea r una relación diádica; entonces σr será $\{xz: x(rxz)\}$, e.d. la relación que se dará entre dos cosas, x, z, cuando el hecho de guardar x con z esa relación r venga a su vez abarcado por la propia x. Sea x, en efecto, una determinación, como la de ser justo (lo Justo o la justicia), y sea z la de ser injusto; sea r la relación de **prevalecer [por] sobre**: es justo el que la justicia prevalezca por sobre la injusticia, o sea x guarda σr con z; en este caso también z resulta que guarda σr con x, puesto que es injusto que la injusticia prevalezca por sobre la justicia. Sea x la belleza, r la relación de **pensar en** y z un pensador cualquiera, p.ej. Platón: como es algo bello el que Platón piense en la belleza, tenemos aquí de nuevo que, tomados así y en ese orden, x está guardando σr con z. Sea ahora x la determinación de ser algo filosófico —la filosofía—, z el método, r la relación de **comprender en sí el estudio de**. Pues bien, como es filosófico el que la filosofía comprenda en sí el estudio del método, nuevamente, bajo esa adscripción de valores a las variables, se tendrá que x guarda σr con z. Hay muchísimos otros casos probablemente bastante más interesantes, como los siguientes. Podemos sin duda concebir a un **cuerpo** como el cúmulo de sus partes, y de nada más: un ser humano, u otro animal, es el cúmulo de sus vísceras, de sus manos, de sus glándulas, de su cerebro, etc., así como de las partes de esas partes y así sucesivamente. En cambio, un **acontecimiento** no es sólo el cúmulo de sus partes —o sea de aquellos acontecimientos que forman parte de él—, sino, probablemente, también de todos los hechos que sean —en un sentido pertinente y no trivial (difícil de dilucidar, mas no por ello menospreciable)— **acerca** del acontecimiento en cuestión. Así, p.ej., la revolución francesa es un cúmulo que abarca no sólo hechos como la toma de la Bastilla por el pueblo parisino, o el guillotinamiento de Luis Capeto, sino también hechos como el que esa revolución causara el fin del absolutismo monárquico en Europa, y que fuera causada por la miseria del pueblo y la crueldad de la aristocracia, o igualmente el que coincidiera, parcialmente, en el tiempo con la entronización de la dinastía Qâdyâr en Persia. Así, contar la revolución francesa es relatar eso, nombrar los hechos por ella abarcados, que son todos ésos y muchos otros. De ser así, entonces esta relación σ cumple un papel particularmente importante, ya que vendrá, entre otras cosas, abarcado por la revolución (x) el que ésta sea coetánea (r) de la entronización de la casa de Qâdyâr en Teherán (z): x guarda, pues, de nuevo, bajo tal asignación, la relación σr con z (y también viceversa, z guarda σr con x, en este y en otros casos, pero no en todos). Si un lapso de tiempo es el cúmulo de cuanto en él sucede o es verdad, entonces el que tal lapso —pongamos, el año de 1943— coincida temporalmente, al menos en parte, con cierto acontecimiento, p.ej. la publicación de *L'être et le néant* de Sartre, siendo como será algo efectivamente real en ese mismo año, vendrá abarcado también por el lapso en cuestión; al año de 1943 (x) guardará σr (donde r será la relación de coincidencia temporal al menos parcial) con la aparición de dicho libro de Sartre (z).

Lo más interesante, sin embargo, es la **sucesión del abarque**, o sea la **sucesión de la existencia**. Que exista Marruecos es que Marruecos abarque, e.d. es el cúmulo de entes abarcados por ese país. Como (verosímilmente) Marruecos es un cuerpo, será el cúmulo de sus partes, y una de ellas es la ciudad de Fez. Marruecos abarca a Fez, pero no abarca al hecho de abarcar a Fez. En cambio, un acontecimiento, como la revolución mexicana, no sólo abarca a un miembro suyo, cual puede ser la caída del tirano Porfirio Díaz, sino también al hecho de abarcar a dicho miembro: para cada ente, z, abarcado por la revolución mexicana, x, ésta abarca también al hecho de que x abarca a z; y por lo tanto también al hecho de que x abarca al hecho de que x abarca a z, y así sucesivamente; la revolución guarda, pues, con cualquier hecho que de ella forma parte o, en general, que viene abarcado por ella no sólo la relación de abarcarlo, sino también la sucesión del abarque, y la sucesión de tal sucesión y así al infinito.

Algo que conviene no perder de vista —y estrechamente vinculado a lo puesto de manifiesto tres párrafos más atrás— es que, con el tratamiento combinatorio, todos los entes son relaciones. Para cualquier relación [normalmente juzgada como] m-ádica, r, y para cualesquiera entes $x^1, \dots, x^n$, donde $n<m$, puede que sea verdad $rx^1\dots x^n$, siendo, si lo es, tal verdad lo mismo que el cúmulo de entes, z, tales que $rx^1\dots x^n z$. Es verdad, p.ej., que Cervantes escribe; esa verdad no es otra que el cúmulo de lo por él escrito. Es verdad que la vida de Leibniz precede; tal verdad es el cúmulo de hechos precedidos por la vida de Leibniz. Así pues, si r es una relación que normalmente consideraríamos tetrádica, puede así y todo guardar una determinación d con un ente z la relación σr, siendo el que así suceda, no desde luego el cúmulo de entes con los que x, z, tomados en ese orden guarden r, sino antes bien el cúmulo de entes con los cuales está unido mediante la relación d el hecho de que d guarda r con z. Y, por otro lado y según quedó puesto de relieve tres párrafos más arriba, si r es juzgada normalmente como m-ádica, puede, dentro del enfoque combinatorio, venir tratada no obstante como [m+1]-ádica, [m+2]-ádica, etc., y ello mediante el plausibilísimo procedimiento de tomar como «objeto» al cual tiende o pasa una acción intranseúnte a esa misma acción. Si ello es así, el morir de Almanzor es el cúmulo de sus muertes (una sola); la relación inversa, la de **ser muerto por** guárdala la muerte de Almanzor con Almanzor. Ahora bien, ¿qué cosa es el que Almanzor muera su muerte? ¿Un *tertium quid*? ¿O se trata del mismo hecho, del morir de Almanzor? De ser cierto esto último, entonces la muerte de

Almanzor guardará también con Almanzor la sucesión de la relación inversa a la de morir, y así sucesivamente.

En virtud de A15 y A41, pueden probarse con respecto a σ instancias de muchos teoremas que no están generalmente disponibles en CD, dada la ausencia en CD de un principio general de abstracción. De consuno, A15, A41 y los demás axiomas pertinentes aseguran la obtención de resultados como los siguientes:

$\sigma\sigma=\{yz\colon y\{v\colon z(yzv)\}\}$ $\quad$ $\sigma\sigma\sigma=\{xyz\colon y(x\{v\colon y(xyv)\}z)\}$

$\sigma\sigma\sigma\sigma=\{yz\colon y\{u\colon z(y\{v\colon z(yzv)\}u)\}\}$ $\quad$ $\sigma(\sigma\sigma)\sigma\sigma=2\sigma(\sigma\sigma\sigma)$

$\sigma\sigma\sigma\sigma=\sigma(\sigma\sigma\sigma)$

Y es que la sucesión de la sucesión es también una relación, igual que la sucesión de la-sucesión-de-la-sucesión. Cada una de tales relaciones se puede aplicar a otra relación o determinación, claro está, o sea: el que una de ellas, s, abarque a una determinación dada, d, será a su vez cierta relación; p.ej., $\sigma\sigma$d, donde d es la relación de **existir a la vez que**, será el cúmulo de relaciones r tales que d abarca al cúmulo de cosas con las cuales guarda r la relación σd; el siglo XVIII existe a la vez que el apogeo de la Ilustración; y el que así suceda es algo **del** siglo XVIII (viene abarcado por dicho siglo); luego el siglo XVIII guarda con dicho apogeo la relación σd; igual que con ese apogeo, con muchas otras cosas; del cúmulo de todas ellas, *C*, es verdad que **existe a la vez que**; esa verdad constituye el cúmulo de entes a la vez que los cuales existe ese cúmulo, *C*; cabe conjeturar que éste último exista siempre, pero eso es problemático. Sea como fuere, este ejemplo sirve para dar una idea del género de aplicaciones interesantes del estudio de relaciones como la recién considerada.

En CD —según vino ya enunciado al final del capítulo precedente, pág^{as}. 238-9— se demuestran muchas contradicciones, como las siguientes: $[\![\{x\colon N(xx)\}\{x\colon N(xx)\}\wedge N(\{x\colon N(xx)\}\{x\colon N(xx)\}]\!]$. Mas no se demuestran **super**contradicciones, porque éstas involucran a signos que no son blandos y que, por lo tanto, no entran en el ámbito de aplicación del principio de abstracción; más bien habría que decir de **los principios de abstracción**, ya que, en vez de contener sólo uno, de validez general, lo que contiene CD es una serie de menudos principios de abstracción parciales. Claro que ello conlleva el inconveniente de una buena dosis de adhocidad, de un tratamiento por parches y retoques. Probablemente haya cómo ir reduciendo paulatinamente esa adhocidad —y también la enorme cantidad de redundancia que se da hoy en la base axiomática de CD—, «fuñando», introduciendo poco a poco nuevos ajustes en el sistema, puliéndolo, repasándolo, limándolo acá y acullá, y volviéndolo luego a pergeñar, arreglar y corregir una y otra vez. Desde un punto de vista filosófico, optar por un enfoque así está cargado de significación: rehusando las vanas ilusiones del fundacionalismo, con sus promesas de solventar los problemas de raíz, de un plumazo, mediante un truco genial que haga desvanecerse las dificultades como por ensalmo brindando una solución radicalmente plausible y simple («intuitiva»), esta otra manera de ver las cosas y de habérselas uno con ellas conlleva una aceptación expresa tanto de la progresión cuanto —en muchos casos— de la regresión infinitas; en lugar de creer en lo definitivo y radical, lo absolutamente improblemático, una prosecución asintótica de ciertos ideales. A fuer de gradualista no menosprecio los logros parciales y modestos, pues no incurro en el maximalismo del **todo o nada**. Está bien tender al ideal de la teoría ingenua de conjuntos; está bien, por lo tanto, ir enmendando paulatinamente la teoría de conjuntos o cúmulos que profese uno para irla haciendo más fuerte, más avanzada en la marcha hacia ese ideal; está mal, en cambio, sacarse de la manga una supuesta alternativa a ese ideal, presuntamente exenta de toda adhocidad, que sólo nos ofrezca algo que ya únicamente de lejos recuerde a la concepción de los conjuntos que animó a Frege y a Cantor, a fines del pasado siglo, a poner en pie sus sistemas (eso es lo que hacen los adeptos de la teoría estándar de conjuntos, la de Zermelo-Fraenkel, si bien no fue eso lo que pretendieron sus fundadores en el primer cuarto de este siglo: el enfoque de éstos era más parecido al que anima a la construcción aquí propuesta; pero sus discípulos han fetichizado a ZF, lo han erigido en algo acabado, proclamándolo «intuitivo»).

Veamos cómo surgiría una supercontradicción en CD si rinf04 no restringiera, como restringe, su ámbito a fórmulas que sean o bien verdaderas en todos los aspectos, o bien blandas. Definamos ‘A’ como ‘$\{xz\colon z(xxz)\}$’ (o sea, alternativamente, como ‘$\Omega(\Delta(\Sigma 1))$’). Definamos ‘Θ’ como ‘AA’. Pruébase fácilmente esto: $\Theta=\{y\colon y(AAy)\}$. Demuéstrase, para cualquier $\ulcorner p \urcorner$: $\ulcorner p(\Theta p)\to\Theta p \urcorner$. Si $\ulcorner p \urcorner$ es un teorema, o bien si es un signo blando (uno que no contenga ocurrencia alguna ni de ‘I’ ni de ‘H’), entonces se prueba también esto: $\ulcorner \Theta p\to p(\Theta p) \urcorner$, y por lo tanto $\ulcorner p(\Theta p)=\Theta p \urcorner$. Pruébase así, p.ej., esto: $\llbracket\llbracket\Theta N\rrbracket \mathrm{I}N(\Theta N)\rrbracket$; de donde resulta: $\llbracket\llbracket\Theta N\rrbracket\wedge N(\Theta N)\rrbracket$. ¿Qué pasa con la negación fuerte, ‘¬’? Falla la prueba, puesto que no es ni un signo blando ni un teorema.

§3.— Introducción de la aritmética y otros campos matemáticos

El procedimiento que voy aquí a seguir debe en parte su inspiración al de Fitch (en [F1] y en muchos otros trabajos), pero ha sido menester una complicadísima adaptación del mismo al presente sistema, toda vez que el de Fitch posee un principio de abstracción irrestricto, lo cual desde luego dista de ser verdad de CD. (Y, además, se dan otras muchísimas discrepancias hondas entre ambos enfoques, pese a lo mucho también que los acerca uno al otro.)[40]

LECTURAS (de signos ya definidos en el §1, pero cuyo estudio corresponde mejor a este lugar):

i es la identidad. La identidad de x es el síngulo de x, e.d. la determinación de ser, ni más ni menos, (el propio) x. (ixz es lo mismo que x=z).

+ es la adición.

∩ es la intersección (entre dos cúmulos).

Ø es el cero: la determinación de ser un ente, x, tal que existe la determinación de ser un ente, z, tal que z. Dicho de otro modo, Ø={xz: z}. Para cualesquiera entes x, z, Øxz=z.

Por su parte, 1 es, a la vez, la Existencia (=Verdad) y el número uno. Para cualquier ente x, 1x=x.

2 es el número dos: para cualesquiera entes x, z, 2xz=x(xz). Similarmente 3 es tal que, para cualesquiera entes x, z, 3xz=x(x(xz)).

Así, p.ej., si x es la belleza y z Venus, Øxz es Venus; 1xz es la belleza de Venus; 2xz es la belleza de la belleza de Venus; 3xz es la belleza de esa belleza; y así sucesivamente. Similarmente, si tomamos π (la relación de inclusión): Øπx=x es x; 1πx=πx es la inclusión de x, e.d. el cúmulo de determinaciones incluidas en x; 2πx es $\pi(\pi x)$: el cúmulo de determinaciones incluidas en πx; y así sucesivamente. Tomemos la relación de **ser-causado-por**: cx será el cúmulo de causas de x; ‘cxz’ querrá decir que z causa a x; 2cxz será el cúmulo de causas de que z cause a x; 3cxz será el cúmulo de las causas de que exista tal cúmulo (2cxz) y así sucesivamente.

Otro caso interesante: como N es la determinación de no ser verdadero (existente), o sea la inexistencia o falsedad —el cúmulo de cosas que no existen, e.d.: una determinación poseída por algo en aquellos aspectos (momentos, lugares, lo que sea) en que no exista y precisamente **en la medida en que** no exista—, tendremos que ØN=1; 1N=N=3N=5N=…; 2N=1=4N=6N=…. Y así para cualesquiera números, respectivamente nones y pares. En cambio, la negación fuerte, ¬, que es la determinación de no existir en absoluto, tendrá, no dos, sino tres resultados al respecto: una cosa es

[40] Pasados ya los tiempos en que predominaba el logicismo, muchos objetarán contra un sistema como CD, no ya la adhocidad innegable de unos cuantos de sus axiomas, sino el hecho de que postule asertos aritméticos, ya que la tesis hoy de moda es que la aritmética no se reduce a la lógica. Tesis errónea a juicio de los obstinados que seguimos afectos al programa de Frege y Russell. Lo interesante es que las nociones matemáticas son definibles con nociones puramente lógicas (incluidas entre éstas las teorético-conjuntuales), de suerte que lo postulado acerca de, p.ej., el cúmulo ω viene postulado acerca de un ente cuya caracterización o descripción envuelve nociones lógicas nada más. Los pocos que así seguimos pensando somos del mismo parecer que Leibniz cuando dijo (en ***Philosophische Schriften***, ed. por Gerhardt, IV, p. 35): ‘*Cum Numerus igitur sit quiddam Uniuersalissimum, merito ad Metaphysicam pertinet, si Metaphysicam accipias pro doctrina eorum quæ omni entium generi sunt communia*’

Ø¬=1 (pues, para cualquier p, Øp=1); 2¬=4¬=6¬=…, donde 2¬=L (la determinación de ser, poco o mucho, real o verdadero); mientras que ¬=1¬=3¬=5¬, etc. En cambio, p.ej., siendo X la determinación de ser muy existente, tenemos X╪2X╪3X╪4X╪… etc. (pese a que abarcan, todos ellos, los mismos miembros).

Otro uso interesante de los números naturales, en esta versión combinatoria de los mismos, es la siguiente. Definimos una constante '*const*' como '{uv: ∃x,y(uy∧.y=vx∨.y=xv)}'. Dado un arel cualquiera, p, *const*(ip) será el cúmulo de entes que sean primeros o segundos «constituyentes» de p según sea el caso. 2*const*(ip) será el cúmulo de primeros o segundos «constituentes» de uno u otro de esos «constituentes» de p, y así sucesivamente. Sea, p.ej., p=1. Como 1=σØ, tendremos que *const*(i1)Ø; como Ø=ΓΛ, tendremos que 2*const*(i1)Γ.

x|z es el producto relativo de x con z: si x es calumniar y z es liberar entonces un calumniador de Garibaldi guarda la relación x|z con Italia, siendo calumniador de un liberador de Italia. Similarmente 1|x es la relación de **abarcar algo que guarde la relación x con**; así que 2(1|x)z será el cúmulo de entes con los que guarde la relación x algo con lo cual guarde, a su vez, la relación x uno u otro miembro de z. x"z es la imagen de z por la relación x (nótese que x"={yz: ∃u(yu&xuz)}; x@ es lo mismo que {y: 1"(xy)} o sea el cúmulo de entes tales que existe la imagen por el abarque (i.e. por la existencia) de la pertenencia del ente en cuestión a x.

Notemos ahora estas ecuaciones: 1@(xy) = x@y = 1"(xy) = {u: ∃v(xyv&vu)}. x@y es, no (como suele leerse) el valor de la función x para el argumento y, sino: el único ente perteneciente al valor de x para el argumento y. En efecto: en cierto sentido cada determinación es una función, pues es algo, x, que, dándosele un argumento z —dándosele a su acción de abarque— produce un (solo) resultado, o ninguno, según que de hecho abarque —al menos relativamente— o absolutamente deje de abarcar a z. xz está, pues, unívocamente determinado si es que existe. En otro sentido, sin embargo, llamamos **función**, o, mejor dicho, **relación funcional**, a un cúmulo x tal que: ∀y,u,v(xyu∧xyvG.u=v), o sea tal que nada guarda x con dos entes diferentes. Si x es una **función** en este sentido, entonces x@z es aquel ente, si es que existe, con el cual guarda z la relación x; y, si no lo hay, ni siquiera relativamente, x@z no existe tampoco en absoluto pues es ={x: 0}=Λ0=0. Pero, cuando x es una relación no funcional, entonces x@z es la unión o suma de la imagen por x del cúmulo iz, o sea es el cúmulo de cuantas cosas abarca, por separado, uno u otro de los entes con los cuales guarda z la relación x. (Así, **engendrar@Jacob** es la suma mereológica de Rubén, Simeón, Leví, Judá etc., e.d. un cúmulo que abarca a cada parte de uno u otro de esos entes.) Nótese que 1@x es la suma o **unión** de x, e.d. el cúmulo de cosas abarcadas por uno u otro miembro de x.

'❋' es el **ancestral**. Sin embargo, la noción de ancestral aquí articulada no coincide con la usual (con la que viene empleada en teorías de conjuntos no combinatorias). Usualmente, en efecto, si x es la relación de engendrar, ❋x es la relación de engendrar a, o engendrar a un engendrador de, o…; al paso que con **nuestro** ancestral ❋*eng* sería otra cosa. En efecto, si x es Jacob, entonces (*eng*x) = el cúmulo de Rubén, Simeón, Levi, Judá, Benjamin, José, etc.; (2*eng*x) será el cúmulo de entes engendrados por *eng*x, no distributiva sino colectivamente. Ahora bien, no hay nada engendrado por *eng*x, e.d. por el cúmulo de entes engendrados por Jacob. Por ello ❋*eng*x sería igual al cúmulo de miembros (partes) e hijos de x, nada más. Es fácil, no obstante, definir el ancestral **usual** en nuestro sistema.

Con arreglo a la definición de '*' más arriba brindada, *(*eng*) es una relación que guardará x con aquellos entes que o bien son idénticos a x, o bien son engendrados por x, o bien lo son por alguno de los engendrados por x, o por alguno de éstos últimos, etc. etc. Similarmente, si x es la relación que guarda un número natural con los resultados de multiplicarlo por algún número natural ≤3, *(x) será una relación que guarde, p.ej., el número 5 con los números 0, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 45, 60 etc. Nótese, eso sí, que * es no el ancestral (usual) [llamado] **propio**, que es el de Russell y Whitehead, sino el **impropio** (el de Frege y de Quine), que es la unión del ancestral [usual] **propio** de una relación cualquiera con la identidad. Pero ambas nociones son interdefinibles (vide [Q2], p. 221); y, según lo muestra Quine (loc. cit.), el impropio es mucho más útil. (Para evitar confusiones terminológicas, dígase que * es el **ancestral en la acepción usual**, y ⁕ es el **ancestral en la acepción combinatoria**.)

La relación σ es, como hemos visto poco más atrás, la «sucesión». Si x es la determinación de ser algo de lo cual se ocupan los matemáticos, u es la determinación de ser un triángulo, entonces es verdad que σπxu, puesto que es algo de lo cual se ocupan los matemáticos el hecho de que los triángulos sean cosas de las cuales se ocupan los matemáticos. (π es, recuérdese, la relación de inclusión.)

Recordemos la definición de la relación ¶; pruébase esto: '⟦*¶={x: ⁕(¶")(ix)}⟧'. Conque *¶ es **la relación de predecesión**: guárdala, pues, un número natural con cuantos sean iguales o mayores que él [ordinalmente]. De hecho *¶ es demostrablemente idéntico a: {xy: ∃u(ωu∧.uσx=y}, que es otra manera, más conveniente quizá (más simple, en todo caso), de definir la relación ≤ entre los números naturales. Esta definición va a jugar un importante papel en lo que sigue.

En virtud del conyunto izquierdo de A42 pruébanse estos teoremas y esquemas teoremáticos:

∀y(xyGωy)⊃.Ex={z: ∃y(xyz)}	∃y(ωy&p)={z: ∃y(ωy&pz)}
∀y(xyGωy)⊃.Ex={zu: ∃y(xyzu)}	∃y(ωy&{z: p})={z: ∃y(ωy&p)}

Este último es el más importante y cabe leerlo así: el que haya algún número natural con relación al cual exista el cúmulo de entes que p es lo mismo que el que exista el cúmulo de entes que con relación a algún número natural sean tales que p. En otros términos: la existencia del cúmulo de entes que se relacionan así o asá con algún número natural es lo mismo que el que exista algún número natural tal que exista el cúmulo de entes relacionados con él así o asá.

En verdad son bastante evidentes muchas instancias de A42 —e.d. muchas consecuencias que se deducen inmediatamente del mismo sin más que aplicar la regla de instanciación universal: ∀xp ├ p', donde ⌜p'⌝ difiere de ⌜p⌝ sólo por reemplazo de las ocurrencias libres de ⌜x⌝ por sendas ocurrencias libres de otra variable; además, es un camino seguro para probar resultados interesantes sobre el ancestral [combinatorio], ⁕, y sobre ℭ. Por otro lado, sin embargo, hay también dos motivos para abstenerse de aseverar tal axioma. Hoy por hoy, parece sensato oscilar entre una moderada adhesión a A42 —a título, siquiera, de hipótesis verosímil— y la exploración de otras vías. Uno de los motivos para poner en duda la verdad del conyunto izquierdo de A42 emanaría de un escrúpulo extensionalista, o, mejor, extensivista (superextensionalista). Si son extensionales los conjuntos (suponiendo ahora que sea lo mismo cúmulo que conjunto), meros conjuntamientos de sus respectivos miembros, entonces no será verdad que exista el mismo conjunto de estrellas hace un millón de años que ahora (a no ser que se diga que, si bien son dos conjuntos diversos, existen ambos o siempre o atemporalmente); pues bien, para que sea afirmable con verdad algo, ese algo tiene que existir o ser-verdadero siempre; supongamos que siempre (en cada momento) hay un número natural, j, tal que existe **el** cúmulo de las j estrellas existentes, no habiendo (en absoluto) ninguna no abarcada (en absoluto) por ese cúmulo; ¿dedúcese de ahí que siempre existe el cúmulo de entes tales que hay un número natural, j, tal que dichos entes son exactamente j (e.d. tantos cuantos números naturales hay menores que j) y son todas las estrellas existentes? Alguien podría formular la siguiente objeción. «No: siempre hay un número natural así, j, pero, como varía, según los períodos, cuál sea ese número, no siempre existe el cúmulo o conjunto de las j estrellas existentes, para uno u otro j; que, si sí existen —siempre o atemporalmente— esos **diversos** conjuntos (el de las j estrellas existentes en tal fecha, el de las j^1 estrellas existentes en tal otra fecha, etc.), entonces cada uno de ellos ha de especificarse como el cúmulo de estrellas existentes en tal momento determinado —y no como el cúmulo de las j estrellas existentes para algún número natural j.» Sin embargo, esa dificultad emana de un extensivismo extremo que he criticado en [P15]. No hay motivo suficientemente razonable para rechazar que un cúmulo cambie de miembros de un lapso temporal a otro sin dejar de ser el mismo cúmulo. Si lo básico en la noción de cúmulo (o en la de conjunto) es la especificación «en comprensión» como la totalidad o multitud (o congregación, o agrupación) que une o abarca («abraza», *amplectitur*) sólo a todos los entes con tal o cual característica en común (en lugar de ser la especificación meramente extensiva de: esos diversos entes «en cuanto» conjuntados, o sea puestos juntos), entonces pierde su atractivo el extensivismo o superextensionalismo.

Al margen de ese género de consideraciones, es muy plausible el conyunto izquierdo de A42. Veámoslo con una serie de instancias y de corolarios del mismo. El que exista el cúmulo de cúmulos con j miembros, siendo j algún número non, es lo mismo que el que haya algún número non, j, tal que existe el cúmulo de cúmulos con tantos miembros como (números naturales hay menores que) j. El que exista el cúmulo de personas que han pensado alguna vez en la naturaleza de algún número natural es lo mismo que el que exista algún número natural tal que existe el cúmulo de personas que han pensado alguna vez en la naturaleza del mismo. El que exista el cúmulo de los entes idénticos a algún número natural es lo mismo que el que haya algún número natural tal que existe el cúmulo de entes idénticos a él. Hay algún número primo gemelo (de otro menor que él) mayor que cualquier otro número primo que tenga un gemelo si es que existe el cúmulo que abarca tan sólo a todos los números primos gemelos, habiendo uno de ellos mayor que todos los demás (seguramente no existe). El que haya algún número i>2 tal que exista el cúmulo de soluciones a la ecuación diofantina $x_i+y_i=z_i$ es lo mismo que el que exista el cúmulo de soluciones a tal ecuación para algún número natural i (no existirá según la conjetura de Fermat). Hay algún número natural que no sea la suma de dos primos si existe el cúmulo que abarca sólo a algún número natural así (tampoco existirá según la hipótesis de Goldbach). El que exista el cúmulo de factores de algún número perfecto non es lo mismo que el que haya algún número perfecto non tal que exista el cúmulo de sus factores.

Aparte de cuán plausible sea o deje de ser todo eso, el conyunto izquierdo de A42 permite probar, con respecto al ancestral (combinatorio), que éste es una función de cualquier adicidad (finita). Con lo cual resulta esto: el hecho de que el ancestral (combinatorio) una a tres entes, x,z,u, en ese orden, es lo mismo que el cúmulo de entes, v, tales que el ancestral une a x,z,u,v, en ese orden. Más en general —gracias al conyunto izquierdo de A42—: para cualesquiera entes $x^1,\ldots,x^n$, tales que Φx^1, Φx^2, … , Φx^n, ❋$x^1x^2\ldots x^n$ es la unión (conjuntística) de $x^2\ldots x^n$, $x^1\ldots x^n$, $x^1(x^1x^2)\ldots x^n$, $3x^1x^2\ldots x^n$, $4x^1x^2\ldots x^n$, etc. Por consiguiente, el hecho de que tal ancestral, ❋, se una a sí mismo consigo mismo es, todavía, una función, un cúmulo, a saber: el cúmulo de entes para con los cuales hace eso. Así pues, como, para cualesquiera x,z, ❋xz es la unión de los cúmulos z, xz, 2xz, 3xz, etc., e.d. es el cúmulo de entes, u, que, o son abarcados por z, o lo son por xz (e.d. z guarda con ellos la relación x) o lo son por x(xz), etc., resulta que, cuando tomamos al propio ❋ en lugar de x, ❋❋z habrá de ser igualmente una unión así. O sea, dado un argumento más, a la derecha, u, ❋❋zu habrá de ser la unión de zu, ❋zu, 2❋zu etc. Y similarmente para ❋❋zuv, ❋❋zyuv, etc. etc. Tales resultados, sin embargo, únicamente se demuestran con ayuda de A42 (aunque, desde luego, podrían postularse otros axiomas alternativos que permitieran probarlo). Porque, sin A42, ❋❋zu sería «sólo» el (mero) hecho de que hay algún número natural, v, tal que z guarda con u la relación v❋; de que para cada número natural v exista el cúmulo de entes con los cuales u guarde la relación v❋z no se seguiría la existencia del cúmulo de entes, x, tales que, para algún número natural, v,u guarda con x la relación v❋z; menos aún se seguiría que ese cúmulo (esa unión) sea, precisamente, ❋❋zu.

Vamos a considerar ahora qué cúmulo de entes (determinaciones) es 𝕮. Empezamos por ω, que es el cúmulo de los números naturales, Ø, 1, 2, … Luego tenemos χω que es el cúmulo de los miembros y subcúmulos de ω. 2χω es el cúmulo de miembros y subcúmulos de χω (incluyendo entre los últimos a cúmulos que abarquen indistintamente a miembros y a subcúmulos de ω). Vienen luego, en sucesivos estadios, 3χω (que es, a su vez, el cúmulo de miembros y subcúmulos de 2χω), 4χω, etc.

¿Cómo sabemos que todo lo hasta ahora aludido pertenece a 𝕮? Por lo siguiente. Ø pertenece a ω; luego, si algo pertenece a Ø(∈❋)❋χω, pertenece a 𝕮; mas Ø(∈❋)❋χω = ❋χω; pues bien, todo lo anteriormente aludido es demostrablemente abarcado por ❋χω.

¿Qué pasa con el propio cúmulo-límite ❋χω? Que también pertenece a 𝕮. En efecto: 1∈ω. Luego 1(∈❋)❋χω (que es idéntico a ❋❋χω) está incluido en 𝕮. Siendo ❋χω un miembro suyo, es miembro de 𝕮.

La demostración de que $\divideontimes\chi\omega$ es un miembro de $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$ es como sigue. $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$ es la unión de: $\chi\omega$ (e.d. $\varnothing\divideontimes\chi\omega$); $\divideontimes\chi\omega$ (e.d. $1\divideontimes\chi\omega$); $\divideontimes(\divideontimes\chi)\omega$' (e.d. $2\divideontimes\chi\omega$); $3\divideontimes\chi\omega$; $4\divideontimes\chi\omega$ etc. Tomemos el tercero de ellos, o sea $\divideontimes(\divideontimes\chi)\omega$, e.d. $2\divideontimes\chi\omega$. Es la unión de: ω; $\divideontimes\chi\omega$; $\divideontimes\chi(\divideontimes\chi\omega)$; $3(\divideontimes\chi)\omega$; etc. Tomemos al tercero de ellos, o sea $\divideontimes\chi(\divideontimes\chi\omega)$, e.d. $2(\divideontimes\chi)\omega$: es la unión de: $\divideontimes\chi\omega$; $\chi(\divideontimes\chi\omega)$; $2\chi(\divideontimes\chi\omega)$; $3\chi(\divideontimes\chi\omega)$; etc.; de los elementos de esta última lista, el segundo —y, por ende, cada uno de los que siguen— abarca a $\divideontimes\chi\omega$, pues éste es, evidentemente, un subcúmulo del cúmulo de miembros y subcúmulos de él mismo (cualquier ente morigerado $x\in\chi x$). Reanudemos ahora nuestra enumeración: íbamos por $3\divideontimes\chi\omega$, $4\divideontimes\chi\omega$ etc. La unión de todos los cuales es $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$.

Demuéstrase igualmente que pertenecen a $\mathfrak{C}$ no sólo todos los miembros y subcúmulos propios de $\divideontimes\divideontimes\divideontimes\chi\omega$, de $\divideontimes\divideontimes\divideontimes\divideontimes\chi\omega$, etc., sino también cada una de estas grandes uniones de cúmulos (x es un subcúmulo propio de z si es un subcúmulo de z pero $x\neq z$). Así, $\divideontimes\divideontimes\divideontimes\chi\omega$ es la unión de: $\divideontimes\chi\omega$; $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$; $2\divideontimes\divideontimes\chi\omega$; $3\divideontimes\divideontimes\chi\omega$; etc. Tomemos al tercer elemento de esta última enumeración; será la unión de: $\chi\omega$; $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$; $\divideontimes\divideontimes(\divideontimes\divideontimes\chi)\omega$; $3(\divideontimes\divideontimes)\chi\omega$; etc. Tomemos al tercer elemento de esta última enumeración; será la unión de: $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$; $\divideontimes(\divideontimes\divideontimes\chi)\omega$; $2\divideontimes(\divideontimes\divideontimes\chi)\omega$; $3\divideontimes(\divideontimes\divideontimes\chi\omega)$, etc. Tomemos al segundo de ellos; será la unión de: ω; $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$; $\divideontimes\divideontimes\chi(\divideontimes\divideontimes\chi\omega)$; $3(\divideontimes\divideontimes\chi)\omega$; etc. Tomemos al tercero de ellos; será la unión de: $\chi(\divideontimes\divideontimes\chi\omega)$, $\divideontimes\chi(\divideontimes\divideontimes\chi\omega)$, $2\divideontimes\chi(\divideontimes\divideontimes\chi\omega)$, etc.

$\mathfrak{C}$ es la unión de todas esas grandes uniones. Cada peldaño o estadio incluye a los anteriores y también los abarca.

Acerca de la cardinalidad de esos cúmulos, he aquí mis conjeturas:

ω tiene, claro está, cardinalidad ω, e.d. $\aleph_0$;

$card(\chi\omega) = \aleph_1$; $card(\divideontimes\chi\omega) = \aleph_\omega$;

$card(2\divideontimes\chi\omega) = \aleph_{\omega^2}$; $card(\divideontimes\divideontimes\chi\omega) = \aleph\mathrm{sub}[\aleph_1]$;

$card(\divideontimes(\divideontimes\divideontimes\chi)\omega) = \aleph\mathrm{sub}[\aleph_1\times\aleph_0]$; $card(2\divideontimes\divideontimes\chi\omega) = \aleph\mathrm{sub}[\aleph_1{}^\omega]$;

$card(\divideontimes\divideontimes\divideontimes\chi\omega) = \aleph\mathrm{sub}[\aleph_\omega]$;

$card(\divideontimes\divideontimes\divideontimes\divideontimes\chi\omega) \geq$ el primer punto fijo de la función $\aleph$; o sea: $\aleph\mathrm{sub}[\aleph\mathrm{sub}[\ldots\aleph_\omega]]\ldots]$ (infinitas veces).

Seguramente $\mathfrak{C}$ es otro punto fijo de esa función. Y cabe conjeturar que $\mathfrak{C}$ incluye a un cúmulo, cuya cardinalidad sea un punto fijo de la función $\aleph$, de cúmulos cada uno de los cuales sea tal que su cardinalidad es un punto fijo de la misma. (La función $\aleph$ viene definida así: $\aleph(z) = \{x: x\preceq z\}$ [donde la definición de '$\preceq$' es la ofrecida unos pocos párrafos más abajo]; $\aleph_0=\omega$; $\aleph_{x+1}=\aleph(\aleph_x)$; finalmente se completa la definición recursiva con una cláusula para $\aleph_z$ donde z es un número límite.)

Sea de ello lo que fuere, síguese de lo precedente que $\mathfrak{C}$ incluye a todos sus miembros salvo a aquellos que son miembros de ω (los números naturales). Lo recíproco no es verdad: no todo subcúmulo de $\mathfrak{C}$ es un miembro de $\mathfrak{C}$. Porque para que algo sea un miembro de $\mathfrak{C}$ ha de pertenecer a uno de esos grandes estadios ($\divideontimes\chi\omega$, $\divideontimes\divideontimes\chi\omega$, etc.) así como a los que anteceden, mas no a los que siguen; en tanto que un subcúmulo de $\mathfrak{C}$ puede tener miembros en todos esos estadios. Sin embargo, obviamente los subcúmulos de $\mathfrak{C}$ son miembros de $\chi\mathfrak{C}$. Y, por el axioma A42, todos ellos (incluyendo, por ende, el propio cúmulo gigantesco $\mathfrak{C}$) son areles —y, a fuer de tales, también entes morigerados; y, por añadidura, pertenecientes al ámbito de aplicabilidad del axioma de elección. En efecto: lo postulado por A42 al respecto es la buena ordenabilidad de $\mathfrak{C}$, e.d. que existe una relación < entre miembros de $\mathfrak{C}$, la cual es una buena ordenación, e.d. una relación que satisface las condiciones de conexidad ($x<y$ o $y<x$ o $x=y$ para cualesquiera x, $y\in\mathfrak{C}$), transitividad ($x<y, y<z \vdash x<z$), irreflexividad ($x\not<x$) y existencia de un primer elemento en cada subcúmulo no vacío de $\mathfrak{C}$ (e.d. cada subcúmulo no vacío C es tal que hay un miembro x de C tal que cada u miembro de C pero $\neq x$ es tal que $x<u$); con la puntualización adicional de que esa relación, al restringirse a los números naturales, es la intersección de la diversidad con el ancestral de la predecesión. Esa postulación es más fuerte incluso que otras

versiones del axioma de elección, p.ej. la de seleccionabilidad de cualquier subcúmulo no vacío del cúmulo seleccionable en cuestión. (Un cúmulo es seleccionable ssi, siendo un cúmulo de cúmulos no vacíos, pero disjuntos entre sí, existe una función ϕ tal que para cada uno de esos cúmulos, x, ϕx∈x.) Precisemos, sin embargo, que, postulados en su plena generalidad o sin restricciones, son equivalentes el principio de buena ordenabilidad —cualquier cúmulo está bien ordenado por alguna relación de orden—, el de seleccionabilidad, y cientos de otras versiones que han sido ampliamente estudiadas —algunas de ellas curiosas y hasta divertidas. Pero, según lo ha mostrado Rosser, cuando se postulan tales principios con restricciones —o sea tan sólo para cierto ámbito de cúmulos—, no son equivalentes. El de buena ordenabilidad es el más fuerte: para que sea bien-ordenable un cúmulo de determinada cardinalidad ha de ser seleccionable un cúmulo que lo incluya de cardinalidad mucho mayor. Aun así, nuestra postulación de A42 nos exime de aseverar el **irrestricto** axioma de elección —en cualquiera de sus versiones (una de ellas sería que Λ1 está bien ordenado)—, ya que éste es difícilmente admisible por su incompatibilidad con otros principios plausibles en teoría superior de conjuntos.

Otras consecuencias de A42 son éstas. Ante todo, 𝕮 es un ámbito de aplicación del teorema de Cantor, o sea: cada cúmulo de miembros de 𝕮 es menor que su respectivo potencial —y de ahí que, por lo tanto, cada uno de ellos, x, sea menor que su siguiente en la serie, χx, pues éste incluye al potencial de x, πx. Aplícase eso incluso a 𝕮, que es menor (más pequeño) que χ𝕮. ¿Qué pasa con χ𝕮, 2χ𝕮, 3χ𝕮, … ✷χ𝕮, … ? A partir de χ𝕮 ya deja de aplicarse al respecto A42, por lo cual nada nos dice que χ𝕮 y los que siguen estén bien ordenados; a partir de uno de esos pisos dejará de aplicarse con verdad el axioma de elección. Averiguar hasta dónde se aplique el teorema de Cantor a los miembros de esa serie será asunto de futuras investigaciones.

La postulación, en el sistema CD, de A42 constituye una concesión a los adalides de la corriente actual entre quienes profesan la teoría de conjuntos desde una vocación más matemática que filosófica.[41] Para los efectos de una matemática menos bombástica bastara con postular, en lugar de £𝕮, algo infinitamente más modesto, p.ej. £(✷χω), lo cual todavía permitiría aplicar tanto el teorema de Cantor cuanto el axioma de elección a un enorme cúmulo, a saber: la unión de ω, con χω, con χ(χω) etc., o sea de cúmulos que son —en virtud del teorema de Cantor que les seguiría siendo aplicable— respectivamente de cardinalidades $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, etc., hasta $\aleph_\omega$. Además, al hacerlo así hubiéramos podido —a estos efectos— ahorrarnos el conyunto izquierdo de A42. Lo cual, por otra parte, a lo mejor, sería preferible dado que ese conyunto izquierdo de A42 no es tan seguro como otros postulados del sistema; y, sin él, no se ha encontrado todavía la manera de introducir en CD un cúmulo como 𝕮. Claro que no faltan motivos de otro género para postular la verdad del conyunto izquierdo de A42, según se dijo más arriba.

Concluyendo ya, vamos a exponer otra definición (que viene a anular a la anterior del mismo signo, ‘<’):

⌜x<y⌝ abr. ⌜x╪y∧.ωx∧ωy∧*¶xy∨.¬(ωy)∧.(ω∩y)x∨∧([πy∩y]x)∧¬(ωx)⌝.

En la definición de número va a jugar un importante papel la unión de un cúmulo dado con su respectivo potencial (e.d. el χ de tal cúmulo), ya que por un lado, tal unión viene garantizada como (ordinalmente) mayor que el cúmulo dado, según la precedente definición, al paso que, por otro lado, permite alcanzar la doble meta de ordenar a los números tanto por pertenencia cuanto por inclusión —obteniendo con ello un orden con las ventajas de la ordenación de los ordinales en la teoría de conjuntos de von Neumann— así como, además, asegurar que el siguiente de un número sea mayor que él no sólo ordinal sino también cardinalmente (e.d. no sólo en el sentido de posterior según el

41 Al decir que mi postulación de A42 es una concesión a los seguidores de la corriente que hoy prevalece no deseo insinuar que esa postulación sea un simulacro o una finta. ¡No, no! Hay un grado indesdeñable de sinceridad en la misma. Sólo que, precisamente, la convicción se da por grados. Y mi convencimiento de que es verdadero el axioma A42 es muchísimo menor que el que tengo acerca de la verdad de los otros axiomas y postulados. Lo que digo sobre cuán difícil resulta nadar contra la corriente ha de entenderse, no como que, meramente, cueste trabajo promover puntos de vista que no gocen del favor de los círculos que marcan la pauta en el momento en que se esté, sino algo más hondo: sólo haciéndose uno «violencia» logra no dejarse influir por esa corriente. Y allende cierto punto, acaso no valga la pena hacerse tal violencia. Aunque (¡no lo olvidemos!) hay grados, en eso como en casi todo.

orden <, sino también en el sentido de **más grande que**, **de más tamaño que**). Por ello voy a introducir estas definiciones más:

‘δ’ abr. ‘{uv: iv(χu)}’

‘*num*’ abr. ‘{x: ωx∨ß(Δδ(1@))(δω)x}’

num es un subcúmulo de 𝕮 que sólo abarca a: los miembros de ω; el propio ω; χω, 2χω,… , ❋χω, χ(❋χω), 2χ(❋χω), …, 2(❋χ)ω, 3(❋χ)ω, …, ❋❋χω, ❋❋❋χω, etc. (= sea, a los «estadios» o pisos del edificio.) Está claro que *num* es un subcúmulo de 𝕮 y que cada miembro de *num* que no sea un número natural (∈ω) será un cúmulo que abarque e incluya a los números que lo preceden. No obstante, un número abarca también a muchas otras cosas que no son números. χω, el menor de los números mayores que ω, abarca, p.ej., a todos los subcúmulos de ω (abarcando también a los miembros de ω); mas, de esos subcúmulos, sólo uno (el propio ω) es un número.

¿Cuántos números hay iguales o menores que un número cualquiera dado? En particular, ¿cuál es la cardinalidad de *num*? (¿Cuántos miembros tiene *num*?) Podemos conjeturar que *num* es un cúmulo enumerable, e.d. que su cardinalidad es ω; y eso se probaría fácilmente una vez demostrado el siguiente **lema**: no hay miembro alguno de *num* que no sea denotable por algún signo de CD. Que ese lema sea —según parece verosímil— demostrable es un tema del cual me ocuparé en otro momento.

He aquí ahora otras definiciones:

‘{,,,x}’ abr. ‘{z: z<x}’

‘*func*’ abr. ‘{x: ∀y,u,v(xyv∧xyuGiuv)}’

‘y⪰x’ abr. ‘∃u(*func*u∧π(u"y)x)’

‘*cor*’ abr. ‘{x(*func*x∧*func*(Γx))’

‘x≈y’ abr. ‘∃u(*cor*u∧.π(u"y)x∧.π((Γu)"x)y)’

‘#’ abr. ‘{zx: *num*x∧.{,,,x}≈z)}’

#@z será el cardinal de z. Averiguar si, dado el axioma A42, bastan esas definiciones para desarrollar una teoría general de cardinales, e igualmente hasta qué punto sea posible, gracias a A42, desarrollar la aritmética y el análisis o teoría de los números reales son tareas que dejo para otro lugar. El lector puede ejercitarse de momento con esas demostraciones. En particular he aquí una lista interesante de tres problemas propuestos:

1º.— Encontrar versiones demostrables en CD (con A42) del teorema de Schröder-Bernstein (a saber: ∀x,z(z⪰x∧(x⪰z)⊃.z≈x)) restringidas a 𝕮.[42]

2º.— Encontrar diversas variantes de los teoremas usualmente considerados como equivalentes al axioma de elección (lema de Zorn, postulado de la buena ordenación, etc.) que sean demostrables en CD restringidos a 𝕮 y con ulteriores restricciones de algunos cuantificadores a entes morigerados.

3º.—Averiguar si puede probarse que en CD es indemostrable la existencia de cardinales inaccesibles.[43]

42 Vide supra (nª 24). Otra versión interesante del teorema de Schröder-Bernstein es el que —dentro del sistema NF de Quine— prueba J. B. Rosser en *Logic for Mathematicians* (New York: Chelsea, 2ª ed., 1978), p. 353, a saber (más o menos): ⌜x≈z∧(πuz)∧(u≈y)∧(πxy)⊃.x≈u⌝. Lo cual significa que, si un cúmulo es del mismo tamaño que un subcúmulo de otro que es, a su vez, del mismo tamaño que un subcúmulo del primero, ambos cúmulos son de igual tamaño. En CD no parece poder probarse ese teorema más que en versiones restringidas, p.ej. en versiones que se ciñan a subcúmulos o miembros de *B*. Lo cual es suficiente, desde luego, permitiendo probar aquel corolario de dicho teorema que se refiere a los números cardinales en general (vide Rosser, op. cit. p. 376): ⟦∀x,y(*num*x∧*num*y⊃.x≠y⊃.x<y∨.y<x)⟧. Lo cual es un principio de conexidad u orden total entre los números. (Sobre el teorema de Schröder-Bernstein, cf. de F.R. Drake, *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*, North-Holland, 1974, pp. 46ss. Otros resultados interesantes que pueden obtenerse con respecto a nuestro cúmulo o colección *num* (incluso sin tener en cuenta la aplicabilidad del axioma de elección a todos los miembros y subcúmulos de 𝕮 y, por lo tanto, a los de *num*) es que para cualesquiera números transfinitos (≥ω), x, z, x≥z ssi x⪰z. En ese sentido, todos nuestros números son ordinales iniciales en la acepción de von Neumann (vide Drake op. cit., p.47), de suerte que cada número es igual al cúmulo de los que son de tamaño menor que él. Sin embargo, una cosa es el tamaño o cardinalidad de un número, otra el tamaño del cúmulo de números pertenecientes a ese número. χω es un cúmulo de cardinalidad inenumerable (pues es ≈πω), al menos según el teorema de Cantor (aplicable a *num* en virtud del axioma A42); mas el cúmulo de números pertenecientes a χω (o sea la intersección *num*∩(χω)) es un cúmulo que abarca sólo a ω+1 números, e.d. a ω números. ¿Cuál es el menor número que abarque a 2^{ω} números?

43 Defínese un cardinal x como **inaccesible** si cumple estas tres condiciones: (1) ω<x; (2) para cualquier cardinal z≺x, χz≺x; (3) para cualquier cúmulo z de cardinales menores todos que x tal que el cardinal de z sea menor que x (o sea z abarca a menos de x cardinales) 1@z≺x. (Vide p.ej. J.R. Schoenfield, *Mathematical Logic*, Reading (Mass.): Addison-Wesley, 1967, p.304; F.R. Drake, op. cit. supra (nª 42), p.67; Mary Tiles, [T3], p. 180, ofrece otra definición equivalente). Una útil definición hállase en el trabajo de Kurt Gödel «¿Qué es el problema del continuo de Cantor?», [G2], p. 354.) Resulta prácticamente seguro que χ*num* no abarca a ningún cardinal inaccesible (aunque también es probabilísimo que el universo de CD, o sea Λ1, sí sea, él mismo, un cúmulo «inaccesible»

§4.— Unas pocas puntualizaciones adicionales

(1ª) Siguiendo a Fitch (op. cit. en nª 36, pp.61ss) cabe definir la multiplicación entre números naturales así: ‘u×v’ abrevia a ‘Δru’. Demuéstranse para la multiplicación leyes como las de asociatividad (para cualesquiera miembros de $\mathfrak{C}$, x, u, v: Δ(Δxu)v = Δx(Δuv)) así como existencia de elemento neutro (1 lo es: Δ1x=Δx1=x); con aplicación restringida al dominio ω de los números naturales, esa multiplicación es también conmutativa. Fitch, loc. cit., justifica el denominar **multiplicación** al combinador en cuestión (escrito en su notación de otro modo) con estas palabras: ese combinador ‘is a kind of multiplication. In fact, in the theory of groups, if the elements of a group are regarded as being transformations, then the fundamental group operation of multiplication is exactly this kind of multiplication’. Así, el producto de dos rotaciones ϕ,γ, será Δϕγ, o sea una rotación doble tal que, para un argumento normal (un arel), x, Δϕγx=ϕ(γx): el resultado de efectuar primero la rotación y luego la ϕ. Por eso Δ es lo que también suele denominarse **composición** de operaciones y escribirse ‘∘’. Definiéndose, luego, la exponenciación x^z como zx, obteniéndose asimismo para los miembros de ω todas las leyes de la exponenciación aritmética. (Para más detalles vide cap. 4 del libro de Fitch, pp. 78ss. Nótese, empero, que su sistema tiene muchos rasgos diversos de CD y que sus demostraciones no pueden de ningún modo «calcarse», ni siquiera recomponerse o arreglarse fácilmente, para aplicarlas a CD.)

(2ª) Una característica que poseen tanto CD (a causa de *rinf*05) como igualmente varios de los sistemas de Fitch es que no son sistemas recursivamente axiomatizables. Un sistema es recursivamente axiomatizable si hay un procedimiento de decisión mecánico para poder llegar a saber, dada una fórmula, si es o no un axioma del sistema. Los sistemas recursivamente axiomatizables tienen sendos conjuntos de teoremas recursivamente enumerables. Un conjunto es recursivamente enumerable si hay un procedimiento de decisión mecánico para, dado un miembro del conjunto, determinar, en un número finito de pasos, que efectivamente pertenece al conjunto; si un conjunto x es recursivamente enumerable y si también lo es su complemento relativo (en este caso, el conjunto de las fórmulas no pertenecientes a x), entonces x es recursivo. Hay una importante demostración debida a Craig a cuyo tenor, si un sistema es axiomatizable con un conjunto de axiomas que sea recursivamente enumerable, entonces es recursivamente axiomatizable (e.d. es axiomatizable con un conjunto de axiomas no sólo recursivamente enumerable sino incluso recursivo). Como CD y los sistemas de Fitch no son recursivamente axiomatizables, ni por ende —a tenor del teorema de Craig— axiomatizables de manera recursivamente enumerable, sus respectivos conjuntos de axiomas no son ni siquiera como los conjuntos de teoremas de las teorías estándar. (Con otras palabras, ninguna teoría estándar puede probar como teoremas sólo todos los axiomas de CD.) La relación de demostrabilidad en CD es mucho más amplia y laxa, menos rígida, que en los sistemas estándar. En éstos una prueba o demostración es una secuencia de enunciados decidible, o sea tal que hay cómo programar (en principio) una computadora para que reconozca y acredite fehacientemente, tras un número finito de pasos, que efectivamente se trata de una prueba. Que eso no es una exigencia arbitraria muéstralo cuán hondas raíces tiene en nuestra concepción de la razón: no aceptamos cualquier secuencia de prolaciones como un argumento, sino que

en una acepción que consiste en una fácil y sencilla generalización de la noción de inaccesibilidad de cardinales recién introducida). Es, desde luego, un tanto dudoso cuán interesante sea toda la teoría de los grandes cardinales (habría que añadir los hiperinaccesibles, hiperhiperinaccesibles, etc.: vide el lugar ya citado de [T3] y también Kenneth Kunen, «Combinatorics», ap.[B4], pp.396ss). Todo eso tiene aire de cuento de hadas, o, acaso más bien, de algo como la jerarquía de las escalas angélicas de Dionisio Areopagita —aunque no sé si las haya inaccesibles—, con una diferencia, sin embargo: la coherencia de los cuentos de hadas parece más asegurada y, hasta donde lo coherente sea metafísicamente posible —que no siempre lo es desde luego— podemos conjeturar que esos cuentos, siendo relatos de hechos posibles, describen lo que efectivamente sucede en algunos aspectos de lo real o «mundos-posibles», aunque sean aspectos recónditos y menos reales que los del mundo de la experiencia cotidiana. Mas hay tres razones para guardar un marcado escepticismo hacia la teoría de los cardinales transfinitos, especialmente de los llamados *large* y los *huge* o enormes, a saber: (1) resulta dificilísimo probar la coherencia de los postulados que permiten demostrar la existencia de cardinales transfinitos como los aludidos; (2) es muy oscura la relación entre ese «estudio» y otros dominios de la matemática un poco más sobrios; (3) por añadidura, efectúase ese «estudio» en teorías de conjuntos que entronizan irrestrictamente el teorema de Cantor y el axioma de elección, ambos dudosísimos en cualquier versión de los mismos que sea irrestrictamente universal. Mas, como le es a uno tan costoso ir totalmente contra la corriente, he postulado el axioma A42 para dar cabida en mi sistema a una parte nada menospreciable de esas lucubraciones sobre los transfinitos. Sin embargo, mi convicción de la verdad de A42 es muchísimo menor que la que tengo en la verdad de los otros axiomas del sistema; cf. supra, nª 25. (Nótese, por último, que, en las definiciones de esta nota, ‘mayor’ [‘menor’] se toma indistintamente, y a la vez, en el sentido ordinal de **posterior** [**anterior**] y en el cardinal de **más grande** [**más pequeño**], ya que varias teorías de cardinales —no todas sin embargo: no lo hacen las de Frege, Russell y la de Rosser construida sobre la base de NF de Quine consiguen, mediante definiciones, que ambas relaciones coincidan en el campo de los cardinales. La teoría aquí propuesta hace lo propio para cardinales transfinitos.)

ha de tratarse de una secuencia «imparcialmente» reconocible como eso, como un argumento o razonamiento. Pero la recursividad es una exigencia excesiva; a lo sumo un *desideratum* que sólo vale como ideal para casos límite, pero al cual es lícito no atenerse, en aras de granjearse ventajas mejores. Y las ventajas no son baladíes, en este caso: evitar la incompletabilidad que —según demostró Gödel— afecta a todo sistema recursivamente axiomatizable que contenga la aritmética —bajo una u otra versión; alcanzar la mayor aproximación posible a un irrestricto principio de abstracción sin renunciar ni al tercio excluso ni a la existencia de negación fuerte; aproximación que en CD se consigue gracias, además de los otros axiomas, a la regla de inferencia **rinf**05, que es una disyunción, a cuyo tenor sólo deja de ser un teorema $\ulcorner\{r: p\}r=p\urcorner$ cuando es un teorema $\ulcorner\{r: p\}r\neq p\urcorner$, e.d. cuando existen motivos específicos demostrablemente lo bastante fuertes como para excluir una de esas ecuaciones.

SECCIÓN IV

CUESTIONES DE FILOSOFÍA DE LA LÓGICA

Capítulo 1º.— CÚMULOS DESFONDADOS

En el cap. 4º de la Sección III (esp. en la nª 11, en la págª 215) ya señalé que ni la realidad ni el pensamiento son «constructivos», sino que encierran circularidad. No obstante, la teoría estándar de conjuntos —ZF y sistemas afines— contiene como uno de sus axiomas el llamado **principio de buena fundación**, a saber (escogiendo una de sus versiones, pues hay varias, y no todas ellas equivalentes entre sí en cualesquiera sistemas): sea A una clase cualquiera no vacía; entonces hay un miembro M de A tal que ningún miembro de M es miembro de A. De ese principio se deducen dos corolarios (si bien la deducción del segundo presupone el axioma de elección, y por lo tanto no se aplica en general, salvo si se admite ese axioma, tan sumamente discutible tomado en irrestricta generalidad). El primero es que ningún conjunto se abarca a sí mismo. El segundo, más general, es que nunca existe una cadena infinita de abarques tal que, para ciertos x^1, …, x^n, x^{n+1}, …, se tenga: $x^1x^2\wedge x^2x^3\wedge\ldots x^nx^{n+1}\wedge\ldots$. Aunque, según lo acabo de decir, este último corolario sólo viene deducido del principio de buena fundación aduciendo el axioma de elección, a los efectos que aquí nos interesan podemos identificar el principio con ese corolario segundo; pues, en los casos corrientes (cúmulos de cardinalidad numerable, o incluso de cardinalidad accesible), el axioma de elección es sin duda correctamente aplicable (y únicamente falla en cúmulos gigantescos de cardinalidad todavía mayor —al menos desde mi punto de vista, término medio entre la aceptación irrestricta del axioma, común entre la gran mayoría de los clasicistas, y el rechazo del axioma por una minoría de lógicos, como los intuicionistas). Sea como fuere, la deducción del primer corolario no plantea la menor dificultad. Pongamos un ejemplo: imaginemos un cúmulo $V^1=\{V^1,V^2, V^3, \ldots, V^n, \ldots\}$, e.d. un cúmulo V^1 que abarca a un número finito o infinito de entes, a saber: el propio V^1 y otros, V^2, …, V^n, …. Consideremos ahora el síngulo de V^1, $\{V^1\}$; el síngulo [o cúmulo unitario] de un ente x, {x}, es el cúmulo de las cosas idénticas a x y, por lo tanto, es un cúmulo que abarcará únicamente al propio x. De ser verdadero el principio de buena fundación, $\{V^1\}$ obviamente tendrá que abarcar —puesto que no es vacío— a un cúmulo que a su vez no abarque a ningún ente abarcado por $\{V^1\}$; mas resulta que sólo abarca a V^1, que precisamente **sí abarca** a un ente abarcado por $\{V^1\}$.

El que un cúmulo se abarque a sí mismo es un caso particular de una cadena infinita de abarques, a saber: una en la cual todos los entes involucrados en la cadena resultan ser idénticos entre sí. Existe en una buena parte de la tradición de pensamiento, desde Aristóteles (y desde Parménides), un repudio de las cadenas infinitas, y en general de la existencia del infinito; y es que el infinito suscita problemas, evidentemente (y hasta es probable que tan sólo sea satisfactoria una solución a los mismos que se efectúe dentro de un marco contradictorial). Concibiendo los cuerpos como cúmulos de sus respectivas partes (según lo sugerí en el §2 del último capítulo de la Sección III de este libro), lo normal es pensar que haya cadenas infinitas de abarques: España abarcará a la provincia de Guipúzcoa, que abarcará a la ciudad de Irún, que abarcará a tal calle, y así sucesivamente al infinito (salvo que sea uno atomista, y entonces quizá opte por identificar a un átomo con su respectivo cúmulo, p.ej.). En cualquier caso, los adeptos del principio de buena fundación (o **principio de regularidad**, cual también suelen denominarlo) rechazarán eso y, desde luego, cualquier autoabarque.

Ese principio es uno de los dogmas de la llamada concepción cumulativa o iterativa de los conjuntos, y hasta hace poco venía profesado unánimemente por cuantos querían cultivar una teoría de conjuntos con visos de respetabilidad matemática. Sólo quienes —como Quine— son diseñadores de teorías de conjuntos «raras» —teorías con mala prensa entre los matemáticos— se permitían imaginar conjuntos que se abarcaran a sí mismos. En [P15] critiqué la teoría estándar por varios motivos, entre otros precisamente ése, aduciendo lo plausible que es concebir un cúmulo A que se abarque a sí mismo, o que abarque a otro que a su vez abarque a A, etc. El ejemplo que alegué fue éste: un cúmulo A={C,D,A}, e.d. uno que abarque sólo a tres entes: C, D, y el propio cúmulo abarcante; y representé eso como una situación en la cual A sería, con respecto a C y a D, *ambo et uterque*. Si C, D, son dos personas, p.ej., A sería el cúmulo que formaran ellas dos por separado más ellas dos juntas en una unidad; unidad que no sería otra que ese mismo cúmulo; los tres miembros de tal unión serían, pues, las dos personas y la propia unión de ellas dos; así que en una pareja el amor o la adhesión que un miembro pueda sentir a la unión que forman puede entenderse como un sentimiento hacia un cúmulo de esos tres miembros —uno de ellos, la propia unión.

Últimamente, sin embargo, parece que ya no resulta tan peregrina esa idea de cúmulos **desfondados**, o sea cúmulos que, directa o indirectamente, se abarquen a sí mismos. Dentro incluso de la corriente principal de las investigaciones estándar en teoría de conjuntos, se están desarrollando los tratamientos que proponen admitir conjuntos desfondados. Peter Aczel, en [A1], formula lo que llama al «Anti Foundation Axiom», que viene a afirmar la existencia de conjuntos desfondados. La base de partida de Aczel es un descubrimiento anterior sobre modelización de la teoría estándar por medio de grafos direccionados, más luego la constatación de que hay grafos que sirven de modelos a todo lo demás de la base axiomática de la teoría estándar pero que, sin embargo, no se atienen al principio de buena fundación. Sin entrar aquí en detalles, podemos decir que lo que así viene a reconocerse son conjuntos como éstos: $V=\{V\}$, $V^1=\{V^2,V^1\}$ (o sea $V^1=\{V^2,\{V^2,V^1\}\}$), etc. Un caso del último tipo es: $V=\{\{V\},V\}=\{\{V\},\{\{V\},V\}=\{\{V\},\{\{V\},\{\{V\},V\}\}\}=\ldots$ Tal hipótesis no identifica a V con $\{V\}$: V tiene dos miembros, $\{V\}$ uno. V puede ser una sociedad por acciones con dos miembros accionistas, a saber: la propia sociedad y otro miembro. Sea éste Jenaro, quien constituye la empresa FISA —inicialmente poseyendo él el 100% del capital; luego —si las leyes lo permiten (y habrían de hacerlo si son respetuosas de los principios inspiradores de la economía de mercado)—, FISA, igual que compra acciones de otras firmas, le compra a Jenaro una parte de las acciones de la propia FISA; ya hay, pues, dos accionistas, y tenemos la situación ideada. Lo de Góngora de «Con mis soledades vengo» tiene algo o mucho que ver con eso.

Jon Barwise, en [B2], pp. 192ss., examina una serie de ejemplos plausibles de conjuntos que se abarquen a sí mismos. El punto de partida de Barwise es su semántica de situaciones, que no nos interesa analizar aquí; su idea es que un conjunto puede verse como el resultado de tomar una situación en el mundo haciendo caso omiso de la estructura de tal situación; todo lo que esté involucrado en la situación será un miembro del conjunto. Si hay situaciones que se involucran a sí mismas (o sea tales que sean, entre otras cosas, sobre sí mismas), entonces habrá conjuntos que se abarquen a sí mismos. Y aduce una serie de situaciones que, plausiblemente, se involucran a sí mismas. He aquí algunas de ellas.

Un acto reflexivo de pensar es un acto que, al menos entre otros objetos, se tiene a sí mismo como objeto. Cuando Descartes piensa que piensa, su *cogito* le resulta probante porque tiene como objeto al propio *cogito*.

Un conocimiento compartido puede entenderse como el que haya una situación s consistente en que se dé cierto hecho, p, y en que dos sujetos, A, B, sean tales que cada uno conozca la situación s. Reemplacemos ahora las situaciones por conjuntos de tal manera que veamos al representante de una situación, s, no como el conjunto de entes en ella involucrados sino como el conjunto de conjuntos que representen a las situaciones involucradas en s, y así sucesivamente. Es obvio que tendremos un cúmulo s que abarcará a tres cúmulos dos de los cuales abarcan al propio s (circularidad en el abarque).

Muchas veces se hacen declaraciones que versan, entre otras cosas, sobre sí mismas. P.ej. suena por los altavoces un aviso que dice: 'El tren para Aranjuez está estacionado en la vía 1; este aviso no se repetirá'. El aviso habla de varias cosas, pero una de ellas es el propio aviso. Desarrollando esa fructífera manera de ver las cosas, Barwise y Etchemendy han escrito un excelente libro sobre las paradojas semánticas, ***The Liar: An Essay on Truth and Circularity***, Oxford U.P., 1987; los días del predominio indiscutible de los dogmas tarskianos sobre los niveles del lenguaje están ya contados, afortunadamente, ya que hasta dentro del clasicismo se buscan alternativas mucho más interesantes y atractivas que esa de Tarski que prohibía toda circularidad.

Igualmente, existe una cierta propiedad o determinación de los enunciados lingüísticos, investigada por Grice, y que, llámese como se llame, consiste en que, al proferir un enunciado, el locutor tiene una cierta «*intención*»: que el destinatario del mensaje se dé cuenta de que él sabe tal cosa (no tiene por qué ser la misma cosa que él dice), o crea que ignora tal otra, o se conmueva, o lo que sea; y una de esas intenciones puede ser la de que el otro se dé cuenta de su intención.

Más en general, los verbos llamados **performativos** (anglicismo útil), o «ejecutivos», constituyen un ámbito interesante en este terreno. Si alguien dice 'Prometo hacerlo' es como si dijera: 'Lo haré; esto es una promesa'.

Pero hay varios ejemplos interesantes que no aborda Barwise. Uno de ellos es lo constitutivo de los Estados: un Estado es una organización armada a la que los demás Estados reconocen el privilegio de ejercer monopolísticamente la fuerza dentro de cierto territorio. O sea el cúmulo de los estados es el único cúmulo que abarca sólo a todas las organizaciones a las que los demás miembros del cúmulo reconocen ese privilegio. Por circular que sea, así sucede. Y otro tanto pasa con la ciencia: una ciencia es un conjunto de actividades investigativas reconocidas en la comunidad científica, o sea: reconocidas como formando un miembro del cúmulo de las ciencias por los cultivadores de varios de los otros miembros de tal cúmulo.

Otro ejemplo que no aborda Barwise y que me parece el más claro hoy de todos, y extendidísimo por cierto: algo que es corriente en programación de computadoras, en cualquier nivel, y con lo cual seguramente está familiarizado el lector, aunque sólo sea por el uso de los llamados archivos «por lotes» (*batches*) de los sistemas operativos, o las macros de ciertos programas: uno, al redactar uno de tales archivos o una macro, inicia una rutina escribiendo un rótulo; al denominarlo, hace que comience a existir tal rutina o rótulo, dentro del cual puede insertar una llamada al propio rótulo, como «Ir a *rótulo*». Todos esos rótulos, o bucles, son obviamente circulares.

Siendo todo ello así, lo único que cabe reprochar a lógicos como Barwise y Aczel es su apego al resto de los axiomas de la teoría estándar de conjuntos. El fracaso del principio de buena fundación, evidenciado por la existencia de cúmulos desfondados —cuya importancia es cada vez más clara, y que son numerosísimos en todos los dominios—, ha de acarrear una quiebra de la concepción, un tanto forzada y apañada, que dizque inspira a la teoría estándar de conjuntos, esa concepción iterativa o cumulativa. Porque la verdad es que sin ese mínimo de la exclusión de cúmulos desfondados, poco o nada queda de esa concepción. Claro que a efectos prácticos puede manejarse el resto de la base axiomática de ZF y de teorías afines, pero ya sin las pretensiones abusivas de que encarnen «la» visión oficial y genuina de qué sean los conjuntos.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 2º.— ACERCA DE LA EXISTENCIA DE VERDADES MUTUAMENTE CONTRADICTORIAS

El mundo está plagado de contradicciones verdaderas, o sea: de verdades mutuamente contradictorias. El pensamiento dignoscitivo es el que rechaza tal aserto, aferrándose al principio erróneo de que cualquier contradicción es **completamente** falsa, e.d. al **principio de exclusión de situaciones contradictorias** (PESC, abreviadamente), a saber:

(PESC) $\neg(p \wedge Np)$

Nótese bien, en PESC, la mezcla de negaciones. Por supuesto, dada la tosquedad de los instrumentos que manejan, p.ej., los adeptos de la exclusividad de la lógica clásica (de la tesis según la cual cuanto hay que decir en el terreno de la lógica de oraciones o sentencial está dicho en la lógica clásica, y, por ende, no hay más negación que la supernegación), les resulta difícil hasta dar con la formulación de (PESC); pero implícitamente sí propugnan ese malhadado principio, pues, como, **para ellos**, ‘N’ y ‘¬’ tienen el mismo sentido, lo mismo da decir que es falsa cualquier contradicción que decir que cualquier contradicción es completamente falsa.

Otros autores, que sí aceptan graduación en las cosas (p.ej., Łukasiewicz y los elaboradores de las teorías estándar de conjuntos difusos, como Lofti Zadeh), aunque no aseveran PESC, adoptan una actitud similar, en la práctica: el **rechazo de la contradicción**, RC: no debe admitirse ninguna contradicción. Tal actitud fue mantenida en años pasados hasta por N. Rescher —quien posteriormente ha modificado su postura—, que es uno de los adalides del uso y valor de lógicas no-clásicas y, en particular, de lógicas multivalentes. A diferencia de los clasicistas, esos otros autores (Łukasiewicz, Zadeh, etc) reconocen que muchas propiedades y características se da por grados; y Zadeh habla incluso de grados de verdad (‘más verdadero’, ‘menos verdadero’, ‘muy verdadero’, etc.); pero, en el fondo, los grados que ellos reconocen no son grados **de verdad**, sino grados aléticos o veritativos, usando el adjetivo en el sentido de ‘relacionado con la verdad’. Lo verdadero, para ellos, es sólo lo completa o totalmente verdadero (maximalismo alético); lo no del todo verdadero no es verdadero (no es, en absoluto, verdadero en sentido propio), sino ‘cuasi verdadero’, o ‘entre verdadero y falso’; así, hablando con propiedad y rigor, esos autores no debieran usar expresiones como ‘más verdadero’ o ‘menos verdadero’ (Łukasiewicz no las usó, pero Zadeh —inconsecuentemente con su abandono del principio de tercio excluso y con su rechazo de la regla de apencamiento— sí las emplea); lo que debieran decir es ‘más próximo a la verdad’ o ‘más alejado de la verdad’.

Para esos autores, pues, la verdad no comporta grados, no se dan en grados, sino que, si y cuando se da, se da plena y absolutamente; y, cuando no se da, deja totalmente de darse; y lo mismo cabe decir respecto de la falsedad. De modo que nada puede ser verdadero y falso a la vez (pues parece obvio que, para que algo pueda ser, a la vez, verdadero y falso, real e irreal, es menester que la verdad y la falsedad se den por grados y que lo que sea verdadero y falso sea verdadero sólo hasta cierto punto y, simultáneamente, falso sólo hasta cierto punto). El resultado de semejante actitud que, por más que acepte grados, no reconoce grados de verdad, sino tan sólo de aproximación a la verdad, es que, por un lado, en efecto, no pueden quienes la adoptan aceptar contradicción alguna; pero, por otro lado, quienes la adoptan se ven conducidos a arrojar por la borda muchos principios lógicos correctos, como los de no-contradicción, tercio excluso, abducción. Y, para salvar el principio de autoentrañamiento, las lógicas łukasiewiczianas adoptan un condicional forzado y depauperado, para el cual no valen ni el principio del buen entrañamiento, ni la ley de Peirce, ni el principio de importación, ni el de aserción conyuntiva; la raíz del mal estriba en no considerar como valor alético **designado** (o sea: verdadero) más que a lo totalmente verdadero. En resumen, el gradualismo łukasiewicziano es un gradualismo no contradictorial (no dialéctico) por ser un gradualismo no propiamente veritativo o alético; sus grados son grados de aproximación a la verdad, no grados de verdad.

Otros sistemas que, aunque emanados de consideraciones ajenas a la temática de la gradualidad (consideraciones gnoseológicas de cuño idealista, cual son las que animan al intuicionismo de Brouwer, Heyting y Dummett), pueden, empero, asociarse al enfoque gradualista no contradictorial son las lógicas multivalentes de Gödel, las cuales, en lugar de poseer sólo negación débil, como los sistemas de Łukasiewicz, poseen sólo negación fuerte; con ello salvaguardan el principio de no (super)contradicción (de no contradicción para la negación fuerte, que es la única que conocen); pero, como tampoco los sistemas gödelianos reconocen más valor de verdad designado que lo totalmente verdadero, también ellos sacrifican la regla de apencamiento, uno de los dos principios de abducción (el correspondiente a ⌜$\neg p \supset p \supset p$⌝), el principio (fuerte) de tercio excluso, la ley de Peirce, el principio del buen entrañamiento. Y, desde luego, también esos sistemas se aferran al rechazo de cualquier contradicción (sucediendo además que —como tales sistemas no conocen más negación que la **super**negación o negación fuerte— cualquier contradicción imaginable desde el ángulo de dichos sistemas sería una supercontradicción, una fórmula del tipo «p y es del todo falso que p»). Veamos, someramente, catorce objeciones que contra la defendibilidad de la existencia de verdades mutuamente contradictorias han coreado tanto los clasicistas como los adeptos de un gradualismo no contradictorial (y, por ende, no propiamente veritativo).

★ **1ª Objeción**.— Si está uno dispuesto a aceptar contradicciones, se pierde todo test para saber si una teoría es, en principio, descalificable o descartable; dicho de otro modo: se pierde todo test de reducción al absurdo.

Respuesta: No es así. Pues, si el sistema lógico que se adopte contiene, además de una negación débil, con respecto a la cual pueden darse contradicciones verdaderas, también una supernegación, o negación fuerte, y si contiene, a la vez, un condicional con todas las propiedades del clásico (tal es el caso de nuestro functor '$\supset$'), entonces tenemos un excelente test de reducción al absurdo: una teoría es descalificable lógicamente ssi hay alguna fórmula $\ulcorner p \urcorner$ tal que la teoría contiene como teoremas tanto a $\ulcorner p \urcorner$ como a $\ulcorner \neg p \urcorner$.

★ **2ª Objeción**.— Sobre la base de principios obvios se puede probar la validez o corrección del principio de Escoto, a saber: $\ulcorner p \wedge \sim p \supset q \urcorner$; por lo cual, todo sistema contradictorial será delicuescente, incoherente, ya que en él cualquier fbf será afirmada como si fuera verdadera.

Respuesta: Todas esas demostraciones del principio de Escoto utilizan, en uno de sus pasos, el principio del silogismo disyuntivo; ahora bien, ese principio es válido únicamente par la negación fuerte, siendo inválido para la negación débil; el principio de Escoto es válido sólo para la negación fuerte, de ningún modo para la débil. De ahí que, aunque efectivamente ha de ser incoherente cualquier sistema que contenga una supercontradicción, puede haber teorías contradictoriales perfectamente coherentes.

★ **3ª Objeción**.— Las presuntas contradicciones verdaderas surgen de nuestros modos de hablar, de confusiones verbales, de ausencia de oportunos distingos; una vez despejadas tales confusiones mediante distingos convenientes, desaparece el atractivo del recurso a teorías contradictoriales.

Respuesta 1ª: Muchos de esos distingos que, desde Aristóteles hasta los pensadores dignoscitivos actuales, se han propuesto para soslayar las contradicciones son, no ya arbitrarios y rebuscadísimos, sino inverosímiles, forzados, oscuros, y despiden un fuerte hedor propio de los artilugios, o subterfugios, *ad hoc*; no se formulan a tenor de reglas generales, sino en una serie de tácticas oportunistas, caso por caso, aplicadas a bulto y al albur de la «inspiración» o el «presentimiento»; y aun aquellos que sí podrían ajustarse a una regulación general carecen, las más veces, de cualquier atractivo que no sea el de permitir a sus adeptos esquivar las contradicciones. Vale más, por consiguiente, aceptar la realidad de verdades mutuamente contradictorias.

Respuesta 2ª: Un distingo que, en cambio, es natural y casi de cajón, y que, no obstante, se le escapa a los filósofos que inventan, pulen, repulen y acicalan sutiles —y, a menudo, difícilmente comprensibles— distingos cuyo único mérito es el de soslayar la aceptación de contradicciones, es la distinción entre negación fuerte y negación débil, entre el 'no … en absoluto' (='de ninguna manera', etc.) y el mero 'no'. Al adoptarse esta distinción como lo hace el locutor de cualquier lengua natural, se evita la confusión —ésa sí, gravísima— entre contradicción y supercontradicción, entre una mera y simple contradicción, que puede ser verdadera, y hasta obvia, anodina incluso, y una supercontradicción que, ciertamente, sería catastrófica.

★ **4ª Objeción**.— Aunque la gente habla corrientemente profiriendo mensajes que, tomados literalmente, son contradictorios y parecen avalar la tesis de que hay verdades contradictorias (si es que lo que esa gente dice es verdadero), tales mensajes no vehiculan un sentido literal, y tanto el locutor como el receptor estarían de acuerdo en parafrasearlos de algún modo idóneo, de suerte que desapareciera la apariencia contradictoria.

Respuesta 1ª: Aunque así fuera, ello no excluye que, por motivos independientes de lo que la gente diga o deje de decir en sus conversaciones corrientes, quepa reconocer la existencia de verdades mutuamente contradictorias; de esos otros motivos ya hablaremos en la respuesta a la objeción 11ª.

Respuesta 2ª: La gente que emite mensajes contradictorios los entiende, en los más casos por lo menos, como contradicciones; dice lo que quiere decir, y quiere decir lo que dice. Verdad es que puede uno inventarse paráfrasis que descontradictorialicen tales mensajes, pero deberían imponerse tres normas de decencia al acudir a ese procedimiento: 1) buscar reglas generales —evitar el recurso a paráfrasis *ad hoc* o a principios de traducción aplicados a bulto y sin el respaldo de reglas generales; 2) lograr que esas reglas estén provistas de plausibilidad, y sean defendibles con argumentos independientes del mero hecho de que, mediante ellas, se consiguen obviar las interpretaciones literales —y, por ende, contradictorias— de lo que la gente dice; 3) lograr que tales reglas sean razonablemente simples —en todo caso, que la complejidad de las reglas y lo dificultoso de su aplicación no sean mayores que las complicaciones lógicas derivadas del reconocimiento de la existencia de verdades mutuamente contradictorias y de que la gente común y corriente las acepta y las vehicula en su habla cotidiana. Ahora bien, nadie hasta ahora se ha atenido a esas tres reglas en el empeño por hallar a todo trance traducciones o paráfrasis de lo que dice la gente, mediante las cuales se evite la interpretación literal, contradictorial, de muchos mensajes. Tales paráfrasis son, las más veces, sacadas de la manga, engorrosas, sumamente discutibles en el mejor de los casos, cuando no asombrosas o hasta ridículas; y, desde luego, carentes de justificación filosófica y lingüística sistemática, con el agravante de que suelen apelar al presentimiento o a cosas parecidas.

★ **5ª Objeción**.— La existencia de verdades mutuamente contradictorias es una hipótesis o conjetura no más. Sólo sería aceptable si fuera factible articular una concepción del mundo, y una teoría organizada de lo real, de manera global y en cada disciplina científica, con arreglo a esa hipótesis. Pero ello resulta o imposible o complicadísismo.

Respuesta 1ª: No resulta imposible, como es obvio, puesto que existen sistemas lógicos paraconsistentes (e.d. tales que permiten que se afirmen enunciados mutuamente contradictorios sin caer por ello en incoherencia); y algunos de esos sistemas son contradictoriales (tal es el caso del sistema aquí propuesto, *Aj*). Y no es complicadísimo: la teoría lógica resulta más complicada, ciertamente, que la puerilmente simplona lógica clásica, en la que sólo hay un par de functores primitivos (o incluso uno solo, '/', pudiéndose leer ⌜p/q⌝ así: «O es totalmente falso que p, o es totalmente falso que q»). Pero las complicaciones lógicas adicionales de un sistema como el aquí propuesto son compensadas, con enormes creces, por la portentosa simplificación que, mediante ellas, se alcanza en tantísimos dominios de la investigación, desde la lingüística hasta la paleontología, la física, la historiografía, la geografía, la biología, la medicina; y, más que ningún otro dominio, en la propia filosofía, ante todo en la metafísica u ontología.

Respuesta 2ª: Efectivamente, la tesis de que hay verdades mutuamente contradictorias es una hipótesis, una conjetura. Pero cualquier otra afirmación humana es una hipótesis o conjetura más o menos plausible, o sea: apuntalada con indicios más o menos fuertes de que refleja la realidad; sólo que, por otro lado, un indicio es eso, indicio de algo, sólo con relación a determinados enfoques presuposicionales u horizontes de intelección; y también la mayor o menor fuerza de un indicio es relativa y variable según los transfondos o marcos presuposicionales. Así pues, lo que puede parecer una conjetura un tanto peregrina a algunos, a otros le parecerá una hipótesis muy natural y provista de fuertes dosis de plausibilidad. Los dignoscitivos verán en la afirmación de la existencia de verdades mutuamente contradictorias una idea aberrante o en el mejor de los casos sumamente dudosa y poco fructífera para la ciencia. Los dialécticos ven en ella una hipótesis (todas nuestras afirmaciones lo son —lo que no excluye que estemos más o menos seguros de su verdad, a menos que abriguemos la ilusión de encontrar justificaciones radicales y absolutas de nuestras creencias) dotada de alta plausibilidad y cuyo rechazo acarrearía resultados extremadamente insatisfactorios en el saber precientífico y en las diversas disciplinas de la investigación.

★ **6ª Objeción**: La erección de sistemas paraconsistentes o incluso contradictoriales muestra que, en un terreno meramente formal, es posible construir sistemas así. Pero intuitivamente no se entiende qué pueda decirse en, o con, tales sistemas, salvo inventando alguna paráfrasis que descontradictorialice lo por, o con, ellos vehiculado. (P.ej., el primer sistema paraconsistente de lógica, creado por el lógico polaco Jaśkowski, como una lógica discusiva, en la cual se ponen en el mismo sistema afirmaciones de dos interlocutores que están en desacuerdo uno con otro.)

Respuesta 1ª: Sí se entiende muy bien qué es la existencia de verdades mutuamente contradictorias. Se entiende qué es estar cansado y a la vez no estarlo, tener y no tener frío, estar y no estar satisfecho, dejar la puerta abierta y no abierta, ser joven y no serlo, gustarle a uno, y no gustarle, la música de Couperin, vivir en un lugar que forma, y no forma, parte de determinada ciudad, o comarca; si el objetor no lo entiende, debe ser una persona de «intuiciones» (sea lo que fuere una intuición) bastante peculiares. (Y si replicara el objetor que todo eso, que efectivamente se dice corrientemente, hay que entenderlo en algún sentido no literal, nos retrotraería a la 4ª objeción, a la que ya hemos respondido más arriba).

Respuesta 2ª: El propio Jaśkowski emitió varias hipótesis o utilizaciones de su sistema; una de ellas, pero no la única, era ésa de la lógica discusiva; también hablaba en el célebre artículo en que propuso su sistema de la posibilidad de utilizarlo para formalizar la dialéctica. Sólo que esta hipótesis ha sido apresuradamente arrinconada por los pensadores dignoscitivos, a cuyos ojos sólo ha obtenido gracia la interpretación discusiva, siendo cualquier otra descartada de antemano con el boicot del silencio que se inflige a lo que ni siquiera vale la pena considerar o discutir.

★ **7ª Objeción**.— Pero ¡imagínese Ud! ¿Adónde iríamos a parar si nos diera igual incurrir en contradicción o no hacerlo? Así, en un juicio, ya no sería de descartar un testimonio en el que hubiera contradicciones.

Respuesta: Una cosa son las (meras) contradicciones y otra las supercontradicciones. Si un testigo responde a la pregunta '¿Sentía Ud simpatía por el acusado?' con la respuesta 'Bueno, ¡Sí y no! Hasta cierto punto lo estimaba, pero también en alguna medida me resultaba desagradable', entendemos lo que dice (que **es** —y no sólo **parece** ser— contradictorio). Pero si dice —o, por el contexto comunicacional y en función de constreñimientos pragmáticos que imponen ciertas elipsis, da a entender— que era, a la vez, más bien verdadero y bastante falso, que hubiera visto al reo la noche anterior al acto incriminado, entonces incurre en **super**contradicción, y su testimonio es recusable.

★ **8ª Objeción**.— El sentido del 'no' en el lenguaje y el habla naturales es el que vehicula el functor '∼' clásico, e.d. el mismo que, en *Aj*, es vehiculado por '¬'; luego toda contradicción es absurda, pues es una fórmula de la forma ⌜$p\wedge\neg p$⌝. Cualquier otra cosa será lo que sea, pero no será una contradicción, pues el 'no' estará tomado en **otro** sentido, no en el del 'no' vulgar y corriente.

Respuesta 1ª: Que el 'no' vulgar y corriente corresponde al 'N' de *Aj*, y no al '¬' de *Aj* (e.d.: no al '∼' de la lógica clásica) puede comprobarse mediante encuestas —si es que puede comprobarse de algún modo. Pero, ante la enorme masa de mensajes que, a lo menos tomados literalmente, son contradictorios, fuera primero menester, para que la objeción tuviera visos de plausibilidad, reforzarla con la 4ª objeción, ya refutada. Así, cuando una persona responde a nuestra pregunta de si la casa donde vive está en el barrio de S. Blas diciendo 'Pues está en S. Blas y no está en S. Blas, pero, ¡vamos!, está en S. Blas', ¿puede uno sostener que está entendiendo el 'no' en el sentido del '∼' clásico y que, por consiguiente, de lo que nos responde se desprende que Jamaica es más grande que Australia?

Respuesta 2ª: El objetor debería decirnos cuál es, según él, el sentido del functor 'N', ya que, según él, no significa lo mismo que el 'no' del habla común. Y, si no tiene ninguna hipótesis que proponer al respecto, debe subsistir la duda acerca de qué cosa sea o no sea significada por ese functor, y si a lo mejor es, después de todo, una negación (vide la objeción siguiente). O bien, el objetor debe mostrar que no cabe dar ningún sentido a ese functor, acudiendo para ello a argumentos ontológicos, mostrando que nada puede, extramental y extralingüísticamente, tener las propiedades que el sistema asigna a ese functor. Y, para tratar de mostrar eso, debe acudir a alguna de las otras objeciones que estamos refutando.

★ **9ª Objeción**: Puede uno inventarse los functores que le dé la gana; pero el sentido de la **negación** está dado por el operador unario de un álgebra booleana. Otro functor será, o no será, interesante, pero a ciencia cierta no constituirá una negación, salvo empleando las palabras en sentidos perversos.

Respuesta 1ª: Si por 'sentidos perversos' se entiende sentidos que se aparten del uso corriente, extra y prefilosófico, entonces se vuelve en la objeción a una consideración ya ventilada en la respuesta a otras objeciones.

Respuesta 2ª: Puede uno denominar, arbitrariamente, «negación de $\ulcorner p\urcorner$» sólo al resultado de prefijar a $\ulcorner p\urcorner$ el functor clásico, booleano. Pero también puede uno llamar 'receptor telefónico' sólo a uno que sea de color blanco, o 'pintura' sólo a la cubista. En todo caso, vale la pena resaltar las semejanzas —y también las diferencias— entre la negación débil 'N', que es un operador unario en un álgebra de Kleene, y la negación fuerte '$\neg$', que es un operador unario de un álgebra de Stone (siendo un álgebra de Boole un caso particular de las álgebras de Stone). Y muchísimos investigadores en el mundo entero aceptan, como sentido de la negación simple del lenguaje natural, del mero 'no', el de un functor que, como 'N', tenga las propiedades del operador unario de un álgebra de Kleene (en ese sentido van los trabajos de quienes trabajan en la lógica de lo difuso). Además, y para realzar, a la vez, las semejanzas y las desemejanzas entre la negación débil, 'N', y la fuerte, '$\neg$', adjuntamos, en este mismo capítulo, una lista de esquemas válidos para el primer functor y otra de esquemas válidos para el segundo, a fin de facilitar el contraste entre ambos.

★ **10ª Objeción**.— Si estuviéramos dispuestos a aceptar que existen verdades mutuamente contradictorias, debiéramos abandonar el principio de no contradicción; porque sería el colmo tener, a la vez, principio de no-contradicción y verdades mutuamente contradictorias. Ahora bien, el principio de no-contradicción es necesario para nuestros razonamientos y, además, evidentemente verdadero.

Respuesta: No hace ninguna falta abandonar el principio de no-contradicción en una teoría contradictorial, e.d. en una teoría que reconozca la existencia de verdades mutuamente contradictorias. Si tenemos el principio simple de no contradicción ($\ulcorner N(p\land Np)\urcorner$) y tenemos también un par de enunciados a los que aseveramos como verdaderos, y que son mutuamente contradictorios, digamos $\ulcorner s\urcorner$ y $\ulcorner Ns\urcorner$, entonces lo único que «pasa» es lo siguiente: tendremos, en virtud de la regla de adjunción, $\ulcorner s\land Ns\urcorner$ y, en virtud del principio de no contradicción, $\ulcorner N(s\land Ns)\urcorner$. De ambos, por adjunción, inferiremos $\ulcorner s\land Ns\land N(s\land Ns)\urcorner$. Simplificando esa fórmula por medio del functor 'S' (cf. df09) la última fórmula equivale a $\ulcorner SSs\urcorner$. En virtud del principio de no contradicción tendremos $\ulcorner NSSs\urcorner$; y de los dos últimos inferiremos, por adjunción, $\ulcorner SSs\land NSSs\urcorner$, e.d. $\ulcorner SSSs\urcorner$. Por no contradicción tendremos $\ulcorner NSSSs\urcorner$ y de los dos últimos inferiremos $\ulcorner SSSSs\urcorner$, y así al infinito. Bien ¿y qué? Si algo hubiera de malo (¡que no lo hay!) en alguna de esas contradicciones ulteriores, sería el ser contradictoria; pero eso ya lo había en la primera contradicción hipotéticamente dada, en $\ulcorner Ss\urcorner$, e.d. $\ulcorner s\land Ns\urcorner$. Luego pueden, y deben, coexistir, en el mismo sistema, las verdades mutuamente contradictorias que se reconozcan con el principio de no contradicción.

★ **11ª Objeción**.— Nadie ha expuesto argumentos convincentes a favor de la tesis de que hay verdades mutuamente contradictorias. Los motivos hasta ahora invocados, como las paradojas de Zenón, el sorites, las paradojas lógicas y semánticas, o problemas de la física cuántica, no son convincentes porque, o bien hay modos más sencillos y 'baratos' de resolver esas dificultades que la aceptación de la contradictorialidad de lo real, o bien esa aceptación no solventaría cabal y radicalmente, al menos por sí sola, las dificultades en cuestión, o bien esas paradojas emanan de confusiones fácilmente evitables.

Respuesta 1ª: Puede la admisión de la contradictorialidad ser un componente de una solución que comporte varios ingredientes —que sea, pues, una panoplia formada por varios instrumentos. Así, p.ej., la mera admisión de la contradictorialidad no basta, por sí sola, par evitar las aporías lógicas y semánticas; pero sí constituyen un componente de una solución más amplia.

Respuesta 2ª: Hay, en primer lugar, motivos filosóficos (ontológicos o, si se quiere, metafísicos) que han expuesto diversos autores, de Heráclito a Hegel y a S. Lupasco, a favor de la existencia de verdades mutuamente contradictorias. Entre otros motivos cabe citar: el problema de los universales, y de la relación de ejemplificación o participación; la consideración de la identidad (y de la equivalencia) como relación y, por ende, como envolviendo alteridad; el problema del flujo temporal, de la presencia del pasado y del futuro, y de la duración del presente (por eso dice Hegel que el tiempo es ese ser que, en la medida en que es, no es, mientras que, en la medida en que no es, es); el problema de los conflictos de valores y de deberes; el problema de lo real y lo posible; el del ser y el no-ser.

Respuesta 3ª: No hay ninguna solución satisfactoria y no contradictorial de la paradoja zenoniana de la flecha (dejando de lado a las otras tres, que a lo mejor pueden solucionarse con procedimientos clásicos, como el cálculo infinitesimal). La articulación de una solución a esa paradoja parece requerir una lógica que sea, a la vez, difusa y contradictorial.

Respuesta 4ª: Tampoco parece haber buenas soluciones no contradictoriales de ciertas paradojas de la física cuántica —ante todo de la naturaleza a la vez corpuscular y ondulatoria de las partículas elementales; soluciones en boga, como el abandono del principio de distributividad (de la conyunción con respecto a la disyunción), constituyen sacrificios dolorosísimos y son altamente implausibles, por decir lo menos; otras soluciones vienen a desembocar en un abandono de la regla de adjunción, con lo cual puede que haya dos verdades sin que sea verdad, en absoluto, la conyunción de ambas. Son malas soluciones. Una solución contradictorial es preferible.

Respuesta 5ª: Todos los argumentos a favor de la contradictorialidad se recapitulan bajo el sorites, la paradoja del montón, e.d.: la existencia de lo gradual, de lo difuso. Pero no hay ninguna solución satisfactoria y no contradictorial del sorites, como lo veremos mejor en la respuesta a la objeción 12ª. La solución clásica estriba en rechazar la gradualidad y reemplazar los términos difusos, que admiten más y menos, por términos que, o bien se aplican a una cosa dada total y absolutamente, o bien es absolutamente falso que se le apliquen. Así, en vez de 'montón' habría que decir 'aglomerado de exactamente 3711 granos de arena'; y otros semejantes; en vez de 'alto' habría que decir 'que mide exactamente 1827mm de altura'. (Nótese que ni siquiera habría posibilidad de equivocarse más o menos, ni de aproximarse más o menos a la verdad: porque, o bien sería absolutamente verdad que un hombre dado mediría exactamente 1776'342568mm, o no sería verdad en absoluto que midiera exactamente eso; al no haber grados **de verdad**, no habría tercera alternativa; y, si mide eso y alguien dice que ese hombre mide 1776'342567mm., ese alguien dice algo absolutamente falso, igual de falso que quien dijera que el hombre en cuestión mide 1411mm.) Los inconvenientes de la solución clásica son los siguientes: 1º) es, **en la práctica**, imposible de articular y de aplicar en todos los casos; 2º) por ese mismo motivo, es ontológicamente insatisfactoria (ya que habría que dar explicación de esa inaplicabilidad práctica, habría que encontrar una **razón suficiente** de la misma, y no se ve cuál puede encontrarse; en tanto que, si se adopta una solución gradualista contradictorial, sí se ve por qué resulta prácticamente inaplicable la solución clásica: porque no refleja la realidad); 3º) aun en aquellos casos —ciertamente numerosos— en que sí puede aplicarse, a costa de sacrificios teóricos y prácticos considerables, no parece tal solución ofrecer ventajas con respecto a la admisión de que también hay propiedades difusas —aparte de que hay esas propiedades nítidas—, salvo la «ventaja» de permitir el mantenimiento, sin alteraciones ni ensanchamientos, de la lógica clásica; 4º) de aceptarse ese expediente en la ciencia, ésta —aparte de que resultaría engorrosísima, y eso cuando la solución fuera aplicable— cortaría las amarras que la unen al saber precientífico de la humanidad durante los cientos de miles de años de su historia, con lo cual todo ese saber dejaría de ser estimado como saber para ser considerado como un amasijo de errores, de absolutos errores (pero, entonces, ¿cómo ha sido posible el nacimiento y desarrollo de la ciencia?, ¿qué raíces tiene ésta, sin nexo alguno con las opiniones precientíficas?).

★ **12ª Objeción**.— El principal argumento a favor de la contradictorialidad es la existencia de propiedades difusas, e.d. paradojas como el sorites. Ahora bien, tomemos una paradoja así, como la de la calvicie; o bien hay que aceptar una solución clásica o bien, de aceptarse la crítica que Ud acaba de exponer contra la solución clásica a esa paradoja, lo que hay que decir es que, en el caso de muchos hombres, no sabemos si decir que son calvos o abstenernos de hacerlo; o bien que debemos tanto abstenernos de decir que son calvos como de decir que no lo son; o sea: la existencia de lo difuso nos lleva a abandonar el principio de tercio excluso, pero no a afirmar contradicciones.

Respuesta 1ª: Lo difuso nada tiene que ver con la incertidumbre. No sé si (debo decir) que el número de estrellas de nuestra galaxia está siendo par o si (debo decir que) es non; pero no por eso son difusas las propiedades de ser par y ser non. En cambio, cuando veo un hombre calvo a medias, sí sé qué debo decir (como lo voy a mostrar en la segunda respuesta), a saber: que **es y no es** calvo.

Respuesta 2ª: No es cierto que, al ver a un hombre calvo a medias, haya que abstenerse de decir que es calvo y que haya también que abstenerse de decir que no es calvo; si nos preguntan si ese hombre (llamémoslo 'Ervigio') es o no calvo, y guardamos silencio, se nos consideraría mal educados; y no es así como normalmente reaccionaríamos sino diciendo 'Pues ni lo es ni deja de serlo'; Ervigio no es ni calvo ni no calvo; ni es verdad que sea calvo ni es verdad que no sea calvo; pero, en virtud de las leyes de DeMorgan (A127 y A129) y de la involutividad de la negación débil (A106), eso equivale a: Ervigio es calvo y no lo es. (El principio de tercio excluso no queda conculcado, como tampoco el de no contradicción; ambos siguen valiendo —hasta cierto punto, no en medida de 100%, claro está, ni falta que hace— también en un caso de difusidad como éste; porque, si Ervigio es y no es calvo, es calvo; si es calvo, es o no es calvo; y si es o no es calvo, no es verdad a la vez que sea calvo y no lo sea, nótese bien: al decir 'no es verdad' no estamos diciendo que no sea eso verdad en absoluto, sino que es falso, para lo cual basta —por el principio de apencamiento— que sea falso en una u otra medida). Así pues, la existencia de lo difuso no nos lleva a ningún abandono del principio de tercio excluso, sino que nos lleva a, conservando los principios de no contradicción y tercio excluso, afirmar a la vez la existencia de verdades mutuamente contradictorias (como el ser calvo Ervigio y su no ser calvo).

★ **13ª Objeción**.— Suponiendo que pueda articularse una teoría en que aparezcan verdades contradictorias, esa teoría dirá lo mismo que una teoría no contradictorial, sólo que dando otros sentidos a las palabras; la discrepancia será meramente verbal.

Respuesta 1ª: El fardo de la prueba incumbe al objetor. Trate éste de **probar** su aserto, estableciendo una función de traducción de un sistema contradictorial a un sistema no contradictorial; esa función de traducción debe ajustarse a determinados requisitos: debe ser inyectiva, o a lo menos evitar el colapsamiento o identificación entre fórmulas que no son equivalentes en nuestro sistema contradictorial; debe, desde luego, ser componencial (el valor funcional asignado a expresiones más amplias debe estar en función del asignado a las expresiones que forman parte de ellas); debe ser un homomorfismo, e.d. preservar las mismas relaciones de orden que hay en el sistema-fuente (en *Aj*), como implicación, entrañamiento o inferibilidad; y, además de todo eso, debe preservar el sentido, aunque este requisito no es tan fácil de articular (pero, si se traduce, p.ej., '½' por 'el reloj de la Puerta del Sol de Madrid', la traducción no preservará el sentido).

Respuesta 2ª: Que la controversia no es meramente verbal lo prueba el problema del compromiso ontológico. Si es verdad que existen hechos, y que existen propiedades o conjuntos, entonces cabe preguntarse qué hechos existen (qué hechos son reales o verdaderos) y qué propiedades existen. Y el gradualista contradictorial dirá que existen hechos como la belleza de la Colegiata de Toro, y también como su falta de belleza, siendo uno y otro reales sólo hasta cierto punto; y que existen propiedades como la delgadez, ejemplificadas en infinitas y aun innumerables medidas. (Sólo si es uno nominalista podrá argüir que la discrepancia entre el contradictorialista y el anticontradictorialista es meramente verbal; pero, desde un ángulo realista, tal aserto resulta insostenible).

★ **14ª Objeción**.— Aun para expresar o fundar una teoría contradictorial hay que valerse, en el metalenguaje, de la lógica clásica. Luego, por abducción, se concluye que ésta es verdadera.

Respuesta: De lo que hay que valerse (dejando de lado eso de 'metalenguaje', de si tiene o no que haber niveles de lenguaje) es de un conjunto de metaaxiomas y metarreglas de inferencia que puede que coincida (si bien eso es dudoso y debatible —pero no hace al caso) con la lógica clásica **si** por 'lógica clásica' se entiende un fragmento de *Aj*, ese fragmento que sólo contiene los functores '$\wedge$', '$\vee$', '$\supset$' y '$\neg$'; pero, así entendida, la lógica clásica no es lo que sus adeptos quieren que sea, a saber: un conjunto de **todas** las verdades de la lógica sentencial o cálculo de enunciados, en el cual el functor de negación ha de leerse como un mero 'no'. (Y si, para facilitar la exposición y también por cortesía para con las personas de mentalidad moldeada por la lógica clásica, usamos, en contextos restringidísimos, el 'no' como si fuera 'no … en absoluto', ello no invalida lo dicho a lo largo de este libro sobre el valor semántico **normal y predominante** del mero 'no', a diferencia del 'no … en absoluto'). Al revés, como la lógica clásica (en una lectura apropiada) es un fragmento de nuestro sistema, se puede fundamentar en éste, en el cual está contenida; con lo cual la primacía no le toca a la lógica clásica.

Para concluir este capítulo expondré frente a frente dos listas: una de esquemas o teoremas de *Aj* con ocurrencias de ‘N’ y sin ocurrencias de ‘¬’, y otro con ocurrencias de ‘¬’ y sin ocurrencias de ‘N’; y, en cada línea, se ve si hay un correspondiente exacto entre dos teoremas idénticos en todo salvo en el reemplazamiento de cada ocurrencia de una de esas dos negaciones por sendas ocurrencias de la otra; donde no existe ese correspondiente exacto, escribo tres guiones.

p↓pINp	— — —	— — —	¬p⊃¬q⊃.q⊃p
NNpIp	— — —	— — —	p∨q∧¬p⊃q
NNNpINp	¬¬¬pI¬p	— — —	p∨¬q∧q⊃p
NNp≡p	¬¬≡p	— — —	p⊃.¬p⊃q
pIq⊃.NpINq	pIq⊃.¬pI¬q	— — —	¬p⊃.p⊃q
NpINq⊃.pIq	— — —	— — —	p∧¬p⊃q
p→q⊃.Nq→Np	p→q⊃.¬q→¬p	— — —	p≡q≡.¬p≡¬q
Nq→Np⊃.p→q	— — —	— — —	¬p∧¬q⊃.pIq
p∨Np	p∨¬p	p∧Nq→N(p≡q)	p∧¬q→¬(p≡q)
N(p∧Np)	¬(p∧¬p)	— — —	p∧¬pI.q∧¬q
N(p≡Np)	¬(p≡¬p)	½IN½	— — —
N(p∨q)I.Np∧Nq	¬(p∨q)I.¬p∨¬q	½∧N½	— — —
N(p∧q)I.Np∨Nq	¬(p∧q)I.¬p∨¬q	p\q⊃.Nq\Np	— — —
N(Np∨Nq)I.p∧q	— — —	Np\Nq⊃.q\p	¬p\¬q⊃.q\p
N(Np∨Nq)≡.p∧q	¬(¬p∨¬q)≡.p∧q	Np→p⊃.½→p	— — —
N(Np∧Nq)I.p∨q	— — —	Np\p⊃p	¬p\p⊃p
N(Np∧Nq)≡.p∨q	¬(¬p∧¬q)≡.p∨q	p\Np⊃Np	p\¬p⊃¬p
p⊃.p∧q∨.p∧Nq	p⊃.p∧q∨.p∧¬q	½→.p∨Np	— — —
p⊃q⊃.Np⊃r⊃.q∨r	p⊃q⊃.¬p⊃r⊃.q∨r	— — —	p∧¬p\.p∨¬p
p⊃Np≡Np	p⊃¬p≡¬p	p∧Np\(p∨Np)∨.pI½	p∧¬p\(p∨¬p)∨.pI½
p⊃NpINp	p⊃¬pI¬p	pI½∨.½\.p∨Np	— — —
Np⊃pIp	— — —	N(pIq)	— — —
Np⊃p≡p	¬p⊃p≡p	— — —	p⊃.¬p\p
Np→p→p	— — —	— — —	¬p⊃.p\¬p
p→Np→Np	p→¬p→¬p	p∧q∨Np≡.Np∨q	p∧q∨¬p≡.¬p∨q
Np→N(p∧q)	¬p→¬(p∧q)	Np∧q∨p≡.p∨q	¬p∧q∨p≡.p∨q
N(p∨q)→Np	¬(p∨q)→¬p	— — —	¬p∨q∧pI.p∧q
N(p⊃q)I.p&Nq	¬(p⊃q)I.p&¬q	pIq→.r∨Nr	— — —

N(pINp)	¬(pI¬p)	N1I0	¬1I0
N(p→Np)	— — —	N0I1	¬0I1
— — —	¬(p&q)I.¬p∨¬q	NLp⊃.p→q	¬Lp⊃.p→q
— — —	p⊃q⊃.¬q⊃¬p	p⊃.NLp→q	p⊃.¬Lp→q

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Capítulo 3º.— UN ESTUDIO COMPARATIVO DE TRES ENFOQUES EN LÓGICA PARACONSISTENTE

Acápite 1º.— La regla de Cornubia

Llámanse **lógicas paraconsistentes** las que pueden tolerar alguna contradicción en una teoría sin condenarla como forzosamente absurda. Suele afirmarse que fue Jaśkowski —con un artículo publicado, en polaco, en 1948— el primero en proponer una lógica paraconsistentee. Pero, a causa de sus características, el sistema discusivo de Jaśkowski ni es una lógica paraconsistente propiamente dicha ni tiene aplicabilidad para el tratamiento de varios de los principales problemas con que tiene que habérselas una lógica paraconsistente.

En 1952, y obedeciendo a otras motivaciones, otro lógico polaco, B. Sobociński, puso en pie un sistema que también resulta ser paraconsistente en sentido lato, pues en él no es derivable la regla de Escoto (que sería históricamente más correcto llamar *regla de Cornubia*, pues al parecer el primero en formularla fue el lógico medieval Juan de Cornubia; el fallo de dicha regla consiste en que no sean válidas todas las inferencias del tipo: p, ~p $\vdash$ q). Pero el sistema sacrifica principios tan valiosos como el de simplificación («Si p y q, entonces p») y el de adición («Si p, entonces: p o q»). (Sobre el sistema de Sobociński, vide [S1] y también [R1], p. 70.)

Todos los sistemas citados hasta ahora quedarán fuera de nuestra presente indagación. Los que vamos a estudiar comparativamente son tres: los de da Costa, Routley y el autor de este libro. Da Costa, el gran lógico brasileño, inició sus investigaciones conducentes a la puesta en pie de lógicas paraconsistentes durante los años 50, siendo todavía estudiante (vide [C3]). Ha elaborado un gran número de sistemas paraconsistentes —si bien los más de ellos lo son sólo en sentido lato—, pero su principal aporte lo han constituido los sistemas de la Serie C_n, donde n es o bien un número finito o bien ∞ (vide [C3], [C4], [C5], [C6]). El sistema C_∞ es muy débil, pues —a diferencia de los demás— no tiene todo el poder inferencial de la lógica clásica. Por ello, nos limitaremos a C_n, para n finito. Y sobre todo vamos a estudiar el que el propio da Costa parece favorecer, C_1.

Richard Routley [quien, habiendo cambiado de apellido, es hoy **Richard Sylvan**] es la figura máxima de la lógica en Australia. (Dada la gran magnitud de su producción lógica y filosófica, es preferible que el lector mismo encuentre más detalladas referencias bibliográficas en los siguientes lugares, únicos que, al respecto, mencionaré aquí: [P17], [R3], [R4].) Su sistema es una lógica relevante. La lógica relevante —de la cual, como el lector recuerda, se habló mucho más arriba, en la Sección I— es una corriente surgida en primer lugar en EE.UU. (vide [A2]) con el propósito de podar los teoremas y reglas clásicamente correctos sobre el condicional, evitando las 'irrelevancias' —p.ej., el principio *uerum e quolibet*: «Si es verdad que p, entonces: si q, p». Toda lógica relevante es paraconsistente al menos en un sentido muy lato. Pero al hablar aquí de la lógica relevante aludiremos tan sólo al sistema DL de Routley —cuya producción lógica no se ciñe a ese sistema, ni mucho menos, pero cuya posición filosófica actual sí parece apadrinar a ese sistema como el sistema lógico correcto y adecuado.

Independientemente, en principio, de esas dos corrientes lógicas —la brasileña de da Costa y la relevantista surgió la familia de sistemas *A* puestos en pie por el autor de este trabajo y que han acabado recibiendo la denominación de 'lógica transitiva'. Destellos de las ideas que conducirían a tal elaboración afloraron en 1963 o 1964. Mas las circunstancias que imperaban en aquel entonces bloquearon por el momento el desarrollo de esa línea de investigación, la cual, reanudada tras una interrupción de ocho años, culminó en 1977 con la construcción del primer sistema de esa familia, *Am*. Los otros sistemas *A* han surgido de ese primer brote mediante rectificaciones, restricciones y ampliaciones; pero todos ellos están estrechamente emparentados y son afines. Al hablar del sistema *A* me referiré a aquel que en este momento está siendo desarrollado y parece más adecuado —el cálculo sentencial *Aj*, base de la teoría de conjuntos *Adu*.

Aparte de los tres enfoques aludidos incorporados en sendos sistemas, existen hoy muchos aportes a la lógica paraconsistente. Ante todo, cabe mencionar que los dos primeros de esos tres enfoques han sido desarrollados y estudiados por otros investigadores. Del grupo australiano forman parte: G. Priest —que ha construido un sistema paraconsistente, LP, sin ningún functor condicional dotado de la condición del MP (vide [P16])—, R. K. Meyer, V. Routley, C. Mortensen, etc. El grupo brasileño es una pléyade en la que sobresale A. Arruda, la gran estudiosa de teorías de conjuntos contradictoriales, cuya reciente muerte ha constituido una pérdida tan lamentable; otros representantes de ese grupo son I. d'Ottaviano, E. Alves, Sette, Raggio, Loparic, Lopes de Santos; y afín a la orientación de da Costa está el sistema, también paraconsistente, del lógico belga D. Batens (vide [B3]). En otras orientaciones, también paraconsistentes, unas en sentido estricto y otras en sentido lato, trabajan otros lógicos en EE.UU., Italia, Bulgaria y otros países. Concretamente quiero citar el reciente aporte del lógico búlgaro Jristo Smolenov, en [S2]: es un sistema un poco en la línea de Jaśkowski, en el cual se agrupan los axiomas en dos grupos no disjuntos pero tales que en cada deducción deben sobreentenderse o presuponerse como vigentes sólo los axiomas de uno de los dos grupos más aquellos teoremas que se hayan deducido sólo a partir de ellos y sólo presuponiéndolos a ellos como vigentes. Así pues, nunca se llegan a fundir, ni siquiera a mezclar, en una síntesis esos dos grupos de axiomas. El proyecto es ingenioso, sí, pero adolece de muchos defectos —parecidos a los que aquejan al enfoque discusivo, si bien curiosamente el sistema de Smolenov es copulativo; uno de los dos grupos de axiomas es muy débil y permite probar pocos resultados interesantes, siendo justamente ése el que se aplica para casos de verdades dialécticas, con lo cual quedan estas verdades reducidas a impotencia y esterilidad inferencial; el procedimiento es engorroso y en la práctica dudosamente aplicable; la necesidad de constreñir hasta dentro del propio sistema de lógica las deducciones de tal manera que se sobreentienda en cada una de ellas la vigencia de un grupo de axiomas y teoremas constituye una desviación acaso excesiva respecto del proceder de la lógica matemática corriente y marca una ruptura con el ideal de una deducción lógica cuya validez sea independiente del contexto, ideal que se ha revelado fructífero; ese sistema carece al parecer de procedimientos de reducción al absurdo (que es también uno de los defectos —según veremos— de la lógica relevante); piérdese ese vínculo o paralelo entre deducibilidad y validez de teoremas condicionales en que consiste la validez (de una u otra versión) del metateorema de la deducción, a menos que se incurra en regresión al infinito; por último, el motivo aducido por Smolenov de capturar una de las ideas de la dialéctica marxista no parece adecuadamente servido con ese enfoque, justamente porque no es sintético. (Para una exposición panorámica del desarrollo reciente de las lógicas paraconsistentes vide los trabajos de Arruda [A4] y [A3].) Una ramificación más reciente la constituye la obra del lógico italiano Nicola Grana, cuyo sistema IDL es a la vez paraconsistente e intuicionista (véase al respecto mi reseña de varios libros suyos, publicada en ***Theoria***, Nº 2 [1985], pp. 573-7). Sobre ese enfoque y sobre el de Bunder, que también tiene esa doble característica, haré un análisis en un estudio posterior dedicado a la relación entre intuicionismo y paraconsistencia.

Acápite 2º.— Inclusión de las lecturas en la definición de una lógica: las diversas lógicas clásicas

A efectos tanto de entender qué es un sistema de lógica y cuál es la orientación filosófica de quien lo profesa cuanto de poder comparar mejor diferentes sistemas de lógica, es preferible definir un sistema de lógica no del modo usual, sino de tal manera que entren en la definición del mismo las lecturas que se propongan —por los adeptos del sistema lógico de que se trate— de los signos primitivos del sistema. Así pues, diremos que una teoría L es un cuarteto ordenado $<V, F, T, R>$ tal que: R, F y T son según se dijo más arriba, mientras que V es un conjunto de pares ordenados, cada uno de los cuales comprende, como miembro izquierdo, a un signo primitivo de L y, como miembro derecho, a una expresión de la lengua natural que se toma como una lectura del signo en cuestión. Surgen aquí tres dificultades: 1ª) ¿de qué lengua natural se trata? Esta dificultad cabe afrontarla postulando un 'idioma canónico' y luego presuponiendo una traducción dada del mismo a otros idiomas igualmente naturales. Las dificultades que encierra tal proceder no me parecen redhibitorias. 2ª) ¿Hay una lectura única y diferente para cada signo primitivo del sistema lógico? En otros términos: entre el conjunto de lecturas y el de los signos primitivos ¿hay una biyección? ¿O hay al menos una sobreyección (funcional, o sea monovalente) del conjunto de lecturas al de signos primitivos? Aunque pueden esgrimirse argumentos que lo pongan en duda, por lo menos para ciertas lógicas, voy a suponer —por parecerme más verosímil y defendible— que efectivamente se da la sobreyección funcional aludida, o —lo que es lo mismo— que a cada signo primitivo le corresponde al menos una lectura, y que, si una lectura corresponde a un signo, no corresponde a ningún otro signo.

La tercera dificultad es que, aunque, así definidos, dos sistemas sean idénticos, pueden empero diferir por las lecturas que den a signos no primitivos. Siendo ello así, como efectivamente puede que lo sea, habría que modificar la definición de un sistema. Podría modificarse, incluyendo en V a todos los pares ordenados cuyo miembro izquierdo sea un signo (primitivo o definido) del sistema y cuyo miembro derecho sea una lectura del mismo en lengua natural; mas ese procedimiento es de dudosa articulabilidad, por lo menos si se desea mantener la recursividad, que (aun cuando a la postre puede y hasta debe ser sacrificada, según lo indicaré más abajo) en este plano del mero vocabulario sí parece deseable que se mantenga. En un sistema en el que es finito el número de functores definibles no equivalentes entre sí, no hay problema: basta con dar en V una lista exhaustiva —aunque ello complica las cosas, pues, para confeccionar esa lista, habrá que tomar en cuenta las reglas de formación, por lo que acaso sería mejor arbitrar otro procedimiento; en todo caso, son cuestiones de poca monta (en esos casos de número finito de functores introducibles). Sin duda los sistemas lógicos más prometedores y con mayor futuro no son así, sino que pueden introducirse en ellos infinidad de functores —para que puedan responder a la infinita complejidad y riqueza de matices veritativos de la realidad y de la lengua natural. Sin embargo, como hoy por hoy sólo la lógica transitiva es un sistema así —con un número infinito de functores definicionalmente introducibles no equivalentes entre sí—, podemos soslayar esa dificultad, o dejarla sin zanjar de momento. Para nuestro propósito, podemos tomar, en un sistema con un número finito de signos introducibles, a todos esos signos como primitivos, para ahorrarnos complicaciones.

Una teoría *L* es un sistema de lógica ssi cumple la condición adicional de que los miembros derechos de los pares pertenecientes a *V* estén tomados de un conjunto acotado de expresiones —intuitivamente, de expresiones con un ámbito universal de aplicabilidad, o sea: que no pertenecen al vocabulario específico de ningún saber particular. Diferentes concepciones de la lógica propondrán, claro está, diversos inventarios de tales expresiones.

La importancia de haber hecho entrar en la definición de una lógica (o de cualquier teoría formalizada, o expuesta en notación simbólica) a las lecturas en lengua natural es que sólo así cabe llevar a cabo una discusión filosóficamente fructífera del tenor y el perfil de una u otra lógica, de la alternatividad entre ellas y de lo que significa adoptar una lógica en vez de otra: es una decisión, no de escribir unos garabatos en vez de otros, sino de profesar la verdad de unas tesis [onto]lógicas sistemáticamente ligadas, en lugar de tesis alternativas.

Con arreglo a esta precisión, cabe ahora introducir un distingo entre varias ‘lógicas clásicas’, a cada una de las cuales le es peculiar un determinado modo de leer los signos primitivos. Llamaré ‘**lógica clásica canónica**’ (o ‘***la*** lógica clásica’ por antonomasia) a aquella que asocia al functor ‘$\sim$’ clásico la lectura ‘no’; al functor ‘$\wedge$’ la lectura ‘y’; al functor ‘$\vee$’ la lectura ‘o’; y al functor ‘$\supset$’ la lectura ‘sólo si’. Así entendida, la lógica clásica es rechazada por todos los sistemas no clásicos de lógica, incluidos los sistemas paraconsistentes; mientras que, por el contrario, son desarrollos de «la» lógica clásica las lógicas intensionales clásicas —modales, temporales, epistémicas, deónticas, etc.—, pues son extensiones **obedientes** de la lógica clásica (canónica), donde una teoría T es **extensión obediente** de una teoría T’ ssi, además de ser una extensión recia de T’, cada signo de T’ conserva en T su(s) misma(s) lectura(s). (Y, dada la complicación que hemos introducido en la definición de una teoría, por haber incluido en la misma un conjunto de lecturas en lengua natural, debemos precisar que una teoría es **extensión recia** de otra ssi lo sería en el caso de que hubiéramos definido a las teorías sin tener en cuenta a las lecturas; este modo relajado de expresar la relación de que nos ocupamos puede, claro está, ser abandonado, definiéndose la relación de extensión recia en términos más rigurosos, pero acaso más crípticos.)

A decir verdad, sería menester introducir otra complicación suplementaria: una lógica puede incluir, en su conjunto *V*, dos o más pares con el mismo miembro izquierdo; o sea: puede proponer varias lecturas para un mismo signo (pues todo lo que hemos postulado es una sobreyección del conjunto de las lecturas sobre el de signos primitivos, mas no una biyección); y es posible que otra lógica incluya en su respectivo *V* alguno de esos pares, pero no otros. Eso es lo que sucede a menudo en el tránsito de la lógica clásica a otras lógicas: en la lógica clásica canónica, pudiéramos incluir en *V*, además del par <~, no>, el par <~, no … en absoluto>; pues, desconociendo el clasicista la existencia de grados de verdad, para él todo negar es un negar por completo, al igual que todo afirmar es un afirmar cual totalmente verdadero lo que se asevera. Por el contrario, una lógica como los sistemas transitivos de la familia *A* diferencia escrupulosamente ambas lecturas, de suerte que ningún signo puede recibirlas ambas. Si, desde el punto de vista clásico, la diferencia entre ‘no’ y ‘no … en absoluto’ es meramente estilística o pragmática, tal diferencia es, en cambio, desde el ángulo gradualista-dialéctico, semántica —afecta, pues, a la verdad, no sólo a la oportunidad o efectividad comunicacional de lo que se diga.

Y no es la indicada la única bifurcación de lecturas que, asociadas al mismo signo clásico en las lecturas usuales, ven separados sus destinos en los sistemas *A*, donde pasan a corresponder a signos diferentes. Otro caso similar es el de ‘sólo si’ y ‘que——— implica que …’; clásicamente, se los considera como alomorfos en distribución libre; en la lógica transitiva *A*, son las lecturas respectivas del condicional ‘$\supset$’ y de la implicación ‘$\rightarrow$’, con características muy diferentes.

Para evitar el enzarzarnos en muchas complicaciones sobre este punto, diremos que una teoría es una extensión obediente de otra sólo si mantiene todas las lecturas que ésta última daba a cada uno de sus propios signos. Esto significa que una extensión obediente de otra va a formalizar de la misma manera todas aquellas oraciones de la lengua natural que pudieran ser formalizadas por la última; mientras que una extensión ‘desobediente’ de una teoría, aun formalizando igual que la teoría dada muchos enunciados, formalizará otros de manera diferente. (P.ej., los sistemas *A* formalizan igual que la lógica clásica enunciados en que sólo estén involucrados la negación ‘no … en absoluto’ y otros functores clásicos; pero formaliza de manera diferente, con signos que son desconocidos en la lógica clásica, enunciados con ocurrencias del mero ‘no’.) El error de la lógica clásica canónica estriba, pues, en incluir en su vocabulario, al menos como una de las lecturas de su signo ‘∼’, la negación simple ‘no’, en vez de incluir (únicamente) la negación fuerte, ‘no … en absoluto’.

Si modificamos una u otra de las lecturas de la lógica clásica canónica, tenemos versiones no canónicas de la lógica clásica. Los dos candidatos, a este respecto, son: un cambio de lectura de ‘∼’ y un cambio de lectura de ‘⊃’.

Acápite 3º.— Cotejo de los tres enfoques paraconsistentes

Podríamos tratar de clasificar ahora a las tres corrientes principales de la lógica paraconsistente de conformidad con la opción que tomaron en este punto —o, mejor dicho, con la que parece razonable atribuirles, cuando sus autores no hayan sido explícitos al respecto (pues da Costa, en particular, no se ha pronunciado explícitamente sobre la lectura del signo de negación de la lógica clásica ni sobre la de aquellos signos de cada uno de sus propios sistemas, que tienen todas las propiedades de la negación clásica, diciendo tan sólo que se trata de negación fuerte). Y, con arreglo a eso, cabe decir: lo que hacen, de consuno, tanto la[s] lógica[s] de da Costa cuanto el sistema *Aj* es, manteniendo la lectura canónica de ‘⊃’, proponer como lectura del ‘∼’ clásico algo diferente del mero ‘no’; ese algo es en el caso del sistema *Aj*, ‘no … en absoluto’ o ‘es del todo falso que’ (en el caso de da Costa, la negación fuerte parece carecer de lectura en lengua natural, y eso nos retrotrae a la primera de las dificultades evocadas al comienzo del Acápite anterior: la existencia de sistemas que no brindan lectura idiomática alguna para ciertos signos; pero siempre puede leerse esa negación fuerte con una larga perífrasis, al reducir a notación primitiva; en todo caso, en el punto que ahora tocamos se basa uno de nuestros reparos al sistema de da Costa; vide infra); mientras que lo que hacen los sistemas paraconsistentes relevantistas, como el de Routley, es, manteniendo la lectura canónica de ‘∼’, proponer para el condicional clásico una lectura no condicional: $\ulcorner p\supset q\urcorner$ leeráse, pues: «No p a menos que q». Para ese signo, el relevantismo abandona la regla del MP (a saber: $p, p\supset q \vdash q$).

De ahí que, mientras los sistemas C_n (para n finito) de da Costa, lo mismo que los sistemas transitivos *A*, son extensiones recias de la lógica clásica, las lógicas relevantes no lo son. Así pues, hay un reproche que, si bien puede ser dirigido al relevantismo, no está justificado contra las otras dos corrientes: el de debilitar la lógica clásica, en el sentido de producir un sistema lógico más débil, con menor poder inferencial o deductivo, que la lógica clásica. No lo está, claro, a menos que se exija, para reconocer a una teoría un poder inferencial no inferior al de otra, que la primera sea una extensión obediente de la segunda, o sea: que ofrezca la misma capacidad deductiva para las mismas premisas de la lengua natural, una vez formalizadas; pero esta exigencia resultaría muy pozo razonable, sobre todo teniéndose en cuenta el hecho de la ‘bifurcación’ de lecturas: la lógica clásica (canónica) no diferencia formalizaciones de ciertas oraciones de la lengua natural que, en cambio, se formalizan de manera diferente en un sistema como *A*. Sea ahora un conjunto de premisas —en lengua natural—, de las que puede deducirse una determinada conclusión en la lógica clásica; es posible, naturalmente, que esa inferencia no sea válida según uno de los sistemas *A*, pero sí sucederá que, una vez formalizadas clásicamente esas premisas, habrá una lectura clásicamente aceptable de las mismas cuya formalización en *A* sí entrañe lógicamente —según *A*— a la formalización en *A* de una de las lecturas clásicamente aceptables de la fórmula de lógica clásica con la que se formalizaba a la conclusión considerada. Sucediendo ello así, paréceme bastante palmario que los sistemas *A* deben ser reconocidos como poseyendo al menos tanto poder inferencial como la lógica clásica. Y lo mismo sucede con los sistemas *C* de da Costa.

El hilo de las consideraciones precedentes nos lleva a concluir que, mientras, para los sistemas *C* lo mismo que para los sistemas *A*, lo que hay de erróneo en la lógica clásica canónica se centra en el tratamiento de las negaciones, en la confusión entre diversas negaciones, en tanto que la lógica clásica está como hace falta en lo tocante a functores afirmativos (conyunción, disyunción y condicional —con la particularidad, en el caso de *A*, de que el condicional clásico está bien sólo si no se ve en él una implicación), en cambio el foco de la divergencia entre el relevantismo y la lógica clásica lo constituye el condicional. Si el relevantista rechaza el principio de Cornubia y la delicuescencia a que éste condena a toda teoría contradictorial no es por una discrepancia respecto del clasicista en lo tocante a la negación misma y a la relación entre ésta y la afirmación —o, dicho con referencia al plano ontológico, en lo tocante a la relación entre hechos positivos y negativos, o entre un hecho y aquel otro hecho que sea una negación (simple, natural) del anterior; antes bien, ese rechazo viene en el caso de los relevantistas, dictado por una concepción no clásica del entrañamiento y, por ende, de la inferibilidad en general —con o sin intervención de la negación en las premisas. A mi modo de ver, revela eso que, por su motivación filosófica, por su tendencia, el relevantismo no es dialéctico —aunque sí desean que lo sea algunos de sus adeptos, como Routley: no ha sido suscitada, en efecto, esa corriente por una revisión del enfoque clasicista sobre el 'no'; e.e. no se deriva de un enfoque no clásico sobre la relación entre el 'sí' y el 'no', entre el ser y el no-ser. Si bien Routley ha incursionado en el campo de la relación entre el ser y el no-ser, enarbolando el estandarte contradictorial —en una segunda etapa, e.d. tras haber abordado esa temática dentro de moldes que no daban cabida a la contradicción—, su misma concepción del no-ser es clasicista, absolutista, excluidora de grados y, además, las contradicciones verdaderas que él reconoce a ciertos inexistentes no incluyen la de ser, a la vez, existentes e inexistentes: no va, para él, el existir, cuando se da, acompañado del no existir; no hay en él flexibilización, fluidificación, de la frontera entre ser y no-ser; sólo hay una explotación de la paraconsistencia para evitar que una teoría meinongiana de inexistentes (puros y totales) se desmorone por la aplicación de reglas clásicas —por razones que no tienen por qué involucrar forzosamente a la negación, ni menos aún a la negación de existencia.

Por el contrario, es empresa común de los sistemas de da Costa y de los míos el contribuir a enfocar de manera no clásica la negación misma, sin mellar el poder inferencial de la lógica clásica. Donde se sitúa la divergencia entre el enfoque de da Costa y el mío es en el modo de entender la negación no clásica —y, más hondamente, en el modo de entender la verdad y la falsedad.

Acápite 4º.— Convergencias y divergencias entre los enfoques relevantista y transitivista

No entra en los límites del presente libro dilucidar la naturaleza y las propiedades del condicional relevantístico, ni examinar las raíces y consecuencias del rechazo relevantista del condicional clásico. Vale la pena hacer aquí un par de indicaciones al respecto.

Lo más característico del condicional relevantístico es el sacrificio del principio *uerum e quolibet*: ⌜p⊃.q⊃p⌝, o, en notación relevante, ⌜p→.q→p⌝ (que se lee: «Si es verdad que p, entonces: q sólo si p»). La justificación de ese principio es que, supuesta la verdad o existencia de un hecho, entonces, sea real o no otro hecho o presunto hecho cualquiera, existe el primer hecho. Ahora bien, el condicional clásico se ocupa tan sólo de condiciones de verdad, entendidas extensionalmente: todo lo que hace falta para la verdad de «Si p, entonces q» o su equivalente «p sólo si q» es que sea falso que, sucediendo que p, no suceda que q; o sea: que, o bien sea del todo falso que p, o bien sea cierto que q. Los relevantistas exigen, para la verdad de un enunciado condicional, que se dé un nexo especial de 'significado' entre la prótasis y la apódosis, consistente en que el significado de la prótasis contenga o envuelva al de la apódosis. La oscuridad que rodea a esas nociones de significado y de continencia o envolvimiento no viene disipada con el diseño de modelos matemáticos —como estructuras de mundos-posibles, a lo Kripke, en las que se han definido ciertas relaciones más complicadas que la relación clásica de accesibilidad.

Frente al functor condicional clásico, que está determinado extensionalmente por las condiciones de verdad en el mundo real —consistiendo la extensionalidad de algo en que sólo cuente para su verdad o existencia lo que de hecho suceda o deje de suceder en la realidad—, el condicional o entrañamiento relevante es, no ya intensional, sino ultramodal, pues no basta para la verdad de «Si p, entonces q», en sentido relevantístico, el que en cada situación o mundo posible en el que suceda que p también suceda que q, si no que, más allá de tal condición, es menester que se dé ese (a mi modo de ver enigmático) nexo de significado, que tengan algo que ver intrínsecamente —por expresarlo en términos acaso sugerentes, aunque no esclarecedores— la prótasis con la apódosis, pero con un tener que ver que sea justamente el entrañamiento lógico de la segunda por la primera (donde, por supuesto, ya no cabe dilucidar más ampliamente qué sea eso de entrañamiento, ni todavía menos, lo de lógico). Témome que esta presentación de la posición relevantista no sea considerada por los adeptos de la misma como objetiva y justa; pero me he esforzado por exponerla de manera persuasiva y en términos susceptibles de evocar ese no-sé-qué que sería el nexo condicional o entrañamiento relevantísticamente concebido.

La puesta en pie del entrañamiento relevantístico no obedece, ni mucho menos, a los mismos motivos que la introducción, en los sistemas *A*, del functor implicacional '$\to$'. Este último es, simplemente, un functor de comparación de grado de verdad: $\ulcorner p\to q\urcorner$ dice que el hecho de que p —la prótasis— es a lo sumo tan verdadero o real como el de que q. Pese a tan diversa motivación resulta que hay algún paralelismo entre la implicación de la lógica transitiva y el condicional relevante: el acervo de principios relevantísticamente válidos en que está involucrado el condicional es un sub-conjunto propio del que se obtiene sustituyendo en cada fbf de una lógica relevante el condicional relevante por la implicación transitiva. Mas la coincidencia es parcial: hay muchos teoremas de la lógica transitiva con el functor implicacional '$\to$' cuyas traducciones relevantísticas —en el sentido apuntado, de traducir la implicación transitiva, '$\to$', como condicional relevante, '$\rightarrowtail$' y viceversa— no son teoremas de la lógica relevante. En cualquier caso, la coincidencia —por parcial que resulte— puede ser reveladora de que algo parecen tener que ver las dos nociones de entrañamiento relevante y de no superioridad veritativa —ésta última es la que viene capturada por la implicación transitiva. Como esta segunda noción parece mucho más clara, y es extensional, puede que sirva para ayudar a esclarecer el de suyo oscuro nexo condicional relevante.

En lo tocante a la negación, la lógica relevante coincide con la transitiva en rechazar el principio de Cornubia (que, en su versión implicacional, es: $\ulcorner p\land Np\to q\urcorner$: El que sea verdadero y falso a la vez que p implica que q —para cualesquiera $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$), el principio *e falso quodlibet* (cuya versión implicacional es: $\ulcorner p\to .Np\to q\urcorner$: El que suceda que p implica que la falsedad de que p implica que q) y otros principios similares. En cambio, y con tal que traduzcamos como 'N' (cuya lectura es 'no' a secas, pues se trata de la negación simple o natural) la negación relevante, tenemos que son teoremas de *A* las traducciones de todas las fórmulas teoremáticas relevantistas en las que están involucrados a la vez los functores condicional (relevante) y negacional. He aquí los dos esquemas axiomáticos correspondientes de la lógica relevante de Routley: $\ulcorner NNp\rightarrowtail p\urcorner$, $\ulcorner p\rightarrowtail Nq\rightarrowtail .q\rightarrowtail Np\urcorner$. Ambos son esquemas teoremáticos de los sistemas *A*. Junto con otros esquemas axiomáticos de la lógica relevante, se obtienen estos esquemas teoremáticos (que también lo son de *A*): $\ulcorner p\rightarrowtail NNp\urcorner$, $\ulcorner p\rightarrowtail q\rightarrowtail .Nq\rightarrowtail Np\urcorner$. Pero, de nuevo, tenemos en *A* esquemas cuyas traducciones relevantistas no son válidas en la lógica de Routley: los dos más notorios de estos últimos esquemas son: $\ulcorner p\to q\to .N(p\land Nq)\urcorner$ (el principio de contraejemplo) y $\ulcorner p\to Np\to Np\urcorner$ (el principio de abducción).[44]

44 Un estudio más hondo de las relaciones entre la implicación, $\to$, de la lógica transitiva y el *entailment* relevantista vendrá ofrecido en un trabajo posterior. Las presentes páginas fueron escritas antes de efectuar un análisis más pormenorizado, y antes también de que aparecieran publicados los artículos de José Manuel Méndez citados en la bibliografía del presente libro, todos los cuales ayudan mucho a un ulterior examen comparativo entre ambos enfoques (examen que el propio José Manuel Méndez se propone llevar a cabo).

Asimismo, la lógica relevante coincide con la transitiva en propugnar la validez o teorematicidad de los principios de DeMorgan ($\ulcorner Np{\land}NqIN(p{\lor}q)\urcorner$ y $\ulcorner Np{\lor}NqIN(p{\land}q)\urcorner$, donde ‘I’ es la equivalencia cuya versión relevantística se definiría así: $\ulcorner pIq\urcorner$ abrevia a $\ulcorner p{\rightarrowtail}q{\land}.q{\rightarrowtail}p\urcorner$. Y ambos sistemas reconocen la validez de la regla de sustituibilidad de los equivalentes, o sea: pIq $\vdash$ rIs, donde $\ulcorner s\urcorner$ resulta de $\ulcorner r\urcorner$ sustituyendo ocurrencias de $\ulcorner p\urcorner$ en $\ulcorner r\urcorner$ por sendas ocurrencias de $\ulcorner q\urcorner$). También coinciden ambos enfoques en postular los principios de no-contradicción ($\ulcorner N(p{\land}Np)\urcorner$) y de tercio excluso ($\ulcorner p{\lor}Np\urcorner$). La postulación del principio de no contradicción no significa que se excluya o rechace la contradicción: justamente porque el mundo puede ser contradictorio, porque pueden darse en él situaciones verdaderas y falsas a la vez, puede darse, concretamente, en él la situación contradictoria de que el mundo sea, a la vez, contradictorio y no contradictorio. Y, como es en todo caso no-contradictorio, si también es contradictorio, entonces se da justamente esa concreta situación contradictoria. (El escrúpulo que impide verlo así —p.ej. en el enfoque capturado por la lógica C_1 de da Costa— es un recelo frente a la contradicción que lleva a tolerar a lo sumo contradicciones ninguno de cuyos miembros conyuntivos sea a su vez una contradicción.)

De lo hasta ahora dicho resulta que la lógica relevante coincide con la transitiva en cumplir todas las condiciones postuladas al comienzo del Acápite 1º del Apéndice de la Sección I para que un sistema sea eucrático. Ambas son, pues, sistemas eucráticos. Pero cabría también llamar **saludable** sólo a cuantos sistemas eucráticos cumplan, además, esta otra condición adicional (a la cual cabe llamar: **principio de Kleene**), a saber: para cualesquiera $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$, $\ulcorner p{\land}Np{\lor}.q{\lor}Nq\urcorner$ es intercambiable con $\ulcorner q{\lor}Nq\urcorner$. Esta última condición no la cumple la lógica relevante, mientras que la lógica transitiva sí la cumple. Desde el punto de vista relevantista esa condición es una irrelevancia, pues, en muchos casos, para muchas oraciones $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$, no hay conexión de sentido o significado entre $\ulcorner p{\land}Np\urcorner$ y $\ulcorner q{\lor}Nq\urcorner$, de manera que no se ve por qué la disyunción entre ambas fórmulas va a ser equivalente a la segunda (intercambiable con ella). A tal objeción cabe responder, de nuevo, que tal consideración gira en torno a la oscura noción de envolvimiento o continencia de significado. Y, además, abona a favor del principio de Kleene un motivo de peso que debiera sobrepujar a los escrúpulos relevantistas, a saber: dos fórmulas son intercambiables si son, siempre y en todos los aspectos, tan verdadera la una como la otra (premisa que ciertamente no concederían los relevantistas); ahora bien, aunque hay contradicciones verdaderas, ninguna contradicción es nunca más verdadera que una instancia cualquiera del principio de tercio excluso, pues una contradicción es a lo sumo verdadera en un 50%, mientras que una instancia del tercio excluso es verdadera siempre en por lo menos un 50%.

Lo que resulta más difícil de esclarecer es, no la discrepancia, sino la convergencia —parcial— entre relevantismo y transitivismo en lo tocante a la relación entre negación e **implicación** —pues, por las razones evocadas más arriba, cabe llamar así al condicional relevante, por lo menos al de la lógica relevante de Routley. Después de todo, habíamos dicho anteriormente que el relevantismo no se apartaba del clasicismo en la concepción de la negación. Ahora bien, la negación clásica es fuerte, es el ‘no … en absoluto’, que se simboliza, en la lógica transitiva, como ‘¬’. Y, sin embargo, el esquema $\ulcorner\neg\neg p{\rightarrowtail}p\urcorner$ no es teoremático en esta lógica; tampoco lo es éste: $\ulcorner\neg p{\rightarrowtail}q{\rightarrowtail}.\neg q{\rightarrowtail}p\urcorner$, mientras que sí es válido el esquema $\ulcorner Np{\rightarrowtail}q{\rightarrowtail}.Nq{\rightarrowtail}p\urcorner$, lo mismo que la traducción relevantística de este último —entendiendo por tal la fórmula relevantística que resulta de traducir ‘$\rightarrow$’ como condicional relevante y ‘N’ como la negación del sistema relevante.

Lo que ha sucedido, empero, no es que el sistema relevantista haya debilitado en general a la negación, y se haya apartado así del clasicismo por su concepción de la negación —o por la introducción de una negación no clásica. ¡No! Trátase simplemente de que el relevantismo debilita a la negación —y a otros functores— tan sólo cuando éstos están involucrados en oraciones implicacionales. Hay muchos teoremas clásicos sin negación cuya versión implicacional es teoremática en la lógica transitiva no siéndolo en la relevante; tal es el caso, p.ej., de $\ulcorner p{\rightarrow}r{\rightarrow}.q{\rightarrow}r{\rightarrow}.p{\lor}q{\rightarrow}r\urcorner$ (una instancia del cual sería ésta: que la belleza de Antioquía implique el interés turístico de Anatolia implica que el que también lo implique la de Esmirna implica que el interés turístico de Anatolia es implicado por el hecho de que sea bella Antioquía o lo sea Esmirna). Así y todo, nadie diría que el relevantismo ha debilitado la disyunción clásica.

Cuando no interviene el functor condicional relevante (el cual venimos asociando con la implicación de la lógica transitiva), la negación relevantista es como la clásica. No es eso, sin embargo, lo que nos lleva a decir que la discrepancia entre clasicismo y relevantismo no afecta a la negación misma, sino sólo al condicional —en relación, eso sí, de éste último con los demás functores, incluida la negación entre ellos. Pues también sucede que en la lógica transitiva es teoremática, tanto para la negación simple ‘N’ cuanto para la fuerte ‘$\neg$’, cualquier traducción de un teorema de lógica clásica que sólo contenga disyunción, conyunción y negación. En la lógica transitiva valen tanto el tercio excluso y la no-contradicción para la negación fuerte ($\ulcorner p\lor\neg p\urcorner$, $\ulcorner\neg(p\land\neg p)\urcorner$), como sendas contrapartes para la negación simple ($\ulcorner p\lor Np\urcorner$, $\ulcorner N(p\land Np)\urcorner$). En este punto —y según ya ha quedado apuntado— no hay desacuerdo alguno entre relevantismo y transitivismo —sí lo hay entre ambos, por un lado, y el enfoque de da Costa, por otro. Lo que nos lleva a considerar al relevantismo como discrepando de la lógica clásica únicamente en lo tocante al condicional es que es el condicional mismo el que no es clásico, sin que haya ningún functor relevantista que tenga las propiedades del clásico. Si se define un pseudocondicional, Z, al modo clásico: $\ulcorner pZq\urcorner$ eq $\ulcorner Np\lor q\urcorner$ resulta que el relevantismo no otorga a este functor la propiedad del MP. (Es preferible expresarlo así en lugar de decir que los relevantistas leen $\ulcorner p\supset q\urcorner$ como «No p o q». Porque no hay en la lógica relevante ningún functor, ni primitivo ni definido, con las propiedades del entrañamiento o condicional clásico, ‘$\supset$’. Lo que sucede es que el operador relevantista de entrañamiento es más débil que nuestra implicación ‘$\rightarrow$’ —más débil en el sentido de que, si bien cada teorema de la lógica relevante que sea de la forma $\ulcorner p\rightarrowtail q\urcorner$ es tal que la traducción transitiva de esa fórmula es un teorema del sistema *Aj*, lo inverso no sucede. Y, más allá de ese operador, no hay en la lógica relevante ningún otro functor condicional, ningún otro functor ‘♬’ tal que se reconozcan en esa lógica como lícitas todas las deducciones de la forma p♬q, p $\vdash$ q.)

Por el contrario, la lógica transitiva y la de da Costa sí contienen, ambas, un condicional clásico. De ahí que resulte lo siguiente: mientras no intervenga el condicional, cada fórmula relevantísticamente teoremática es válida en la lógica clásica y viceversa, sin que se produzca ninguna bifurcación de functores clásicos en el paso a la lógica relevante; por el contrario, en el paso de la lógica clásica a la de da Costa o a la transitiva tenemos que, mientras no intervenga la negación —o mientras ésta sea traducida como negación fuerte— tampoco hay cambio en el acervo de teoremas —aunque, a diferencia del sistema de da Costa, el transitivo sí opera bifurcación del condicional: además del condicional clásico, ‘$\supset$’, contiene una implicación, ‘$\rightarrow$’, que es más exigente; pero, mientras no intervenga el condicional (ni tampoco la implicación, desde luego, sino sólo los otros functores clásicos), la lógica transitiva coincide con la relevante en mantener los mismos te oremos clásicos, ni más ni menos (y eso, en el caso de la lógica transitiva, tanto para ‘$\neg$’ cuanto para ‘N’), que se resumen en los de tercio excluso y no contradicción (y, además, cuando entra en escena la implicación —aunque siga dejándose de lado a la negación fuerte— la lógica transitiva resulta ser una extensión no conservativa de la lógica relevante, e.d. no rechaza nada de lo que acepte la lógica relevante). Por el contrario, en este punto la lógica de da Costa se separa de las otras tres —de la clásica, de la relevante y de la transitiva—, pues, aunque mantiene el tercio excluso, sacrifica el principio de no-contradicción.

No es, pues, una desviación de la negación clásica lo que constituye la raíz del apartamiento relevantista respecto de la lógica clásica, apartamiento que determina la posición peculiar que ocupa el relevantismo en la escena lógica; si lo fuera, entonces debería no sólo suceder que no se mantengan algunos teoremas clásicos que involucran a la negación, sino algo más: que, mientras no entre de por medio la negación, no se altere el acervo de teoremas y reglas de inferencia de la lógica clásica (al menos para alguna traducción). Esa raíz es, antes bien, una desviación respecto del condicional clásico. Sucede todo lo contrario en el caso de la lógica de da Costa. En el caso de la lógica transitiva la situación es más complicada: hay apartamiento respecto de la negación clásica entendida como mero ‘no’ o negación simple y hay también apartamiento respecto del condicional clásico entendido como implicación; pero no hay apartamiento de la negación clásica leída como ‘no … en absoluto’ ni respecto del condicional clásico leído como ‘si … entonces’. Por otro lado, la desviación de la negación simple de la lógica transitiva, ‘N’, respecto de la negación clásica ‘$\sim$’ es menos drástica que la que efectúa la negación débil de da Costa, puesto que ‘N’ conserva muchas propiedades clásicas (teorematicidad del principio de no contradicción, involutividad —o sea: equivalencia entre $\ulcorner NNp\urcorner$ y $\ulcorner p\urcorner$— y DeMorgan) de entre las que vienen en cambio sacrificados en la lógica de da Costa.

Lo anterior nos conduce a estas conclusiones: el relevantismo es clásico en su concepción de la negación y anticlásico en su concepción del condicional; da Costa es estrictamente clásico en cuanto al condicional pero fortísimamente anticlásico en lo tocante a la negación (simple); el transitivismo es: clásico en su concepción del condicional, pero no estrictamente —pues juzga necesario añadir al condicional clásico otro functor condicional más exigente, la implicación—, a la vez que es anticlásico —pero menos que el de da Costa— en lo que respecta a la negación débil.

Por ser anticlásicas en lo que toca a la negación simple, la lógica de da Costa y la transitiva introducen además una negación fuerte —pues consideran que bajo ciertas versiones todos los teoremas de la lógica clásica deben ser verdaderos y todas las reglas de inferencia clásicas deben valer—, en tanto que el relevantismo, cuya negación misma, de suyo, es clásica, rechaza toda duplicación de negaciones; una negación fuerte metida en el relevantismo debería caracterizarse por actuar, al aparecer con el condicional, como negación clásica, haciendo así zozobrar la empresa relevantística de mantener al condicional exento de toda irrelevancia, o sea: de toda validez de una fórmula condicional con apódosis cuyo ‘significado’ no esté intrínsecamente contenido en el de la prótasis —del cual contenimiento es señal necesaria (no suficiente según Routley) que haya alguna letra esquemática compartida por la prótasis y la apódosis.

Acápite 5º.— Las raíces de la discrepancia entre el enfoque de da Costa y el enfoque transitivista

Aquí voy a presentar una argumentación filosófica respecto de estas cuestiones que, aun coincidiendo a grandes rasgos con otras que he efectuado en otros trabajos (p.ej. [P2] a [P13]), resalta una serie de puntos nuevos tanto acerca de las motivaciones subyacentes cuanto asimismo de las consecuencias que resultan de sendos enfoques.

Ya dije más arriba que el sistema de da Costa y la lógica transitiva, si bien coinciden en postular a la vez una negación simple o natural —cabe llamarla ‘**débil**’, aunque no con plena justeza, pues en la lógica transitiva hay negaciones más débiles que ella— y una negación fuerte o supernegación, discrepan a la hora de atribuir unas u otras características a la negación simple. Da Costa reconoce la validez o teorematicidad de los siguientes esquemas (donde ‘$\supset$’ es el condicional, siendo ‘$\equiv$’ el bicondicional, definido así: $\ulcorner p\equiv q\urcorner$ eq $\ulcorner p\supset q\wedge.q\supset p\urcorner$): $\ulcorner p\vee Np\urcorner$ (tercio excluso); los dos principios de abducción, $\ulcorner p\supset Np\supset Np\urcorner$ y $\ulcorner Np\supset p\supset p\urcorner$; y $\ulcorner NNp\supset p\urcorner$; no reconoce, en cambio, la teorematicidad de $\ulcorner p\supset NNp\urcorner$, $\ulcorner N(p\wedge Np)\urcorner$, $\ulcorner p\vee q\equiv N(Np\wedge Nq)\urcorner$, $\ulcorner p\wedge q\equiv N(Np\vee Nq)\urcorner$. Los dos últimos esquemas son los principios de DeMorgan; a $\ulcorner p\supset NNp\urcorner$ lo llamaremos ‘**principio de doble negación**’ y a su recíproco $\ulcorner NNp\supset p\urcorner$, ‘principio converso de doble negación’. (En la lógica transitiva es teoremático el principio (equivalencial) de involutividad, a saber: $\ulcorner pINNp\urcorner$, que se lee: «El hecho de que p equivale al de que no suceda que no sea cierto que p»; este principio de involutividad es más fuerte, y su verdad implica tanto la del principio de doble negación cuanto la del principio converso de doble negación.) La lógica transitiva reconoce, por su parte, la teorematicidad de todos los principios enunciados, sin excepción.

La negación simple de da Costa es una especie de opuesto dual de la negación intuicionista, en el siguiente sentido. El sistema de da Costa se obtiene añadiendo, a una lista de axiomas que basta para probar todos los teoremas de la lógica intuicionista que no contienen ninguna ocurrencia del functor de negación, los dos esquemas axiomáticos siguientes: $\ulcorner p\vee Np\urcorner$; $\ulcorner NNp\supset p\urcorner$; así como otros principios más que dicen que, si a una oración se le aplica con verdad [la instancia correspondiente d]el principio de no-contradicción, la negación simple se comporta entonces respecto de tal oración como si fuera negación fuerte o clásica. Ahora bien, si tomamos los rasgos que suelen definir a una negación, nos encontramos con que son: DeMorgan; validez del tercio excluso; validez de la no-contradicción;

principio de doble negación; principio converso de doble negación; y la regla de Kleene. De esos principios el intuicionismo reconoce: algunas de las leyes de DeMorgan (no todas), la no-contradicción, el principio de doble negación y la regla de Kleene; da Costa reconoce: el tercio excluso y el principio converso de doble negación. Resulta natural la conjetura de que da Costa trató de hallar una negación que, siendo más débil que la clásica, se pareciera a ella justamente en aquello, y sólo en aquello, en que la negación intuicionista difería de la clásica. Sea cual fuere el valor heurístico del procedimiento, encuéntranse en da Costa motivaciones filosóficas de su enfoque, que voy a estudiar a continuación. Antes, empero, quiero señalar que los dos principios costianos para la negación, el de tercio excluso y el converso de doble negación, son sendas versiones del tercio excluso en sentido amplio. Porque uno de los sentidos que a veces vehicula el 'o' es, no la mera y llana disyunción, sino un functor '√' definible así: ⌜p√q⌝ abrevia a ⌜Np⊃q⌝; «Si no sucede que p, sucede que q» (aunque, de preferencia, eso se expresa diciendo: «p a menos que q», si bien el 'a menos que' también puede ser un alomorfo del 'o' en sentido de disyunción lisa y llana). Así pues, ⌜NNp⊃p⌝ es ⌜Np√p⌝; en cuanto a ⌜p√Np⌝, que también se requiere (pues la disyunción '√', a diferencia del mero 'o', '∨', no es conmutativa o simétrica), resulta ser una versión notacional del anodino ⌜Np⊃Np⌝, que es, en cualquier caso, teoremático en casi todos los sistemas de lógica, incluido el de da Costa, por ser una instancia del principio de autoentrañamiento ⌜p⊃p⌝.

Pasemos, pues, al tema central de este Acápite. ¿Dónde estriba la divergencia entre ambos enfoques? Las raíces de la misma son profundas. Cabe, ante todo, enumerar cuatro puntos básicos de discrepancia.

En primer lugar, está la concepción de la verdad. La concepción filosófica que anima a la lógica transitiva ve al operador alético 'es verdad que' como redundante. En cambio, el enfoque de da Costa lo ve como significando que al hecho de que se trate le corresponde el valor de verdad V (La Verdad, lo Verdadero), sin que tal correspondencia sea idéntica al hecho mismo; de suerte que, abreviando 'no es verdad que' como 'es falso que', tenemos que, mientras, para el enfoque transitivista, «es falso que p» dice lo mismo que «no-p» —e.e. «no sucede que p»—, para el enfoque de da Costa, por el contrario, no se da tal equivalencia, sino que, aunque «no es verdad que p» entraña «no p», falla el entrañamiento converso. El segundo punto de discrepancia es que, mientras para el transitivismo verdad y falsedad no forzosamente se excluyen por completo, en cambio —según el punto de vista de da Costa— si bien cabe que un hecho sea verdadero y que también sea verdadera la negación del mismo, sin embargo la verdad de un hecho no puede ser nunca tal que su negación sea también verdadera. (El fondo de esta discrepancia yace en que, mientras desde el punto de vista transitivista, la verdad tiene grados —en verdad, infinidad de grados—, para da Costa la verdad no es gradual: si se da, se da totalmente; y, si no se da, no se da en absoluto: ser verdadero es lo mismo que ser totalmente verdadero. De ahí que no pueda decirse que un hecho es verdadero y falso a la vez, lo uno y lo otro hasta cierto punto nada más; no: porque, si es verdadero, lo es totalmente, y —según da Costa— verdad y falsedad se excluyen absolutamente.)

El tercer punto de discrepancia concierne al fundamento de que se den o puedan darse verdades contradictorias: según el enfoque transitivista, sólo cabe que haya verdades mutuamente contradictorias —e.e. contradicciones verdaderas— cuando cada una de ellas lo sea únicamente en cierta medida, no total (y no ya no total, sino a lo sumo igual al 50% del grado máximo o total de verdad); la negación de un hecho es verdadera en aquella medida en que el hecho no lo sea —en que sea falso. (Intuitivamente, eso nos llevaría, al parecer, a sostener que la suma del grado de verdad de un hecho con su grado de falsedad es de un 100%, y no menos; pero, por otros motivos que no hacen al caso, esa exigencia puede ser abandonada.) En cambio, para el enfoque de da Costa la verdad conjunta de un hecho y de su negación nada tiene que ver con que el primero sólo sea verdadero en alguna medida.

El cuarto punto de discrepancia estriba en que, para da Costa, parece haber un argumento transcendental que lleva a que no valga el principio de no-contradicción, a saber: la contradictorialidad de lo real no puede ser a la vez afirmada y negada, pues, entonces, ya no se trataría de mera existencia de contradicciones verdaderas en la realidad sino de un incurrir nosotros mismos en autocontradicción a la hora de expresar esa contradictorialidad de lo real; y el inconveniente de que incurramos en tal autocontradicción estribaría en que, al hacerlo, desdibujaríamos el perfil de nuestra teoría y perderíamos la posibilidad de hacer una afirmación tajante de nuestro punto de vista, una afirmación informativa —por ser incompatible, del todo incompatible— con la negación de la misma. Dicho de otro modo, quien acepte contradicciones de cualquier nivel de complejidad (p y no p y no (p y no p) y no (p y no p y no (p y no p)) …) no puede decir tajantemente cuál es su punto de vista, sino que recupera siempre el de su adversario, el pensador dignoscitivo o anticontradictorialista; con lo cual su teoría resulta ininformativa y, en la práctica, banal. Como tenemos que evitar situaciones prácticamente absurdas de esa índole, vémonos compelidos a no admitir contradicciones sino a cierto nivel, y lo mejor es admitirlas sólo cuando en ellas no está involucrado ningún enunciado que sea a su vez contradictorio.

Paréceme que está claro el engarce entre esos puntos de discrepancia; no existe vinculación lógicamente obligatoria entre las diversas tesis que forman el enfoque de da Costa; p.ej., no habría incongruencia (e.e. supercontradicción) en rechazar la gradualidad de la verdad y pensar, sin embargo, que no se excluyen por completo verdad y falsedad (pues, al fin y al cabo, para da Costa la verdad simultánea de un hecho y de su negación puede darse sin que entre de por medio gradualidad de ninguna clase); tampoco habría incongruencia en sostener esa exclusión total aun aceptando la vinculación de la contradicción con la gradualidad; también podría sostenerse, sin incoherencia, la redundancia de la verdad sin postularse exclusión total de verdad y falsedad y sin ligar contradicción y gradualidad; por último, la consideración referente a grados o niveles de contradictorialidad de la afirmación se basa más bien en presupuestos epistemológicos y podría esgrimirse independientemente de las otras tres. Mas cualquiera de esas alternativas, aunque lógicamente viable, está sujeta a reparos. Para botón de muestra, examinemos lo que pasaría con la penúltima alternativa que hemos imaginado.

Como, para da Costa, la verdad de un hecho y la de su negación no se excluyen siempre por completo, si la verdad fuera redundante tendríamos que verdad y falsedad no se excluirían por completo; pero, como el fundamento de la contradicción no es —para él— la gradualidad, ese no excluirse por completo verdad y falsedad no estribaría en que la verdad fuera tal sólo hasta cierto punto —sólo en un grado no total; mas entonces nos veríamos confrontados con dificultades como las dos siguientes: de un lado, ¿dónde estaría el fundamento de la no plena exclusión de verdad y falsedad? (Claro que también se plantea la cuestión del fundamento de la no plena incompatibilidad entre la verdad de un hecho y la de la negación del mismo, cuando no se acepta que sea la gradualidad; pero a esa cuestión da Costa puede responder que el fundamento estriba, en cada caso, en que el predicado que esté involucrado sea intrínsecamente dialéctico, o sea: tal que puedan darse a la vez en el mismo ente él y su propio complemento; en tanto que, sin la admisión de grados de verdad, resulta dudoso que el predicado de verdad, o la propiedad de ser verdadero, sea intrínsecamente dialéctico —no se ve ningún otro fundamento de esa dialecticidad intrínseca de la verdad.) La segunda dificultad estaría en la necesidad —que aduce, justamente, la consideración sobre los niveles de contradictorialidad de la afirmación— de llegar a un punto en el que lo que se diga pueda ser tajante o rotundo: no podemos seguir diciendo cosas que son y a la vez no son; hace falta que, al aclarar lo que hemos dicho, desemboquemos en una afirmación que no pueda ser tal que, pese a ser verdadera, sea no obstante tal que también sea verdadera su negación; pues, de ser así, tendríamos una viciosa progresión al infinito; viciosa porque nunca alcanzaríamos un tope, un punto de detenimiento, un punto en el que ya no quepa a un interlocutor decir que, si bien está de acuerdo con nosotros, niega el enunciado que hayamos acabado de decir —afirma la negación del mismo. Ahora bien, la declaración tajantemente verdadera —y de ningún modo falsa— no podría ser una atribución de grado de verdad, pues —por hipótesis— no habría sido alterada ni puesta en tela de juicio la presuposición de da Costa que rechaza grados de verdad. Entonces debe consistir tal declaración justamente en decir de algo que es verdadero.

Por otro lado, y si bien podrían, sin incoherencia o incongruencia, independizarse las tres primeras tesis del enfoque de da Costa de la premisa de su argumento transcendental (la necesidad de no afirmar y negar a la vez la propia tesis de que hay afirmaciones verdaderas cuyas negaciones también lo son), esa premisa aparece con toda naturalidad en un enfoque en el que se distingue entre «no-p» y «no-es-verdad-que-p» y sólo así se acepta la posibilidad de contradicciones verdaderas (las verdades mismas no pueden ser contradictorias, aunque sí sean verdaderas ciertas contradicciones; téngase en cuenta que

—en ese enfoque— la verdad de un hecho no es el hecho mismo, o, más exactamente, no siempre lo es), pues parece que, al alcanzarse algún grado de complejidad, ha de llegarse a un punto en el que sí equivalga lo dicho a la verdad de lo dicho; y, alcanzado ese punto, ya no cabrán —en ese nivel y niveles superiores— contradicciones verdaderas porque serían verdades contradictorias. (A favor de que así debe ocurrir cabe formular un plausible argumento transcendental.) Igualmente, en un enfoque en el que el fundamento de la existencia de contradicciones verdaderas no es la gradualidad, no hay cómo delimitar las contradicciones admisibles de las inadmisibles alegando que son inadmisibles las que equivalgan a un ser así y (a la vez) totalmente no así (una supercontradicción); y la alternativa natural es la de considerar como inadmisibles aquellas contradicciones que sean de determinado grado de complejidad o que tengan determinada estructura sintáctica.

Dificultades parecidas aflorarían en torno a las otras alternativas. Luego lo más natural es, si se acepta una de las cuatro tesis de da Costa —exclusión total de verdad y falsedad, no redundancia, no fundación de la contradicción verdadera en la gradualidad y necesidad de que se deseche de antemano la contradictorialidad de las oraciones de determinado grado de complejidad y de determinada estructura (a saber: las que involucran antinomias como suboraciones suyas)—, aceptar las otras tres; y el aludido tope verlo, entonces, en la introducción de la palabra 'verdad' —o en el acceso a un nivel y tipo de complejidad de la oración en la que ya ésta tenga que equivaler al resultado de prefijarle 'Es una verdad que'; una oración normal puede significar a un hecho verdadero pero cuya negación también sea verdadera; en cambio, el ser verdadero ese hecho es otro hecho que, si se da, excluye absolutamente el que sea verdadera su propia negación —e.e. el que sea falso el hecho inicialmente considerado.

Tenemos, pues, dos enfoques cada uno de los cuales posee, no ya su propia coherencia, sino también su propia cohesión o armónica conjugación o trabazón entre las tesis que lo forman. Para el enfoque transitivista la clave de la contradicción es la gradualidad; la verdad de un hecho es el propio hecho y, por ende, sujeta a grados cuanto pueda estarlo una propiedad; con lo que resulta que verdad y falsedad no se excluyen del todo —no son completamente incompatibles—, estribando esa ausencia de incompatibilidad total en la gradualidad misma de la verdad —y, por ende, de su complemento: la falsedad.

Ya hemos visto cómo en el enfoque de da Costa hay un doble tope que las contradicciones verdaderas no pueden sobrepasar: la introducción de la palabra 'verdad' y el nivel y tipo de complejidad de las oraciones. En la lógica transitiva el único tope está dado por la introducción de un functor intrínsecamente bivalente —de un functor que transforme lo multivalente en bivalente—, como 'es enteramente cierto que' o 'es hasta cierto punto por lo menos verdad que' (cada uno de ellos se define a partir del otro con un 'no' delante y otro detrás). El primero de ellos envía todo lo no totalmente verdadero sobre la falsedad total; el segundo envía todo lo no totalmente falso sobre la verdad total. Para cualquier argumento, pues, toman siempre como valor funcional uno de los dos extremos aléticos. Si decimos 'Es por lo menos hasta cierto punto verdad que p' lo dicho es o totalmente verdadero, o enteramente falso (con la precisión de que es así en cada aspecto de lo real, aunque cabe que en unos aspectos sea [totalmente] verdadero y en otros [totalmente] falso; pero en este capítulo sólo muy de pasada aludiré a la pluralidad de aspectos de lo real y —en aras de la simplicidad— hablaré como si la realidad fuera uniaspectual).

Eso explica que, en la lógica transitiva, un enunciado, por más complejo que sea, pueda ser verdadero y falso, siendo también verdadero y falso el hecho de que es verdadero y falso y así sucesivamente. Sólo cuando prefijamos, a uno de esos niveles, un functor de tajancia —'totalmente' o '(por lo menos) hasta cierto punto'—, o sea un functor intrínsecamente bivalente, sólo entonces nos vemos en la imposibilidad de decir, sin incurrir en absurdo, que lo dicho es verdadero y falso. En una teoría contradictorial en la que —según sucede en la lógica transitiva— valga el principio de no contradicción tendremos que, para todo ⌜p⌝, será teoremático el enunciado ⌜N(p∧Np)⌝. Abreviando ⌜p∧Np⌝ como ⌜Sp⌝, será teoremático ⌜NSp⌝. Sea 's' un enunciado verdadero y falso según una teoría contradictorial cuya lógica subyacente sea la lógica transitiva (e.d. una teoría que sea una extensión recia de esa lógica). De esa teoría serán teoremas tanto 's' cuanto 'Ns', pero también —por la regla de adjunción (p, q ⊦ p∧q)— 'Ss' y asimismo, por el principio de no contradicción, que es teoremático en la lógica transitiva, 'NSs'; nuevamente, por la regla de adjunción, será teoremático 'Ss∧NSs', o sea

'SSs' y, por el principio de no contradicción, 'NSSs'; por adjunción, será entonces teoremático 'SSSs', y así sucesivamente. ¿Hay algún inconveniente en ello? Si sí lo hay, ¿no lo había ya, desde el comienzo, en que fueran verdaderos a la vez 's' y 'Ns'? Da Costa podría alegar la necesidad del tope. Mas, sobre lo arbitrario que resulta colocar a éste en uno u otro grado de complejidad, tenemos que el tope está al alcance de la mano con el functor 'L' —que se lee 'Es [por lo menos] hasta cierto punto verdad que'. En un caso así, 'Ls' es verdadero (totalmente), y 'NLs' es totalmente falso.

Ahora bien, no sólo no surgen dificultades que impidan a una teoría contradictorial el reconocer la teorematicidad del principio de no contradicción, sino que a favor de tal principio abonan muchas consideraciones muy convincentes. El enfoque transitivista reconoce que cada contradicción es falsa —falsa en por lo menos un 50%—, si bien muchas contradicciones son también verdaderas —verdaderas en medidas de a lo sumo 50%.

Subsiste empero una dificultad. Puesto que los sistemas de da Costa, C_n, para n finito, contienen todos ellos una negación fuerte con las propiedades de la clásica, ¿por qué no puede da Costa colocar el tope en el mismo sitio que la lógica transitiva, en que la contradicción involucre a la negación fuerte en vez de a la simple? La primera respuesta a tal pregunta estriba en señalar que, precisamente, en C_1 la negación fuerte '¬', se define así: $\ulcorner\neg p\urcorner$ abrevia a $\ulcorner{\sim}p\wedge{\sim}(p\wedge{\sim}p)\urcorner$: es fuertemente negada una oración cuando se la niega y se niega, a la vez, la antinómica conyunción entre esa oración y su respectiva negación (simple). (De ahora en adelante represento la negación simple de da Costa como '~', en vez de como 'N', dadas las grandes divergencias que separan a esa negación de la negación simple, 'N', de la lógica transitiva, que —a diferencia de la primera— cumple todos los requisitos señalados al comienzo del Acápite 1º del Apéndice de la Sección I para los sistemas eucráticos.) Dicho de otro modo: es negación fuerte aquella negación débil de un hecho al que sí se aplica el principio de no contradicción. (En C_2, C_3, … sucede algo parecido, pero a niveles crecientes de complejidad. En C_2 la negación fuerte, $\ulcorner\neg p\urcorner$ abrevia a $\ulcorner{\sim}p\wedge{\sim}(p\wedge{\sim}p)\wedge{\sim}(p\wedge{\sim}p\wedge{\sim}(p\wedge{\sim}p))\urcorner$, y así sucesivamente.) Eso es lo que hace que el tope sea para da Costa el ya más arriba apuntado, aunque lo formulemos diciendo que es el que involucra a la negación fuerte. Porque, si involucra a la negación fuerte, si es $\ulcorner p\wedge\neg p\urcorner$, entonces es que se trata de una conyunción de una contradicción con la negación de la misma. Ahora bien, esta primera respuesta no es suficiente: ¿no hubiera podido introducir da Costa la negación fuerte como signo primitivo, esquivando así esa (para nosotros) inconveniente vinculación del tope en cuestión a la aplicabilidad del principio de no contradicción? La respuesta verosímil es que, si bien hubiera «podido» hacerlo en el sentido de que no por ello habría incurrido en incongruencia o incoherencia, sin embargo faltaba en su enfoque motivación suficiente para tal introducción. Porque lo natural es introducir una negación fuerte —o introducir un símbolo primitivo como el de superafirmación, 'H', que se lee 'Es totalmente verdad que', el cual, concatenado con la negación simple, 'N', da por resultado una negación fuerte— sólo si la doctrina que motiva la construcción lógica en la que así se proceda incorpora la tesis de grados de verdad; en ese caso la negación fuerte responde a la falta total de verdad, a la falsedad completa, cabal. Sin esa tesis de grados de verdad no se ve motivación clara para introducir una negación fuerte como signo primitivo; porque en una concepción gradualista de la verdad la negación fuerte tiene automáticamente una lectura natural 'No es verdad (o no sucede) en absoluto que', o su equivalente 'Es totalmente falso que'; de ahí que la introducción de una negación así, '¬', como signo primitivo se justifique de suyo por la necesidad de representar en notación simbólica uno de los operadores lógicos que están presentes en la lengua natural. No dándose ni por asomo motivación semejante en un enfoque no gradualístico, como el de da Costa —en el cual, según lo veremos más abajo, la negación fuerte carece de lectura en la lengua natural—, el introducir en un sistema así, como signo primitivo, una negación fuerte sería un expediente *ad hoc* únicamente, con vistas a obviar resultados indeseables —como en este caso, la falta de un tope— pero localizados. Y un sano principio epistemológico estipula que los recursos conceptuales —en el sentido de signos primitivos— deben escatimarse, o que no deben prodigarse sino en la medida en que convenga y con tal que sean suficientemente rentables, cosa que tan sólo sucede en la medida en que la introducción de un signo primitivo no sea un recurso *ad hoc* de utilidad ceñida a un ámbito particular. (Esa adhocidad y la falta de ella se dan también por grados, naturalmente.)

Acápite 6º.— Ventajas e inconvenientes del enfoque relevantista

Lo primero que hay que señalar es que, a diferencia de la lógica de da Costa y de la transitiva, el relevantismo es deductivamente débil: hay deducciones válidas en la lógica clásica y que no lo son, bajo ninguna traducción, en la lógica relevante. Así, el silogismo disyuntivo ($p\lor q, \sim p \vdash q$) es admitido tanto por la lógica de da Costa cuanto por la nuestra con tal que el '∼' se entienda aquí como negación fuerte (en el caso de la lógica transitiva es por lo tanto menester que la lectura sea 'no es verdad en absoluto que'), mientras que es rechazado en la lógica relevante, la cual no conoce sino una única traducción de '∼'; verdad es que esa lógica puede introducir —y a veces lo hacen sus cultivadores— una «disyunción intensional», '√', tal que $\ulcorner p\surd q\urcorner$ abrevia a $\ulcorner \sim p\rightarrowtail q\urcorner$, donde '↣' es el condicional relevante —que es intensional, e.d. que es tal que la verdad de $\ulcorner p\rightarrowtail q\urcorner$ no depende únicamente de qué valores de verdad tengan o dejen de tener $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$ sino del ya aludido envolvimiento significacional. Así traducido el 'o', resulta que también la lógica relevante valida como regla de deducción el silogismo disyuntivo; sólo que ese functor '√' no es propiamente una disyunción, pues no vale para él la regla de adición; $p \vdash p\surd q$ no es una deducción válida en la lógica relevante: de serlo, tendríase en esa lógica una versión válida de la regla *e falso quodlibet* ($p \vdash$ Si no p entonces q) y, por derivación, de la de Cornubia (p, no-p $\vdash$ q), con lo cual el sistema dejaría de ser paraconsistente y relevante; tampoco valen para '√' las leyes de DeMorgan, pues ya no podría introducirse definicionalmente ningún signo '⊙' que se las diera de ser una conyunción y que se definiera así: $\ulcorner p\odot q\urcorner$ abrevia a $\ulcorner \sim(\sim p\surd\sim q)\urcorner$, toda vez que no valen en la lógica relevante, para ese functor así definido, ni la regla de adjunción ($p, q \vdash p\odot q$) ni la de simplificación ($p\odot q \vdash p$). Por todo ello cabe reiterar lo ya señalado: que la lógica relevante no valida el silogismo disyuntivo bajo ninguna traducción (para ninguna disyunción y para ninguna negación). Y, por supuesto, la lógica relevante sacrifica también las reglas puramente positivas de 'irrelevancia' como la regla *uerum e quolibet* ($\ulcorner p \vdash q\supset p\urcorner$) etc. ¿Qué ventajas y qué desventajas comporta ese debilitamiento relevantista del poder inferencial de la lógica clásica, debilitamiento que, en cambio, no se produce en los otros dos enfoques paraconsistentes? La principal ventaja es que, gracias a él, la lógica relevante puede admitir como verdaderas, sin tener que recurrir a ningún otro procedimiento, todas las paradojas que aparecen en una teoría semántica y una teoría de conjuntos ingenuas. Esta afirmación tan perentoria merece doble matización: 1) hasta ahora no se ha probado la verdad de la misma pero parece probable que así sea; y 2) en cualquier caso, no todo sistema de lógica paraconsistente relevante puede dar ese apetecido resultado, sino tan sólo uno que —como el de Routley— sacrifique la regla de contracción, a saber: $\ulcorner p\supset.p\supset q\urcorner \vdash \ulcorner p\supset q\urcorner$, o, más exactamente, su versión relevantística $\ulcorner p\rightarrowtail.p\rightarrowtail q\urcorner \vdash \ulcorner p\rightarrowtail q\urcorner$; a no ser por ese sacrificio aparecerían paradojas conducentes a la delicuescencia —aporías— como la de Curry-Moh Shaw-Kwei; pero la regla de contracción parece muy correcta de suyo, y el sacrificio de la misma resulta un expediente artificial y *ad hoc*; he aquí una instancia: supongamos que es verdad lo siguiente: Si en Marruecos se vive mal, entonces es cierto que, si en Marruecos se vive mal, el régimen de Jasán es impopular; de eso despréndese lo siguiente: Si en Marruecos se vive mal, el régimen de Jasán es impopular; ¿hay algo erróneo en esa deducción? ¿Acaso que oraciones como la premisa no suelen enunciarse? Eso se debe a consideraciones pragmáticas de economía comunicacional —un principio de evitar las redundancias, y justamente eso se explica por la equivalencia entre la premisa y la conclusión: es eso lo que hace que en la premisa haya redundancia, mientras que, si fallara la regla de inferencia en cuestión, habría que buscar otra explicación de por qué no se suelen proferir oraciones como la premisa en cuestión.

Por otro lado, el sacrificio de la regla de contracción lleva parejo el de la regla de autodistributividad del condicional o de la implicación (que, en notación relevantística, sería: $\ulcorner p\rightarrowtail.q\rightarrowtail r\urcorner, \ulcorner p\rightarrowtail q\urcorner \vdash \ulcorner p\rightarrowtail r\urcorner$), puesto que, si la última es válida, también lo será la primera forzosamente, ya que la primera se deriva inmediatamente de la última con el principio de autoimplicación $\ulcorner p\rightarrowtail p\urcorner$. Ahora bien, esa regla de autodistributividad es de lo más sensata y útil y no se ve por qué se va a sacrificar, como no sea el sacrificio un expediente *ad hoc* para frustrar la derivación de la regla de contracción y sortear así la paradoja de Curry-Moh Shaw Kwei. Piense el lector en lecturas de instancias de esa regla y trate de encontrar alguna que le parezca errónea o inaceptable. Seguramente llegará a nuestra misma conclusión: que son correctas todas las instancias de esa regla, todas las deducciones que van de dos premisas de la forma «Si p, entonces: q sólo si r» y «Si p, entonces q» a la conclusión «Si p, entonces r».

En cualquier caso, es lo cierto que sistemas con el poder inferencial de la lógica clásica —como el de da Costa y el transitivo— no pueden, sin recurrir a otras barreras, evitar la delicuescencia que producirían todas las aporías que aparecerían: en teoría de conjuntos si se entronizara sin restricciones el principio de separación, a saber 'Todo ente, x, pertenece a la clase de elementos tales que p[x] en la medida en que sea verdad que p[x]'; y en la teoría semántica si se admitiera un predicado 'Tr', tal que, para cualquier oración, se tuviera Tr(#p) ssi p (donde ⌜p⌝ fuera una oración nombrada por '#(p)'). Es esa ventaja la que airean y pregonan los relevantistas a bombo y platillo, y no les falta razón en considerar que es un tanto a su favor. El tanto no debe empero exagerarse. En primer lugar, porque otras lógicas paraconsistentes —en particular la transitiva— pueden reconocer la verdad de las paradojas ingenuas en teoría de conjuntos y en teoría semántica (eso es lo que hace también la lógica relevante) sin empero aceptar como verdades otras paradojas más complicadas, que llamaremos '**paradojas perversas**' y que sólo surgen precisamente en una teoría complicada elaborada —entre otros fines— para solucionar el problema de las paradojas, por vía de admisión —admisión, justamente, de la verdad de las contradicciones ingenuas. La diferencia entre contradicciones ingenuas y paradojas perversas es que éstas últimas carecen de atractivo intuitivo: no surgen en modos usuales de hablar porque, por razones pragmáticas, el discurso cotidiano tanto en el habla común cuanto en la culta no se adentra en un terreno en el que se apilan y combinan de maneras complicadas los functores de matiz alético, y sólo adentrándose en tal terreno —que es lo que hace una teoría lógica, que utiliza las muletas de la simbolización— aparecen esas nuevas y más complejas paradojas a las que llamaremos '**perversas**'. Luego, aunque una lógica como la transitiva tiene que adoptar alguna otra barrera contra las paradojas perversas —y no le basta con aceptar que hay verdades contradictorias, pues esas contradicciones no pueden ser verdaderas, ya que, analizadas, resultan ser supercontradicciones—, eso no quita para que pueda habérselas con las paradojas ingenuas con la misma (o casi la misma) elegancia y soltura que la lógica relevante. Y, en segundo lugar, la ventaja que comentamos de la lógica relevante sobre las otras dos no es tan importante como lo dicen sus fautores. Y ello por varias razones. He aquí una de ellas. Algunos de los procedimientos ideados para evitar las paradojas que también son aplicables en el marco de la lógica clásica tienen dosis de aceptabilidad e incluso intrínseca plausibilidad y no son meramente puros expedientes *ad hoc* totalmente artificiales y carentes de intuitividad. Lo que sucede es que las paradojas ingenuas también tienen su propia intuitividad, su propio atractivo o plausibilidad pre-teoréticamente, o sea: para un pensamiento todavía no moldeado por los patrones de una particular teoría de conjuntos o de una particular semántica. Por eso mismo no resulta mal —salvo si, en el análisis de los detalles, se prueba lo contrario— el combinar partes de una teoría ingenua (semántica o de conjuntos) que incluyan el reconocimiento de la verdad de las paradojas ingenuas con procedimientos semejantes a los clásicamente utilizados (p.ej. en teoría de conjuntos la introducción de principios de estratificación y de clases últimas o no-elementos) pero aplicados ahora con mayor flexibilidad y con consecuencias menos empobrecedoras, menos maltusianas. Otra razón por la cual no resulta tan importante, después de todo, la (esperada) ventaja de la lógica relevante de poder aceptar sin restricciones un principio de separación ingenuo en teoría de conjuntos es que la plausibilidad de ese principio le viene de ser un caso particular del principio ingenuo de caracterización, a saber: El ente que es así y asá es así y asá. Ese principio sí conduce, de cabeza, a la delicuescencia de un sistema, pues, para cada fórmula ⌜p⌝, se tendrá como instancia del malhadado principio en cuestión: «El ente que p es tal que p»; de donde, por la regla de generalización existencial, resultará que hay al menos un ente que p; y con esas reglas y otros principios corrientemente aceptados en el cálculo cuantificacional (como el de que el resultado de prefijar un cuantificador con una variable a una oración en que no haya ocurrencias de tal variable es equivalente a la fórmula que había antes de la prefijación) resultará que es un teorema del sistema en que esté presente ese principio de caracterización ⌜p⌝: cualquier ⌜p⌝. Los relevantistas son conscientes de eso y rehuyen el principio irrestricto de caracterización. Sí, pero, entonces, ¿cómo justificar el principio ingenuo e irrestricto de separación? Claro, pueden decir que el principio irrestricto de separación puede tener plausibilidad por sí mismo; mas ese argumento es débil: también puede el paraconsistente no relevantista alegar que las paradojas conjuntuales y semánticas ingenuas pueden defenderse y sustentarse sin el principio irrestricto de separación y sin el predicado irrestricto de verdad, ya por su propia plausibilidad, ya porque se desprendan de principios y predicados más débiles que los irrestrictos, pero que son consecuencias necesarias de ellos. (El meollo de nuestro último argumento es que, si el relevantista abandona su posición de que es innegociable la adopción de la teoría ingenua en su integridad y ello por un motivo a priori y teoréticamente fundamental, si acude a argumentos más de compromiso, de menor aprioridad o fundamentalidad, entonces pierde el mayor tanto que parecía estarse apuntando: el de una posición que se atiene a consideraciones absolutamente básicas y en principio incuestionables —salvo por procedimientos *ad hoc* que serían tácticas desesperadas.)

Sin embargo, la aludida ventaja de la lógica relevante sobre las otras dos puede tal vez generalizarse: cabe esperar —pero no ha sido probado, eso no— que esa lógica escape a casi todos los resultados de limitación que afectan a las teorías recursivamente axiomatizadas no relevantes, sean clásicas o incluso paraconsistentes; p.ej. el teorema de Gödel, el de Church y otros semejantes. En este punto, el tanto a favor de la lógica relevante sería más elocuente y difícil de impugnar. De todos modos, podrían también aquí formularse consideraciones parecidas —si bien a lo mejor menos persuasivas en este punto— a las que he hecho más arriba en torno a las paradojas conjuntuales y semánticas. En lo tocante al teorema de Church ni siquiera está claro que sea deseable el fallo del mismo (fallo que significaría la decidibilidad mecánica de los teoremas del cálculo cuantificacional en general y eliminaría así la frontera que separa eso que pomposamente llamamos '*inteligencia*' o '*inteligencia creadora*' —capacidad de inventar pruebas sin necesidad de aplicar un procedimiento exhaustivo de ensayo y error— del funcionamiento maquinal o mecánico). Lo más serio de todo es lo tocante al teorema de Gödel y otros similares. No está claro, sin embargo, que sean desechables otras soluciones, tal vez a la postre más plausibles, como la de que el lenguaje escogido deba ser sintácticamente abierto, o sea: que la clase de sus fórmulas bien formadas no sea recursiva y que el conjunto de los teoremas de un sistema formulado en tal lenguaje no sea recursivamente numerable —claro está que entonces el sistema ya no es axiomático en el sentido usual de recursivamente axiomatizado; esta solución puede despedir un desagradable tufo a 'límites de la razón' (Ladrière y demás abogados de un cuasi-irracionalismo) pero no tiene por qué verse así; pues al fin y al cabo nada dice que la razón tenga que valerse en todos los campos de la recursividad —y, si acaso, tendríamos aquí una situación de límites del intelecto humano en esa tendencia a agarrarse al asidero de la recursividad, aunque, felizmente, no es invencible: los grandes constructores de sistemas, como Frege, no alcanzaron sus conjuntos de axiomas utilizando métodos recursivos; y el papel de la recursividad ha sido, aunque ciertamente importante, secundario en la historia de las actividades del intelecto humano.

En todo caso, y sea de ello lo que fuere, la lógica relevante paga un precio espantosamente desmesurado por esas ventajas. En primer lugar, y ante todo, está la vulnerabilidad de la lógica relevante al reproche de quedarse sin test alguno de rechazabilidad lógica de una teoría. Clásicamente —e intuicionísticamente también— es rechazable una teoría que contenga, para cierto ⌜p⌝, el par de teoremas ⌜p⌝ y ⌜∼p⌝, pues, por la regla de Cornubia, de ese par se sigue cualquier cosa, por absurda que sea —el sistema es delicuescente. En la lógica de da Costa y en la transitiva sucede lo propio, sólo que con tal que el '∼' se entienda como negación fuerte (en nuestro sistema, pues, vale la regla: p, ¬p $\vdash$ q; si bien no vale la regla: p, Np $\vdash$ q: es la invalidez de la última lo que hace que sea paraconsistente el sistema). En la lógica relevante no hay nada similar, pues no hay en ella sino una única negación: ningún cúmulo finito de teoremas hará a una teoría delicuescente y, por ende, rechazable; y la noción de deducción o inferencia, en su acepción usual, exige que el número de premisas sea en cada caso finito. Cierto es que los relevantistas reconocen tests de inaceptabilidad, como el que en una teoría pueda demostrarse que 0=1, pues entonces se tendrá que sólo hay un número, que es 0, y otros resultados inaceptables. Pero es arbitrario ese reconocimiento, pues no hay una obligatoriedad lógica de rechazar teorías con tales conclusiones, ya que tales teorías no serían delicuescentes —si se toma la lógica relevante como patrón único de consecuencia lógica. Estamos, pues, con las manos atadas: no cabrán ya demostraciones por reducción al absurdo (una demostración así es la que, constatando que de un cúmulo de premisas Γ se deducen conclusiones conjuntamente del todo incompatibles, infiere que ha de rechazarse Γ; no se confunda eso con la validez del [mal]llamado **principio de reductio ad absurdum**, que vale más llamar **de abducción**: si es verdad que la verdad de que p entraña la falsedad de que p, entonces no es verdad que p). Y eso constituye una pérdida grave: ya no se sabrá ante qué tribunal podrán comparecer las teorías para ser admitidas o rechazadas según consideraciones que vengan de la lógica. Es más: ni siquiera según otras consideraciones. Porque supongamos que del conjunto de premisas Γ se desprende la conclusión $\ulcorner r \urcorner$ y que uno considera inaceptable a $\ulcorner r \urcorner$; por *modus tollens* concluirá que una de las oraciones que figuran en Γ es falsa, o sea tal que su respectiva negación es verdadera; pero —ateniéndonos al enfoque relevantista, que carece, y está obligado a carecer, de negación fuerte— eso no acarrea forzosamente el rechazo de esa oración ni, por lo tanto, tampoco de Γ. (Lo acarrearía si el sistema reconociera una negación fuerte '$\neg$' tal que, si es afirmable con verdad $\ulcorner \neg s \urcorner$, entonces es de rechazar el enunciado $\ulcorner s \urcorner$.) Para argüir a favor de que sí lo acarrea, debe el lógico relevantista, o el teórico que aplique la lógica relevantista, acudir a algún otro argumento o justificación, que no sea el *modus tollens*; ¿cuál podría ser? No se me ocurre otro, ni los relevantistas me han sacado de dudas.

De esa impotencia de la lógica relevante se deriva esta grave consecuencia: no puede el lógico relevante dar un perfil a sus afirmaciones, decir algo que excluya [totalmente] otra cosa, y que la excluya por principio. A cualquier cosa que afirme su contrincante podrá responder '¡No!' pero, como su 'no' es siempre un mero 'no', nunca negación fuerte o que conlleve forzosamente rechazo, su réplica negativa no tiene por qué conllevar una exclusión de lo que él niega; no puede, pues, el relevantista darse de bruces con un enunciado que resulte por principio del todo incompatible con su propia teoría, ni decir nada que zanje el sentido de tal teoría expresando la incompatibilidad total entre ella y lo que a ella debiera oponerse totalmente. Los relevantistas replican que una teoría puede ser informativa aunque no excluya a nada, pero tal réplica es inconvincente, pues ya no se entiende qué sería en ese caso la informatividad vehiculada. Lo que si es cierto es que la informatividad es relativa, y que una teoría podría ser verdadera sin ser informativa. No obstante, en el caso que nos ocupa, el de la propia posición a que se ve abocado el relevantista por su carencia de negación fuerte, la ininformatividad sería absoluta y definitiva con el agravante de que la teoría que así resulta totalmente ininformativa no es nada evidente, sino algo de lo más controvertible y que, naturalmente, sus propios adeptos tienen que considerar, y de hecho consideran, como controvertible, pues, de no, darían por sentada su incontrovertible verdad y no se esforzarían por argüir a favor de ella. El argumento que estoy ahora presentando no es tan sólo *ad hominem*, sino transcendental: es condición de posibilidad de la actividad teorética e intelectual —con publicaciones, congresos, enseñanza, discusiones y todo eso— el que las teorías que se profesan no sean incontrovertibles, sino informativas.

De que el relevantista carezca, en su vocabulario, de una negación que excluya por completo, que sea un 'no' total, un 'totalmente no', derívase también que no puede ni siquiera presentar su propia teoría en su pleno detalle. En efecto: el relevantista tiene que decir que en su teoría hay oraciones que son teoremas y otras que no lo son —sólo así se tendrá que la teoría no es delicuescente; pero su 'no', por ser negación simple y nunca fuerte —que no la hay en su sistema—, no excluye el que también esas oraciones sean teoremas de su teoría. Así pues, el relevantista no puede enunciar la coherencia o falta total de delicuescencia de su teoría. Ni puede señalar la diferencia que debe empero tener que señalar entre oraciones sólo verdaderas y oraciones a la vez verdaderas y falsas —y a menos que lo haga, se tendrá en su sistema que cada negación de un teorema será también un teorema, con lo que el sistema resultaría negacionalmente saturado, resultado que no lo hace delicuescente pero que presenta graves inconvenientes, como es obvio; porque el 'sólo' que normalmente se profiere contiene un functor de negación fuerte: «Sólo x es tal que p» equivale a «x es tal que p y cualquier ente, z, diferente de x es tal que es totalmente falso que p[x/z]»; en cambio, la definición del 'sólo' de un relevantista no contendrá negación fuerte, pues el relevantista no acepta —ni, mientras siga siendo relevantista, puede aceptar— que exista o deba existir cosa tal; mas entonces su 'sólo' no excluye aquello que, en principio, estaría llamado a excluir porque no excluirá ni rechazará nada ('sólo tengo un abrigo' no excluirá, pues, en la acepción relevantista de 'sólo', que tenga yo siete abrigos).

Acápite 7º.— Ventajas e inconvenientes del enfoque de da Costa

Si bien adolece de esos defectos, presenta empero la lógica relevante, frente a la de da Costa, la ventaja de que tiene un functor de equivalencia, 'I', definible así: ⌜pIq⌝ equivale a ⌜p→q∧.q→p⌝. Ese signo de equivalencia es tal que vale la siguiente regla de deducción: pIq ⊦ rIs, si ⌜s⌝ no difiere de ⌜r⌝ más que en el reemplazamiento de algunas de las ocurrencias de ⌜p⌝ que haya en ⌜r⌝ por sendas ocurrencias de ⌜q⌝. En el sistema de da Costa no puede definirse ningún functor de equivalencia; lo que significa que no puede ni siquiera decirse que un hecho se equivale a sí mismo. Muestra eso lo expresivamente poco potente que es el sistema de da Costa al que está faltando un functor de implicación '→' para el que valga el principio de contraposición para la negación simple, o sea: ⌜p→~q→.q→~p⌝ así como ⌜p∧q→.q∧p⌝, ⌜p∧q→p⌝, ⌜p∧q→q⌝ y ⌜p→q⊃.p⊃q⌝, entre otros esquemas. Parece anodina e inofensiva, y de lo más plausible, una extensión del sistema C_1 que incluyera ese functor implicativo, '→', con esos axiomas. Pero sería desastrosa: tendríamos: ⌜p∧~p→~p→. p→~(p∧~p)⌝, en virtud de contraposición; de donde, en virtud de los otros principios y de la regla del MP, resultaría ⌜p∧~p→~(p∧~p)⌝. Pero entonces el sistema deja de ser paraconsistente, porque, por adjunción, se tendrá: p∧~p ⊦ p∧~p∧~(p∧~p); mas la conclusión hace delicuescente, a tenor de la propia lógica C_1, a la teoría en que aparezca. Por ende derivaríamos la regla de deducción: p, ~p ⊦ q (la regla de Cornubia). Para evitar ese resultado podríamos intentar reemplazar ⌜p→~q→.q→~p⌝ por ⌜~p→q→.~q→p⌝. Pero entonces seguiremos sin poder definir en C_1 un functor de equivalencia con la característica señalada, e.e. un functor 'I' tal que pIq ⊦ … p———I … q———. Podría intentarse entonces una tercera versión: ⌜p→q→.~q→~p⌝; mas también así dejaría el sistema de ser paraconsistente, pues se tendría: ⌜p∧~p→p→.~p→~(p∧~p)⌝; de donde se derivaría la regla de deducción: ⌜p∧~p⌝ ⊦ ⌜~(p∧~p)⌝, con su consecuencia desastrosa: p, ~p ⊦ q. No hay, pues, solución alguna.

Naturalmente esa ventaja que posee la lógica relevante frente a la de da Costa es compartida por la lógica transitiva, *Aj*, pues también ésta posee una congruencia o equivalencia, que es el propio functor equivalencial 'I'.

La dificultad mencionada respecto de la lógica de da Costa no es baladí, ni estriba únicamente en la ausencia de un functor útil por demás. Radica antes bien, según lo hemos probado, en la imposibilidad de introducir tal functor de modo que la equivalencia entre dos oraciones entrañe la de sus respectivas negaciones (pues para cuando sólo están involucrados los otros functores de la lógica de da Costa no surge problema alguno). Nunca podrá, pues, decirse en la lógica de da Costa algo que obviamente sí debiera de poder decirse: que determinados dos hechos son equivalentes y, por ende, indiscernibles en todos los contextos —contemplados por la teoría en que se diga eso; o, si esa teoría es suficientemente fuerte, que esos 'dos' presuntos hechos son en verdad un solo y mismo hecho. Aunque nuestro argumento ha probado tan sólo la no introducibilidad de 'I' a partir de un functor añadido de implicación '→', tampoco podría introducirse 'I' directamente como primitivo, pues debiera entonces de poder definirse '→' así: ⌜p→q⌝ abrevia a ⌜p∧qIp⌝, con las características ya señaladas; y es la imposibilidad de que exista tal implicación '→' en C_1 —a menos que el sistema deje por completo de ser paraconsistente— lo que hemos probado. (Lo mismo que acabamos de probar utilizando técnicas de teoría de pruebas ha sido también probado, utilizando procedimientos algebraicos, por Chris Mortensen en [M6].)[45]

A través de esa dificultad asoma otra colosal: ¿cómo definir la identidad en una extensión del sistema de da Costa? ¿Cómo dar una definición de identidad que asegure y garantice sustituibilidad mutua sin restricciones entre diversas expresiones que denoten a la cosa cuya identidad consigo misma esté siendo significada? ¡No hay cómo, sencillamente! (Salvo postular un esquema axiomático en tal sentido.)

[45] Independientemente de los resultados obtenidos sobre este punto por el autor de estas páginas [que fueron escritas en 1983], otros —posteriores y mucho más exhaustivos, suponiendo como suponen un estudio tematizado a fondo de los sistemas de da Costa—, coincidentes en lo ya apuntado pero que van más lejos, los ofrece el investigador australiano Igor Urbas, en [U1]; dado el carácter de esta Sección no he juzgado oportuno hablar aquí más de los hallazgos de Urbas al respecto.

Esa imposibilidad de introducir en el sistema de da Costa un functor de implicación se debe al fallo en ese sistema (para la negación simple) de la contraposición y de las leyes de DeMorgan. La contraposición debe, efectivamente, fallar con respecto al mero condicional '$\supset$' y a la negación simple, si es que el sistema ha de ser paraconsistente (si valiera como teorema $\ulcorner p\supset q\supset .Nq\supset Np\urcorner$, se deduciría de ahí —en virtud de otros teoremas válidos con respecto a un condicional como '$\supset$', con todas las características del clásico— el esquema $\ulcorner p\wedge Np\supset q\urcorner$, o sea el principio de Cornubia, que hace delicuescente a cualquier teoría contradictorial). Ahora bien, en la lógica de da Costa no puede haber —ya lo hemos visto— otro functor de implicación para el que sí valga la contraposición y ello en virtud de la definición que en el sistema de da Costa se da de la negación fuerte: si valiera la contraposición para algún functor implicacional, la negación simple se convertiría en fuerte, y el sistema dejaría de ser paraconsistente. Tampoco pueden valer en el sistema de da Costa (todas) las leyes de De Morgan: en particular no puede extenderse ese sistema añadiéndole como esquema axiomático $\ulcorner \sim p\vee\sim q\supset\sim(p\wedge q)\urcorner$; no puede hacerse, claro, sin que el resultado sea un sistema superconsistente. Pues, en efecto, como el tercio excluso, $\ulcorner p\vee\sim p\urcorner$, es teoremático en ese sistema, tendríamos entonces el par de teoremas $\ulcorner \sim p\vee\sim\sim p\urcorner$ y $\ulcorner \sim p\vee\sim\sim p\supset\sim(p\wedge\sim p)\urcorner$; por MP deduciríamos el principio de no contradicción, $\ulcorner \sim(p\wedge\sim p)\urcorner$ y, por ende, toda negación simple se transformaría en fuerte.

Otra objeción no menos demoledora que cabe dirigir al sistema de da Costa es que no es satisfactorio el sentido de su negación fuerte. De hecho es un functor tajante, pero no lo es porque el sentido vehiculado por su lectura en lengua natural claramente muestre que lo es y tiene que serlo, sino únicamente porque así lo dispone la axiomática costiana —y la semántica formal propuesta para que resulten válidos los teoremas de ese sistema. En efecto: al transcribirse en notación primitiva, la negación fuerte de da Costa, '$\neg$', se lee —veámoslo con una instancia— como sigue: '$\neg$(le gustan a Elpidio las habas)': 'No le gustan a Elpidio las habas y no sucede que le gusten y no le gusten'.

Como no sea porque, o mientras, así se estatuya o estipule, no se ve ahí ninguna expresión de tajante o rotunda o inmatizable negativa; si el '**No**', por sí solo, puede ser matizable o compatible —hasta cierto punto por lo menos, añadiría yo— con el '**Sí**', no se ve por qué el mero prefijar ese '**No**' —de suyo inocente y contemporizador— a una antinomia de la forma $\ulcorner$p y no-p$\urcorner$ convierte al primer '**no**' —o al '**no**' que, prefijado a $\ulcorner p\urcorner$, constituya la oración que se conyunte con $\ulcorner$no: p y no-p$\urcorner$— en un '**no**' total y absolutamente rotundo. ¿Puede decirse en el sistema de da Costa algo inaceptable por un contradictorialista que acepte, a la vez, que el mundo es contradictorio y que, no obstante, también es no contradictorio —e.e. que también es verdad, para cualquier $\ulcorner p\urcorner$: $\ulcorner$no: p y no-p$\urcorner$? No veo cómo podría decirse algo así en el sistema de da Costa, salvo utilizando el functor condicional —pues en la lógica de da Costa se tiene el entrañamiento teoremático siguiente: $\ulcorner p\wedge\sim p\wedge\sim(p\wedge\sim p)\supset q\urcorner$: el que una contradicción y su negación sucedan, ambas, a la vez entraña cualquier cosa. En virtud de la axiomática costiana, decir que la realidad es y no es contradictoria es hacer una afirmación trivializante (conducente a la delicuescencia); pero ¿cómo se dirá eso en el sistema de da Costa de manera general y no sólo con respecto a una apódosis particular, arbitrariamente tomada, $\ulcorner q\urcorner$? ¿Cómo se negará, con una negación total y sin paliativo posible, aquella tesis que se trata de rechazar? Conyuntando la negación simple de esa tesis con la negación de la conyunción entre esa tesis y la negación de la misma; así se dirá en el sistema —y ese esquema es teoremático en la lógica de da Costa: $\ulcorner\neg(p\wedge\sim p\wedge\sim(p\wedge\sim p)\urcorner$). El functor '$\neg$' quiere ser negación fuerte; pero al transcribirlo a notación primitiva no suena a fuerte, porque, una vez transcrita a notación primitiva, puede esa fórmula ser aceptada como verdadera por el contradictorialista que acepte la verdad del principio de no-contradicción. La negación '$\neg$' será fuerte en el sistema de da Costa porque así lo quieren los postulados de éste; pero carece de una lectura en lengua natural que indique que se trata de negación fuerte (y el introducir una lectura como 'es totalmente falso que' o 'no sucede en absoluto que' introduciría en el sistema costiano la noción de grados de falsedad, o de grados de negación por lo menos, noción completamente ajena a dicho sistema); por eso no tiene tal negación dizque fuerte de da Costa —tomándola al pie de la letra y con prescindencia de esos postulados— por qué parecerle negación fuerte a un contradictorialista de otra escuela, a un contradictorialista que acepte —según lo hacen el enfoque transitivista y el relevantista de Routley— que, si bien hay contradicciones verdaderas, toda contradicción es, sin embargo, falsa (o sea: toda contradicción es falsa pero hay algunas contradicciones que son, además, **verdaderas, verdaderas y falsas**).

El sistema transitivista escapa a esa dificultad, por que en él la negación fuerte dice lo que se espera que diga: que es totalmente falso aquello que, con ella, se niega; pues se obtiene esa negación prefijando a la negación simple el functor primitivo de superafirmación, ‘H’: ‘Es totalmente cierto (verdadero) que’. Sean, pues, cuales fueren los postulados que se impongan a esa negación, el sentido está claro.

Así pues, en la discusión con el pensador dignoscitivo, anticontradictorialista, o en la determinación de aquello que viene rechazado (y no meramente negado) al postularse la tesis contradictorialista de que hay contradicciones verdaderas —de que la realidad es, pues, contradictoria, con respecto a determinados estados de cosas—, el relevantista, según lo vimos en el Acápite anterior, se ve en el mayor aprieto: no puede decir nada que exprese tajantemente su rechazo de cosa alguna dicha por el anticontradictorialista, ni puede él mismo decir cosa alguna que indique o entrañe —en virtud de su propio sistema— el rechazo de otra tesis (su rechazo es indecible dentro de su teoría). Un contradictorialista costiano puede habérselas más ventajosamente con esa doble tarea: puede hacer lo uno y lo otro con su negación ‘fuerte’, pero esa negación no suena a fuerte ni lo es salvo por el *fiat* postulativo de la axiomática costiana. (Además, y para poder disponer de esa negación ‘fuerte’, el sistema de da Costa vese obligado a debilitar excesivamente la negación simple, haciendo que prácticamente no niegue, y a renunciar a la incluibilidad en el sistema de un functor de equivalencia.) Por último, el sistema transitivo tiene una genuina y rotunda negación fuerte, de manera que puede hacer exitosamente frente a la doble tarea señalada y, por añadidura, lo hace sin verse abocado a la debilidad del sistema de da Costa (en la lógica transitiva valen sin restricciones para cualquier negación ‘∼’ —sea la simple ‘N’, sea la fuerte ‘¬’— los principios de DeMorgan (⌜∼(p∧q)I.∼p∨∼q⌝ y ⌜∼(p∨q)I.∼p∧∼q⌝), de no-contradicción (⌜∼(p∧∼p)⌝) y de tercio excluso (⌜p∨∼p⌝); valiendo, además, para la negación simple el de involutividad (⌜pINNp⌝) —para la fuerte vale el sucedáneo siguiente: ⌜p≡¬¬p⌝, donde ‘≡’, que es el bicondicional y se lee ‘si y sólo si’ liga menos estrechamente que la equivalencia ‘I’, en el sentido de que vale el esquema ⌜pIq⊃.p≡q⌝ mas no el recíproco; y valiendo, por último, para la negación fuerte el silogismo disyuntivo: p∨q, ¬q ⊢ p).

Un último reparo, muy importante, que cabe oponer a la lógica de da Costa es el excesivo costo de un gran número de símbolos primitivos para una cosecha un poquillo parca. En efecto: en ese sistema no pueden por menos de introducirse como primitivos los cuatro functores ‘∼’, ‘∧’, ‘∨’ y ‘⊃’; y, sin embargo, con la problemática excepción de que el ‘∼’ de da Costa tenga una lectura diferente de la negación fuerte, definida, ‘¬’, y que ésta represente o traduzca a la negación clásica, no hay en el sistema de da Costa ningún poder expresivo adicional con respecto al de la lógica sentencial clásica, que se puede axiomatizar tomando un sólo símbolo primitivo, ‘↓’ de negación conjunta (o también a partir del único símbolo primitivo ‘/‘ de negación alternativa). Dicho de otro modo: ese paso de un único símbolo irreduciblemente primitivo a cuatro signos irreduciblemente primitivos no permite, en el caso de la lógica costiana, ningún avance en el tratamiento lógico de otras palabras que no se tenían en cuenta en la lógica clásica: no hay en la lógica costiana —ni tampoco en la relevantista, pero por lo menos en ésta el número de functores irreduciblemente primitivos es sólo dos— ninguna expresión de matiz veritativo, ningún functor del tipo ‘más o menos’, ‘bastante’, ‘un tanto’, etc. En cambio en el sistema transitivo puédense introducir definicionalmente infinidad de tales functores demostrablemente no equivalentes entre sí. El asunto no es baladí, ni se trata únicamente de una cuestión de rentabilidad (aun cuando también esta consideración es epistemológicamente legítima, habida cuenta, sobre todo, de que —según lo vamos a ver en el Acápite siguiente— un reproche que más de una vez se ha dirigido contra la lógica transitiva es su excesivo número de functores primitivos y, en general, su complejidad notablemente mayor que la de los demás sistemas de lógica sentencial construidos hasta el día de hoy). Más allá de esa cuestión de rentabilidad, asoma el problema, mucho más serio, de si la lógica que uno erige sirve para uno de los propósitos centrales —el más valioso de todos, a mi juicio— a que en principio apunta el movimiento constructor de lógicas paraconsistentes: el tratamiento de lo gradual, de lo difuso, de los conjuntos con demarcaciones gruesas o espesas. Si vamos a los clásicos del pensamiento contradictorial, veremos figurar en su pensamiento esa temática de los grados de verdad y posesión de una propiedad. Y, en nuestro tiempo, ha sido, por lo menos en lo que respecta al autor de este estudio, motivo principal para la búsqueda de un camino paraconsistente la necesidad de elaborar una lógica de lo difuso que estuviera exenta de los defectos de que adolecen los enfoques basados en las lógicas łukasiewiczianas y otras de la misma laya (como: la pérdida del principio de tercio excluso; la invencible ω-superinconsistencia de algunas extensiones conservativas de esas lógicas; el sacrificio de muchos principios útiles y —para mí— de lo más evidentes, como el de abducción, ⌜p→Np→Np⌝; el sacrificio de la parte positiva de la lógica clásica —cuando, en verdad, un tratamiento de lo difuso sólo parece deber entrar en colisión con la lógica clásica, y aun eso tan sólo bajo una lectura de ésta última, cuando están de por medio la implicación o la negación; y, sobre todo, que, con respecto a las situaciones difusas, esas lógicas nos condenan al silencio, a no poder decir ni que tienen lugar ni que no tienen lugar, ni que tienen y no tienen, ni que ni tienen ni dejan de tener —mientras que lo natural es decir todas esas cosas). Ahora bien, no parece valioso un tratamiento de lo gradual que no permita, justamente, introducir expresiones de matiz veritativo, functores de graduación múltiples y variados. Y sólo el sistema transitivo, de entre las lógicas paraconsistentes, posee tal característica.

Sin esos functores de matiz alético no valdrá gran cosa un tratamiento lógico gradualista-contradictorial de los comparativos, p.ej. (y no conozco ninguna otra lógica de los comparativos que tenga visos de plausibilidad o que comporte ventajas epistemológicas sobre el enfoque transitivista); ni se ve tampoco cómo podría articularse un convincente tratamiento contradictorial del movimiento y del cambio —a menos que entre el punto de arranque y el de llegada se postule una franja indiferenciada y sin grados a lo largo de toda la cual el cuerpo que sufre el movimiento o cambio está y, por doquier en la misma medida, no está en ambos extremos, lo cual, lejos de ser plausible, semeja una caricatura que, malévolamente, pudiera hacer del enfoque contradictorial un adepto de los añejos —yo creo que rancios— remedios aristotélicos o clasicistas.

Acápite 8º.— Otras particularidades de la lógica transitiva

Los sistemas de lógica transitiva son —según vino apuntado al final del Acápite precedente— sistemas gradualísticos, lógicas de lo difuso, entendido esto, no en un sentido de indeterminación óntica, ni como incertidumbre o indecidibilidad. Ni la reducción subjetivística de lo difuso a una relación de lo real con nuestras aptitudes cognoscitivas ni tampoco la postulación de una indeterminación óntica que vería a la realidad como asaeteada y agujereada, con huecos verivalentes correspondientes a determinados hechos —estaría vacía, por entero, de esos hechos y también de sus negaciones. (No voy a criticar aquí la confusión entre difusidad e incertidumbre, que ya he estudiado en otros lugares.) La dificultad principal que encierra la tesis de indeterminación óntica, o su versión alternativa, que es la de que hay huecos verivalentes, es que está abocada a una situación irracional de inefabilidad. Porque no puede el propugnador de semejante indeterminación, puesto en presencia de una de tales supuestas situaciones, decir que ni se da ni deja de darse, o que ni se da ella ni se da su negación. Podría decirlo únicamente si él mismo renunciara, en su propio discurso, a los principios que rigen la negación, como involutividad, o algo por lo menos que se aproxime a la involutividad, y DeMorgan; pues, de no renunciar a ello, su propia afirmación equivaldría a decir que se dan ambas situaciones, la positiva y la negativa. Claro está, el indeterminacionista alegará que, aunque frente a una situación así no hay nada que decir —ni que se da ni que no se da ni que se da ni deja de darse ni que se da y no se da—, sin embargo sí puede decirse que hay uno u otro caso así. Mas tampoco eso se defiende; porque ese 'así' ¿qué está indicando? El de casos ¿cómo? ¿Que ni se dan ni dejan de darse? Reaparecen las mismas dificultades. Así pues, tenemos un argumento transcendental en contra del indeterminacionismo: si éste es verdadero, no puede decirse esa verdad más que negando lo que quiere decirse; y aquello que se niega es —si el enunciado con el que se lo niega es verdadero en algún grado— falso, falso por lo menos hasta cierto punto. Luego, por propia confesión del indeterminacionista más las inferencias que de ella se desprenden, es por lo menos hasta cierto punto verdad que la realidad no es indeterminada; de donde resulta que la realidad es determinada, o sea: que siempre es verdadera la disyunción entre un hecho o situación cualquiera y su negación. Frente a ese erróneo enfoque indeterminacionista, en

Aj es tratado lo difuso como lo gradual, como lo que se da por grados, llegando los grados a una infinidad en ciertas propiedades difusas. Por ser esencialmente infinivalente, el sistema *Aj* no sólo no tiene ninguna semántica verifuncional característica finita, sino que no es satisfacible por ningún modelo finito; y se demuestra, en un teorema metalógico, sintáctico, que en *Aj* se aseveran, como teoremas, las verdades de infinitos hechos, demostrándose de cualesquiera dos de entre ellos que de ningún modo son equivalentes entre sí. Además, la vinculación entre contradictorialidad y gradualidad es, en *Aj*, llevada al punto de identidad: un hecho es verdadero en la medida en que no es verdadera su negación y una contradicción o antinomia es verdadera en la medida en que sean verdaderos ambos conyuntos; por lo cual cuanto más contradictorio es un enunciado —cuanto mayor es su falsedad proporcionalmente a su verdad más falsa es la antinómica conyunción entre él y su negación. Otro rasgo característico de *Aj* y demás sistemas de lógica transitiva es que en ellos se tienen dos functores condicionales diversos: el mero condicional, que tiene la propiedad del mero condicional clásico (el entrañamiento) y la implicación, que es más fuerte en el sentido de que, si p→q (si es implicado el hecho de que q por el de que p), entonces es verdad también que p⊃q (que, si p, entonces es que q, o sea: que [el hecho de que] p entraña a[l hecho de que] q); pero la implicación es más débil en otro sentido: muchos teoremas que valen para '⊃' no valen para '→' —si bien también sucede lo inverso con otros teoremas; y toda autoimplicación es tan verdadera como falsa, siendo así la autoequivalencia —que (en virtud de la idempotencia de la conyunción, o sea la validez de ⌜p∧pIp⌝, así como del hecho de que la implicación ⌜p→q⌝ equivale a ⌜p∧qIp⌝) no es sino autoimplicación— el punto de equidistancia entre verdad total y total falsedad; y cualquier autoequivalencia o autoimplicación equivale a cualquier otra, no pudiendo además una equivalencia sino ser o totalmente falsa o tan falsa como verdadera. Resumiendo alguna de las razones para articular el sistema de manera que así suceda, cabe decir que sólo de ese modo se logra que, sucediendo como sucede que hay hechos tan verdaderos como falsos, sea teoremático el principio implicacional de contraejemplo (⌜p→q→N(p∧Np)⌝), junto con el de que sea lo más verdadera posible cada autoequivalencia o autoimplicación. Otro motivo es el hacer válidos el esquema implicacional llamado **de Aristóteles** (⌜p→q→N(p→Nq)⌝) y su corolario, el **de Boecio** (⌜N(p→Np)⌝), que han sido defendidos en una corriente de la lógica heterodoxa actual afín al relevantismo —la lógica conexivista. (Sobre esos principios y sobre el conexivismo en general —al cual vino consagrada, según lo recuerda el lector, una amplia discusión en la Sección I—, vide [A1].) Una lógica con esa característica será llamada **heraclítea**; filosóficamente puede defenderse el heracliteísmo señalando que la equivalencia es una relación y que cada relación supone alteridad entre los entes relacionados, de suerte que, para que haya autoequivalencia, debe haber autoalteridad: la autoequivalencia presupone, pues, en alguna medida, su propia negación. (Cabe aquí remitir a [P12].)

De resultas de la característica anterior tenemos que la lógica transitiva es no sólo paraconsistente, sino contradictorial. Y es la única lógica hasta ahora que sea así, que contenga antinomias o contradicciones en las que sólo figuren functores y letras esquemáticas (o variables sentenciales, si el sistema es expuesto por medio de las mismas en lugar de letras esquemáticas). La divergencia entre adoptar una lógica meramente paraconsistente y adoptar una lógica contradictorial es que en el primer caso se considera que la contradicción no es forzosamente absurda, mientras que en el segundo se considera, además, que de hecho hay y tiene que haber contradicciones verdaderas.

Una tercera peculiaridad del sistema de lógica transitiva *Aj* es que contiene el functor de cuasi-aserción, 'm', que se lee 'viene a ser verdad que' tal que se tienen como esquemas teoremáticos: ⌜p→mp⌝ y ⌜p→q∧(q→mp)⊃.pIq∨.qImp∨.NpImNq⌝; el primero dice que cada hecho es a lo sumo tan verdadero o real como su venir a ser verdadero; el segundo dice que, si algo se interpone entre un hecho y el venir a ser verdadero este hecho —en el sentido de que el hecho es a lo sumo tan verdadero o real como ese algo y que ese algo es, a su vez, a lo sumo tan verdadero o real como el venir a ser verdadero el hecho—, entonces es que o ese algo es equivalente al hecho en cuestión o lo es al venir a ser verdadero dicho hecho, o, si no, la negación del hecho es el venir a ser falso el algo en cuestión. Similarmente, y abreviando 'NmN' como 'n' (que se lee 'Es superverdadero que') tenemos resultados similares, pero dualmente opuestos, con respecto a este functor 'n': ⌜np→p⌝ y ⌜np→q∧(q→p)⊃.npIq∨.qIp∨.pImq⌝. Todo ello nos revela una estructura de lo real a la que podemos llamar **pseudoatómica**, en un sentido tomado de la terminología propia del álgebra universal —que no tiene nada que ver con otras acepciones de 'atomicidad' y temas afines: un hecho ordinario está tocando —en la jerarquía ascendente que escalona los hechos por sus grados de verdad o realidad— por abajo con su umbral inferior, que es su ser superverdadero, y por arriba con su umbral superior, que es su venir a ser verdadero. Así se asegura que toda franja, toda transición o estado transitorio en el que se entrecruzan dos determinaciones o estados opuestos que se dan puros —si es que se dan— a sendos lados de la franja o transición, tiene un comienzo y un final, y así se asegura que a cada hecho le corresponde un umbral, o transición inmediata, superior, y otro umbral, o transición inmediata, inferior, o sea: que también hay una transición entre el estado previo (o posterior) a la transición y la transición misma. (Todo eso es lo que hace que a este sistema se lo denomine, por esta serie de rasgos particularmente característicos, lógica transitiva.) Por último, gracias a la existencia de este functor 'm' se tiene en *Aj* la constante sentencial 'a' (aunque puédese también —y así lo he solido hacer— presentar *Aj* de manera que 'a' sea símbolo primitivo en tanto que 'm' sea símbolo definido); y 'a' denota al grado ínfimo de verdad o realidad, a la transición o el umbral ínfimo de la realidad, por debajo del cual no hay ya nada —salvo si postulamos el pseudovalor cero, que es lo totalmente falso o irreal, postulación que es un artificio para simplificar la exposición de la teoría semántica correspondiente. Gracias al reconocimiento de ese grado ínfimo de verdad o realidad evítase que *Aj* esté afectado por un grave defecto que aqueja a los otros sistemas de lógica infinivalente: que tienen extensiones que resultan ser invenciblemente ω-superinconsistentes —o sea tales que, si se les añadiera la regla ω, resultarían delicuescentes— sin que ello sea consecuencia de un escaso poder expresivo de esas extensiones, e.e. sin que se deba a escasez de expresiones. ¡Aclaremos esto! La regla ω es la que, de un número indeterminado —y que puede ser infinito— de premisas de la forma ⌜p[x/x¹]⌝, ⌜p[x/x²]⌝, ⌜p[x/x³]⌝ … permite extraer la conclusión «Todo ente, x, es tal que p» con tal que se tenga la premisa suplementaria de que x^1, x^2, … son todas las constantes individuales de la lengua en que esté expresada la teoría. Si la regla ω es de poca utilidad práctica es por limitación de la capacidad deductiva humana —impracticabilidad de deducciones a partir de premisas en número infinito—, mas de suyo la regla tiene que ser correcta para un lenguaje suficientemente rico: si de cada ente por separado es verdad algo, ese algo no puede dejar por completo de ser verdad cuando se «ponen juntos» todos los entes por medio del cuantificador universal, ya que éste no añade ni modifica nada, sino que tan sólo aúna y junta a los entes; si, al colocarse el cuantificador, se tiene falsedad total, la falsedad tenía que estar ya ahí, en las premisas —a menos, claro, que el lenguaje de la teoría no sea lo suficientemente rico como para poder hablar de todos y de cada uno de los entes. En todo caso un sistema no debe tener ninguna barrera que le impida progresar y expandirse; y, si es ω-superinconsistente, y lo es por una razón que no sea justamente su escasez de recursos expresivos, entonces si estará sufriendo esa limitación o barrera y ya, aunque se expandiera hasta alcanzar ese poder expresivo máximo, aun así no se eliminaría la ω-superinconsistencia. Y esta última hará aparecer una falsedad total del mero poner juntas verdades en número infinito. Digamos, pues, que un sistema es invenciblemente ω-superinconsistente si toda extensión recia del mismo (toda extensión que conserve las reglas de deducción del sistema) es ω-superinconsistente. Entonces lo que hay que recalcar es que *Aj* es el único de los sistemas de lógica infinivalentes que se han construido hasta ahora que carece de extensiones recias invenciblemente ω-superinconsistentes. La ω-superinconsistencia surge de que en los cálculos infinivalentes (como los de Łukasiewicz, p.ej.) el valor de verdad que es el ínfimo del conjunto de los valores de verdad positivos —e.e. aquel valor de verdad que es el mayor de entre los que son iguales o menores que cada valor positivo— no es un valor de verdad positivo, sino que es 0. Pero al cuantificador universal débele corresponder el ínfimo del conjunto de los valores de verdad que tomen los diversos casos englobados por la afirmación universalmente cuantificada (p.ej. la cuantificación universal de 'tiene hambre', e.e. la oración 'Todo ente tiene hambre' engloba los casos 'Celedonio tiene hambre', 'la Puerta del Sol tiene hambre', 'Rockefeller tiene hambre', … etc.). Sea, entonces, una fórmula con ocurrencias libres de 'x', ⌜p⌝; y supongamos que cada ente z es tal que ⌜p[x/z]⌝ es verdad (es verdadero el resultado de reemplazar, en ⌜p⌝, las ocurrencias libres de 'x' por sendas ocurrencias libres de una expresión que nombre a z), pero que hay una escala descendente de esos resultados reemplazativos, la cual tiende a 0 sin alcanzarlo. En una lógica infinivalente usual se tendrá que el valor de verdad de «Todo ente, x, es tal que p» será 0, o sea esa oración cuantificada será totalmente falsa. Empleando nuevamente terminología algebraica se dirá que *Aj* es un sistema atómico, en el sentido de que entre la falsedad total y cualquier grado de verdad diferente del infinitesimal se interpone ese grado ínfimo, infinitesimal, de verdad o existencia; o sea: en *Aj* se reconoce un grado de verdad que, siendo positivo, es menor que los demás grados de verdad (positivos). La particularidad que acabamos de considerar de la lógica transitiva demarca a ésta más bien frente a sistemas de lógica infinivalente que puede que no sean paraconsistentes (y generalmente no lo son) que frente a sistemas paraconsistentes como el de da Costa o el relevantista. Pero es que, justamente, es marchamo de la lógica transitiva, en el campo de las lógicas paraconsistentes, su naturaleza infinivalente, no en el sentido de que las demás lógicas paraconsistentes carezcan de modelos infinivalentes característicos, sino en el de que ni han sido diseñadas para captar una infinidad de matices y grados de verdad —según lo ha sido *Aj*— ni responden a la idea intuitiva de gradualidad, ni son semánticas infinivalentes las que parecen más naturales para ellos —de hecho hasta el presente no ha sido propuesta una semántica infinivalente para ninguno de esos sistemas.

Otro rasgo peculiar de la lógica transitiva es que, además de la conyunción estándar, del mero ‘y’ (en notación simbólica ‘∧’), tiene una superconyunción ‘•’, que se lee ‘no sólo … sino (que) también’ que se diferencia de la conyunción estándar sobre todo en no ser idempotente (en general no coinciden los valores de verdad de ⌜p⌝ y de ⌜p•p⌝: es ésta una conyunción de insistencia que transforma lo dicho en algo menos verdadero, a no ser que lo dicho fuera o infinitamente verdadero o infinitamente falso) y en que la disyunción no es estrictamente distributiva sobre ella (⌜p•q∨r⌝ puede ser más verdadero que ⌜p∨r•.q∨r⌝: formule le lector instancias de estos esquemas y lo comprenderá —siendo ‘∨’ la disyunción ‘o’). Vale la pena, para justificar la introducción de tal functor en nuestro sistema de lógica, entregarse a una digresión metodológica. Los adeptos de un principio de tacañería conceptual —a tenor del cual los instrumentos conceptuales no deben multiplicarse más allá de lo más estrictamente indispensable— ponen mala cara ante esta proliferación de símbolos primitivos del cálculo sentencial, habituados como están al parco haber de la lógica clásica —e incluso de las otras lógicas paraconsistentes. Frente a ese principio, el autor de este estudio profesa otro de ahorro razonable, que podría formularse diciendo que no deben multiplicarse tales instrumentos más allá de lo que resulte conveniente para alcanzar, con el mayor rendimiento posible, una meta epistemológicamente deseable. Y, así entendida la economía conceptual, no nos lleva ésta a reducir a toda costa a un mínimo estricto el número de functores primitivos.

Con todo, es posible también que el sentido de la objeción que a menudo se dirige contra los sistemas de lógica transitiva constituya un reproche, no por el número de símbolos primitivos —que no son sino seis, en la presentación más sencilla del sistema—, sino por el carácter no estándar de tales símbolos, o sea: porque son símbolos que no suelen ser considerados en otras lógicas. El reproche es fundado en la medida en que, efectivamente, alguno de tales signos nunca antes había sido introducido —tal es el caso de ‘m’. No es en cambio exacto que la superconyunción ‘•’ constituya una radical novedad, ya que ese functor ha sido ya estudiado en otros tratamientos de la lógica de lo difuso (sólo que son tratamientos no axiomatizados y que se han cultivado en medios no pertenecientes a los círculos de lógicos profesionales, sino más bien que abarcan a ingenieros electrónicos y matemáticos con intereses más algebraicos o bien referentes a la articulación de un mero instrumental manejable en otras disciplinas que conectados con el estudio de cuestiones puramente lógicas cual son las que constituyen la temática de teoría de pruebas y teoría de modelos). Y otros functores del sistema de lógica transitiva, como ‘H’ y ‘B’ han sido incluidos en otros sistemas de lógica multivalente previamente bien conocidos. Lo que sucede es que —exceptuado justamente el enfoque transitivista— el movimiento de lógica paraconsistente ha guardado pocos contactos y ha compartido pocos intereses con el de las lógicas multivalentes, y tanto la orientación de da Costa cuanto la de Routley se han nutrido más bien con la consideración de lógicas no clásicas que de ninguna manera trataban de articular la noción de grados de verdad ni nada por el estilo.

Tras las consideraciones metodológicas que preceden, veamos ya cuáles son los servicios que presta el functor ‘•’. En primer lugar, permite, junto con la constante ‘a’, cuando ésta es primitiva, y la negación simple ‘N’, definir el functor ‘n’ así: ⌜np⌝ abrevia a ⌜Na•p⌝, definiéndose luego ‘m’ como ‘NnN’. En segundo lugar, y aun independientemente de tal uso definicional, se logra tener la equivalencia ‘npI. p•n1’ donde también se tiene el teorema ‘n1INa’. De ese modo el ser superverdadero de un hecho es la superconyunción de ese hecho con el umbral o transición inferior de la Verdad total —umbral que es n1, que por el teorema indicado resulta ser lo infinitesimalmente falso, e.e. lo menos falso de lo falso. Otro servicio que presta la superconyunción ‘•’ es el de representar en notación simbólica locuciones de la lengua natural (como ‘no sólo … sino [que] también’ y la que parece equivalente ‘así como’ o el ‘et … et’ latino, p.ej.) que no resultan obviamente reducibles, por su papel semántico, a la mera conyunción ‘y’; por lo menos cabe aducir reparos frente a semejante reducibilidad, basados en que no resulta nada evidente que la divergencia entre mero ‘y’ y el ‘no sólo … sino también’ sea estilística o pragmática y no semántica, pues, al margen de cuál sea el contexto de elocución, parece haber en ciertos casos una diferencia entre los grados de verdad de «p y q» y de «No sólo p, sino que además q», pareciendo ser el último más bajo por una reacción o interacción entre los grados de verdad respectivos de $\ulcorner p\urcorner$ y de $\ulcorner q\urcorner$, en tanto que $\ulcorner p \text{ y } q\urcorner$ toma, en cada aspecto de lo real, el grado menor de entre los que en tal aspecto tengan $\ulcorner p\urcorner$ y $\ulcorner q\urcorner$. Claro está que, cuando $\ulcorner p\urcorner$ es totalmente verdadera o totalmente falsa, $\ulcorner p\wedge q\urcorner$ equivale a $\ulcorner p\bullet q\urcorner$.

Un cometido más que cumple el functor ‘•’ es el de permitir la definición, junto con otros símbolos, de infinidad de functores que expresen otros tantos matices de verdad. Definimos $\ulcorner Xp\urcorner$ (en palabras: «Es muy cierto que p» —‘cierto’ en el sentido de ‘verdadero’, no de ‘seguro’) como abreviando $\ulcorner p\bullet p\urcorner$; evidentemente pueden y suelen diferir los valores de verdad de $\ulcorner Xp\urcorner$ y de $\ulcorner p\urcorner$ (que Salomé sea muy guapa puede ser menos verdad que el que Salomé sea guapa, a secas); junto con otros functores definidos a partir de otros símbolos primitivos podemos arrancar en una marcha sin fin de introducción de nuevos functores; p.ej., definimos $\ulcorner Pp\urcorner$ como abreviación de $\ulcorner NHN(Np\rightarrow p)\wedge p\urcorner$, significando ‘P’ lo mismo que ‘Es más bien cierto que’ (y para que $\ulcorner Pp\urcorner$ sea verdad tiene $\ulcorner p\urcorner$ que ser al menos tan verdadero como falso), con lo cual podemos definir un functor de superlativo ‘Es verdaderísimo que’ como la concatenación ‘PX’: ‘Es más bien cierto que es muy cierto que’: ‘Damián es saladísimo’ abreviará a ‘Es más bien cierto que Damián es muy salado’. Claro que hubiéramos podido introducir directamente como primitivo el functor ‘X’ con el requisito de que el valor de verdad de $\ulcorner Xp\urcorner$ sea (tomando como valores de verdad el intervalo de los hiperreales [0, 1] —donde un hiperreal es o un real estándar o bien el resultado de adicionar a, o de restar de, un real estándar el infinitésimo α, que es un infinitésimo cualquiera tomado arbitrariamente, pero, eso sí, con tal que sea el único infinitésimo que se introduzca) el cuadrado del de $\ulcorner p\urcorner$. Como ese procedimiento sería *ad hoc*, parece preferible tener un functor diádico primitivo como ‘•’ al que corresponda la multiplicación de los valores de verdad de $\ulcorner p\urcorner$ y de $\ulcorner q\urcorner$ tomados en el aludido intervalo, y que, por aplicación a dos conyuntos idénticos, dé como resultado un functor monádico definido; no se vería, si no, por qué sí se podría superconyuntar a un hecho consigo mismo para tener el ser muy verdadero de tal hecho sin que, en cambio, se pudiera superconyuntar a un hecho con otro hecho. Y, desde luego, por ese procedimiento de tomar como primitivo ‘X’ y prescindir de ‘•’ perderíanse las otras utilidades de ‘•’. Alternativamente, podemos representar a los grados de falsedad como números no negativos cualesquiera, finitos o infinitos; a dos de ellos cualesquiera, u, v, la operación • hará corresponder un número $z=u\bullet v$ tal que: 1º) si u, v, son ambos finitos y estándar, $z=u+v$; 2º) si uno de entre u, v, es infinito, z es también infinito; 3º) si ambos son finitos pero uno de ellos, p.ej. u, en vez de ser estándar, es infinitesimalmente mayor que un estándar, x, entonces z será $= n(x+v)$, donde, para cada número k finito, nk será cierto número no estándar a lo sumo infinitesimalmente mayor que k —y que no dejará de ser mayor que k cuando k sea o bien estándar o bien infinitesimalmente menor que un estándar. Todas estas nociones —que aquí expongo sin pretensiones de rigor, sino de manera sencilla y para dar una idea— pueden articularse con exactitud gracias al análisis no-estándar de Abraham Robinson (véanse referencias, así como una magníficamente clara presentación del tema, en el libro de Rosser [R2]). Con esta semántica está claro por qué el grado de verdad de $\ulcorner p\bullet q\urcorner$ es, en los más casos, inferior tanto al de $\ulcorner p\urcorner$ cuanto al de $\ulcorner q\urcorner$; por qué, pues, el grado de verdad de $\ulcorner Xp\urcorner$ es, en los más casos, inferior al de $\ulcorner p\urcorner$: es que el grado **de falsedad** de $\ulcorner Xp\urcorner$ es el **doble** del de $\ulcorner p\urcorner$ (en los casos normales), ya que la conyunción interactiva •, el insistente ‘no sólo, sino también’, da como resultado un grado de falsedad que es la suma de los grados de falsedad de los conyuntos.

Un último rasgo distintivo de *Aj* es que es un sistema tensorial y no escalar, lo que quiere decir que se tiene en él un functor monádico primitivo, ‘B’, tal que: 1º) la deducción $p \vdash Bp$ es válida sin restricciones según *Aj*, pero no vale en general el esquema «Si p, entonces Bp»; 2º) en general no vale la deducción $B(p\vee q) \vdash Bp\vee Bq$; 3º) es teoremática la implicación $\ulcorner Bp\rightarrow p\urcorner$. ‘B’ se lee ‘Es afirmable con verdad que’ o ‘Es verdad en todos los aspectos que’. La idea intuitiva aquí subyacente es que la verdad comporta no sólo grados sino también diversos aspectos; un mismo hecho puede ser más verdadero en unos aspectos de lo real que en otros; y sólo es afirmable con verdad lo que es verdadero —poco o mucho, eso sí— en todos los aspectos. Cierto es que en ocasiones normales proferimos oraciones que no consideramos verdaderas en todos los aspectos. Pero es que en tales casos —cabe al menos conjeturar plausiblemente— se trata de elipsis, debiendo, en la oración proferida, sobreentenderse un operador elíptico 'En el aspecto … de lo real' —generalmente el aspecto apuntado es lo que podríamos llamar '**el mundo de la experiencia cotidiana**'; vide [P4]. La representación semántica de ese functor puede ser o bien mediante un cúmulo de 'mundos posibles' —modelo de Kripke—, o de tablones semánticos, o finalmente una representación tensorial, tomando a cada valor de verdad tensorial como una secuencia de valores de verdad escalares, rebautizados como componentes aléticos o elementos aléticos. Tomando medidas apropiadas, ambos procedimientos son equivalentes. Sólo que el segundo refleja mejor de qué se trata en el caso que nos ocupa: un enunciado no tiene un único valor de verdad escalar, sino que, en el mundo real y en cualquier aspecto integrante del mismo, posee una infinidad —eso sí, en secuencia bien ordenada— de tales valores de verdad, constituyendo esa secuencia su valor de verdad [tensorial]. Hacemos corresponder, pues, a un aspecto de lo real, no una única función alética —una función, ϕ, tal que, para cada hecho, p, ϕ(p) sea un elemento alético—, sino una secuencia infinita de funciones aléticas. Es por consiguiente preferible adoptar una semántica así, tensorial, que tener que someter a toda una serie de reajustes las otras semánticas, utilizadas para lógicas modales. Es total el paralelismo entre 'B' y el operador de necesidad alética o verdad necesaria de una lógica modal estándar (y, más concretamente, de S5, el más fuerte sistema modal clásico de los llamados **normales**); con la diferencia de que en esos sistemas modales la regla de deducción ⌜p⌝ $\vdash$ ⌜necesariamente p⌝ no vale más que sistémicamente (no es, pues, una regla de deducción sino de inferencia de teoremas a partir de otros teoremas, lo que quiere decir que se restringe la regla con la cláusula de que la premisa debe ser un teorema del propio sistema S5), mientras que nuestra regla de deducción p $\vdash$ Bp vale sin restricción alguna, lo que significa que nada es afirmable con verdad, a secas, a no ser que sea verdadero en todos los aspectos: el único aspecto no-relativamente privilegiado de lo real es la Realidad misma, que engloba o subsume a todos sus aspectos.

De resultas de este carácter tensorial de *Aj* aparecen otras peculiaridades derivadas, como son: 1ª) el hecho de que *Aj* tiene extensiones conservativas recias que, siendo maximalmente no delicuescentes (siendo tales que, si se les añade a título de postulado un no teorema, el resultado es una teoría delicuescente), son, sin embargo, no primas, siendo prima una teoría ssi ⌜p$\vee$q⌝ —para cualesquiera ⌜p⌝ y ⌜q⌝— es un teorema únicamente en el caso de que o bien sea un teorema ⌜p⌝ o bien lo sea ⌜q⌝; 2ª) postulemos para *Aj* una semántica bivalente no verifuncional por medio de un conjunto de valorizaciones (a diferencia de las valuaciones, las valorizaciones pueden no ser verifuncionales, e.d. puede suceder que del valor de verdad de los enunciados que se tomen como atómicos no se desprenda siempre el de los enunciados moleculares) cuyo dominio de valores sea {0, 1} (el conjunto de los dos valores de verdad clásicos: lisa y llana Falsedad y lisa y llana Verdad), tomando precauciones con vistas a que todo teorema ⌜p⌝ sea tal que cada valorización v haga corresponder a ⌜p⌝ el valor funcional 1: al postular tal semántica nos toparemos con que la disyunción no sería —en esa semántica— verifuncional, e.d. que podríamos tener para una valorización v y dos fórmulas ⌜p⌝ y ⌜q⌝: v(p$\vee$q)=1 pero v(p)=0=v(q), aunque para otras fórmulas 'r' y 's' se tenga que v(r)=0=v(s)=v(r$\vee$s); en esa semántica tampoco la supernegación '¬' sería verifuncional, y en verdad los únicos operadores verifuncionales serían las dos conyunciones '$\wedge$' y '•' (pues se tendría para cada valorización v que v(p$\wedge$q)=v(p•q) y v(p$\wedge$q)=1 ssi v(p)=1=v(q); es dudoso que una semántica así, no verifuncional pero sí bivalente, ofrezca una dilucidación satisfactoria de *Aj*, mientras que ese tipo de semánticas son apropiadas para lógicas como la de da Costa y pueden diseñarse también para el fragmento de lógica relevante que no incluye el functor de entrañamiento relevante (al tratar de incluir a este functor también, la semántica perdería seguramente perspicuidad y dejaría de proporcionar tests de mecánica decidibilidad, a lo que parece). Así pues, *Aj*, entre otras cosas por su carácter tensorial, es un sistema muy reacio a un tratamiento bivalente (no verifuncional, claro) y, en ese sentido, puede considerarse como un sistema intrínsecamente infinivalente.

(Diseñar, para un sistema dado, alguna semántica no forzosamente verifuncional es muy fácil: se define una valorización v como una función que envía fórmulas del sistema sobre {0, 1} con tal que, para cada axioma $\ulcorner p \urcorner$, $v(p)=j$ y para cada regla de deducción $p^1, \dots , p^n \vdash q$, si $1=v(p^1)=v(p^2)= \dots =v(p^n)$, entonces $v(q)=1$. Pero una semántica así puede no ofrecer ninguna vía de esclarecimiento y, en la práctica, puede no hacer otra cosa que reduplicar la deducción interna de teoremas dentro del sistema con una réplica metalingüistica, semántica. Con todo no cabe prejuzgar en este punto, sino que las ventajas de una semántica de valorizaciones bivalentes deben estudiarse y sopesarse con cuidado caso por caso. Lo único que hemos constatado a este respecto es que *Aj* es más reacio a que ese planteamiento semántico se le aplique provechosamente que algunos otros sistemas de lógica paraconsistente.)

CONCLUSIÓN

A lo largo de este capítulo he tratado de mostrar: 1) que vale la pena interesarse por las lógicas paraconsistentes, pues la idea de paraconsistencia, de defendibilidad lógica, racional, de ciertas teorías contradictoriales tiene profundas raíces y aplicaciones, tanto en la filosofía cuanto en el tratamiento de diferentes problemas en un amplio abanico de disciplinas; 2) que hoy son tres las alternativas principales que se ofrecen en el campo de la lógica paraconsistente; 3) que, de esas tres, una, la lógica relevante de Routley, pese a no pocos aciertos, tiene una vocación y motivación básicas poco relacionadas con la idea de que existen contradicciones verdaderas y de que, por tanto, la negación simple, el mero 'no', no niega de la manera total que le atribuían erróneamente los adeptos de la lógica clásica y de otros enfoques superconsistentes, como la lógica intuicionista; 4) que, además, la lógica relevante comporta un grave defecto, que se resume como un abocarnos a la inefabilidad por la ausencia de negación fuerte; 5) que el enfoque de da Costa, aunque escapa a los inconvenientes del relevantista, posee desventajas serias, a saber: su negación simple es demasiado pobre y débil; su negación fuerte no es tal más que por un *fiat* estipulativo; se ve obligado a renunciar al principio de no-contradicción que, sin embargo, es, además de útil y de portador de no desdeñable evidencia, de suyo compatible con la admisión de contradicciones verdaderas; y, sobre todo, está obligado a carecer de un functor de equivalencia, con las consecuencias graves que de ahí se derivan; 6) por último, que el sistema transitivo evita todas esas dificultades y, además, posee ventajas ligadas a un enorme poder expresivo que lo capacitan, como a ningún otro sistema, para representar la complejidad y la infinita riqueza de matices tanto del lenguaje natural como de la propia realidad.

Apéndice de la Sección III.— SUCINTA PRESENTACION DE LOS SISTEMAS DE DA COSTA Y DE ROUTLEY

Las convenciones notacionales en este Apéndice son las ya de sobra conocidas por el lector.

El sistema de da Costa C_1

Utilizo aquí '~' para representar la negación «simple» de da Costa; los demás signos son los ya utilizados en este ensayo. Se toman como primitivos los signos: $\wedge$, $\supset$, $\vee$, $\sim$. Se define el signo 'S' así: $\ulcorner Sp \urcorner$ abrevia a $\ulcorner p \wedge {\sim} p \urcorner$.

Esquemas axiomáticos

C01 p⊃.q⊃p	C02 p⊃q⊃.p⊃(q⊃r)⊃.p⊃r
C03 p⊃.q⊃.p∧q	C04 p∧q⊃p
C05 p∧q⊃q	C06 p⊃r⊃.q⊃r⊃.p∨q⊃r
C07 p⊃.p∨q	C08 q⊃.p∨q
C09 ~~p⊃p	C10 p∨~p
C11 ~Sp⊃.q⊃p⊃.q⊃~p⊃~q	C12 ~Sp∧~Sq⊃.~S(p⊃q)∧~S(p∧q)∧~S(p∨q)

Regla de inferencia primitiva única: el MP: p, p⊃q ⊢ q

La semántica propuesta para ese sistema conjuntamente por da Costa y su discipulo Elías Alves es ésta: se define una valorización v como una función del conjunto de fórmulas del sistema C_1 a {0,1} (el con junto de los valores de verdad clásicos) que cumpla los requisitos siguientes:

1) Si v(p) = 0, v(~p) = 1

2) Si v(~~p) = 1, v(p) = 1

3) Si v(~Sp) = v(q⊃p) = v(q⊃~p) = 1, entonces v(q) = 0

4) v(p⊃q) = 1 ssi: o bien v(p) = 0 o bien v(q) = 1

5) v(p∧q) = 1 ssi v(p) = 1 = v(q)

6) v(p∨q) = 0 ssi v(p) = 0 = v(q)

7) Si v(~Sp) = 1 = v(~Sq), entonces v(~S(p⊃q))=1=v(~S(p∧q)=v(~S(p∨q))

Como se ve, el procedimiento a seguir para diseñar una semántica así (no verifuncional, pues, cuando v(p)=1, nada dice qué valor será v(~p), si será 1 o si será 0) consiste prácticamente en obtener un duplicado de los axiomas y reglas de inferencia por medio de reglas de igualdad de tal modo que se venga a estipular que v(p)=1 siempre que p sea un teorema, para lo cual se estipula que, si ⌜p⌝ es un axioma, v(p)=1, y vienen estipuladas además otras condiciones que garantizan que, si v(p)=1=v(p⊃q), entonces v(q)=1. Una semántica así es útil en el caso de C_1 porque permite tratar como verifuncionales a todos los functores salvo '~', y aun a éste último como cuasiverifuncional, pues está determinado que, para cualquier v y p, v(~p)=1 si v(p)=0.

Por último se dice que es válida una fórmula p de C_1 ssi cada valorización v es tal que v(p)=1. Y se demuestra que una fórmula es válida ssi es un teorema, o sea: que el sistema es robusto y completo.

El sistema relevante de Routley

Por razones prácticas uso '→' para representar el functor de *entailment* («entrañamiento fuerte» —que en verdad es más bien una implicación especial) de Routley. 'N' será la negación (este sistema contiene un solo functor de negación).

Esquemas axiomáticos

R01 p→p	R02 p→q∧(q→r)→.p→r	R03 p∧q→p
R04 p∧q→q	R05 p→q.(p→r)→.p→.q∧r	R06 p∧(q∨r)→.p∧q∨r
R07 NNp→p	R08 p→Nq→.q→Np	R09 p∨Np

Reglas de inferencia primitivas

1.— $p, p \rightarrow q \vdash q$ 2.— $p, q \vdash p \wedge q$ 3.— $p \rightarrow q$, $r \rightarrow s \vdash q \rightarrow r \rightarrow .p \rightarrow s$

Routley y Meyer, en su exposición del sistema, introducen además una constante sentencial primitiva, ‘d’, con el axioma suplementario ‘$d \wedge Nd$’ que garantiza que hay alguna contradicción verdadera. Pero, no brindando lectura alguna para esa constante, el procedimiento mismo parece *ad hoc* y carente de justificación o motivación filosófica: se postula que hay una contradicción verdadera, $d \wedge Nd$, cuya verdad es una verdad de lógica; pero no se dice cuál es esa contradicción, cómo se lee, ni por consiguiente por qué o en qué la verdad y simultáneamente falsedad de ‘d’ —quiera esa «fórmula» decir lo que quisiere— ha de ser una verdad; ni en qué o por qué ha de ser una verdad de lógica (cuando la lógica es la disciplina que estudia las verdades en las que aparecen con ocurrencias esenciales sólo ciertos signos con lecturas claras y conocidas en lengua natural).

La semántica propuesta por los citados autores para ese sistema consiste en postular un cúmulo de conjuntos de mundos posibles sobre cada uno de los cuales conjuntos se definen dos relaciones: una relación diádica de inclusión y una relación triádica < tal que $w <_w^2 w^1$ debe leerse: el mundo w precede al mundo w^1 desde la perspectiva del mundo w^2. Defínese también una operación monádica * sobre esos mundos posibles, tal que *w es el mundo «reverso» o la «imagen» de w, explicándose eso así: para cualquier ⌜p⌝, es verdad que p en w ssi no es verdad que no-p en *w. Postúlanse ciertos requisitos a los que han de atenerse esas relaciones y operaciones introducidas sin definición, o sea como primitivas. Y por último se estipula que una valuación es una función v cuyo campo de argumentos está formado por el producto cartesiano $F \times M$, siendo F el conjunto de fórmulas del sistema lógico y siendo M uno de los conjuntos de mundos-posibles postulados; siendo el contradominio o campo de valores de v {0,1} (el conjunto de los dos valores de verdad clásicos), siempre y cuando $v(w, p \wedge q)=1$ ssi $v(w, p)=1=v(w, q)$; $v(w, p \vee q)=0$ ssi $v(w, p)=0=v(w, q)$; $v(w, Np)=1$ ssi $v(*w, p)=0$; $v(w, p \rightarrow q)=1$ ssi: para cualesquiera mundos w^1, w^2 tales que $w^1 <_w w^2$, o bien $v(w^1, p)=0$ o bien $v(w^2, q)=1$.

Es válida en uno de los conjuntos de mundos posibles, M, que cumpla todos los requisitos estipulados para las relaciones y operaciones introducidas (requisitos que, en aras de la brevedad, me he abstenido de indicar aquí) una fórmula de este sistema, ⌜p⌝, siempre y cuando para cualesquiera $w \varepsilon M$ y v se tenga: $v(w, p)=1$. Es válida a secas una fórmula ⌜p⌝ ssi es válida en cada uno de esos conjuntos M. Y se demuestra que —suponiendo que existen tales conjuntos M con todas esas características y suponiendo, además, que son tantos y tan variados que sólo comparten esas características no teniendo ninguna otra en común— una fórmula es válida a secas ssi es un teorema. Pruébase así, sobre la base de los mencionados supuestos, que el sistema es robusto y completo.

ANEJO Nº 1

LISTA DE TEOREMAS
Y ESQUEMAS TEOREMÁTICOS DE *Aj* y *Aq*

A01 q∧p⊃q

A02 r∧sIp⊃(p↓qI.q↓s∨.q↓r)∧.Bp∨B¬BLp∧.Bp⊃(BpIp)∧.p⇒q⊃.Bp→Bq

A03 pIq⊃(rIqI.pIr)∧.KXpIp∧.p•q↕(p∧q)∧.Y(p•q)⊃(Yp∨Yq)∧.fSp∧fSq⊃p•q\p

A04 p∧q∨pIp∧.Hp∧HqILH(p∧q)∧.pIq⊃(Hp∨HrIH(q∨r))∧.p•1Ip∧.ƒp∧fNq⊃¬ƒN(p•mq)

A05 pINqI(NpIq)∧.pIpIN(pIp)∧.p’∧pIq⊃.q•r•sI.s•r•p∧.s•p’•r

A06 pIq⊃(q⊃p)∧.mp→mnp∨Hp∧.mp→np≡(Yp∨YNp)∧.q→np∨(pImq)∧Lp∨.p→q

A101 pIq⊃.rIqI.pIr

A102 p∧q∨pIp

A103 pIq⊃.q⊃p

A104 pIp

A105 pINqI.NpIq

A106 pINNp

A107 pIqI.qIp

A108 pIq⊃.qIp

A109 pIqI.NNqIp

A110 pIqI.pINNq

A111 pINNqI.pIq

A112 NpINqI.pIq

A113 pIqI.NpINq

A114 pIq⊃.NpINq

A115 NpINq⊃.pIq

A116 p⊃q

A117 ¬p∨p

A118 p∨pIp

A119 p∧pIp

A120 r∧sIp⊃.p↓qI.q↓s∨.q↓r

A121 p↓qI.q↓p

A122 p∧qI.q∧p

A123 p∨qI.q∨p

A124 Np∧NqI.q↓p

A124/1 p↓p↓pISp

A124/2 Np∧qI.q↓q↓p

A125 N(Np∧Nq)I.p∨q

A126 N(Np∨Nq)I.p∧q

A127 Np∧NqIN(p∨q)

A127/1 p↓qIN(p∨q)

A128 p∨qIN(Np∧Nq)

A129 Np∨NqIN(p∧q)

A130 p∧qIN(Np∨Nq)

A131 p∨q∧pIp

A132 q∧p∨pIp

A133 p∨(p∧q)Ip

A134 p∨(p∧q)Ip

A135 q∨p∧pIp

A136 $p\land(p\lor q)Ip$

A137 $p\land(q\lor p)Ip$

A138 $p\lor q\land rI.r\land p\lor.r\land q$

A139 $p\land q\lor rI.r\lor p\land.r\lor q$

A140 $p\land(q\lor r)I.p\land q\lor.p\land r$

A141 $p\lor(q\land r)I.p\lor q\land.p\lor r$

A142 $p\land q\lor rI.p\lor r\land.q\lor r$

A143 $p\lor q\land rI.p\land r\lor.q\land r$

A144 $p\land q\land pI.p\land q$

A145 $p\land q\land qI.p\land q$

A146 $p\lor q\lor pI.p\lor q$

A147 $p\lor q\lor qI.p\lor q$

A148 $p\lor q\lor rI.p\lor r\lor q$

A149 $p\lor q\lor rI.p\lor.q\lor r$

A149/1 $p\land q\land rI.p\land.q\land r$

A149/2 $p\lor(q\lor r)I.p\lor q\lor r$

A150 $Hp\land HqILH(p\land q)$

A150/1 $pIq\supset.Hp\lor HrIH(q\lor r)$

A150/2 $Hp\lor HqIH(p\lor q)$

A150/3 $H(p\lor p)IHp$

A150/4 $H(p\land p)IHp$

A150/5 $HpILHp$

A150/6 $Hp\land HqIH(p\land q)$

A150/7 $\neg p\land\neg qI\neg(p\lor q)$

A150/8 $\neg p\lor\neg qI\neg(p\land q)$

A150/9 $p\supset.q\supset.p\land q$

A150/10 $p\supset(q\land r)I.p\supset q\land.p\supset r$

A150/11 $p\land 1Ip$

A150/12 $0IN1$

A150/13 $p\lor 0Ip$

A150/14 $p\land 0I0$

A150/15 $p\lor 1I1$

A150/16 $0\rightarrow p$

A150/17 $p\rightarrow 1$

A151 $LpIHLp$

A151/1 $N\neg pI\neg\neg p$

A152 $LpI\neg\neg p$

A153 $\neg p\supset.p\rightarrow q$

A154 $\neg(p\land\neg p)$

A155 $p\land\neg p\rightarrow q$

A156 $p\land\neg pI0$

A156/1 $Np\land HpI0$

A156/2 $Hp{\downarrow}Hp{\downarrow}pI0$

A157 $\neg 0$

A158 $H1$

A158/2 $HpI\neg Np$

A159 $qIp\supset.r\lor pI.q\lor r$

A159/1 $pIq\supset.p\lor rI.q\lor r$

A159/2 $pIq\supset.r\lor pI.r\lor q$

A159/3 $qIp\supset.q\lor r\lor sI.p\lor.r\lor s$

A159/4 $pIq\supset.p\land rI.q\land r$

A159/5 $pIq\supset.r\land pI.r\land q$

A160 $pIq\supset.HpIHq$

A160/1 $pIq\supset.r\supset pI.r\supset q$

A161 $p\land q\supset q$

A162 $p\supset.p\lor q$

A163 $\neg p\lor p\lor q$

A163/1 $p\supset q\lor p$

A164 $p\supset.q\supset p$

A165 $p\supset(p\supset q)I.p\supset q$

A165/1 $p\supset q\supset.p\supset.p\supset q$

A165/2 $p\supset(p\supset q)\supset.p\supset q$

A166 $p\supset(q\supset r)I.q\supset.p\supset r$

A167 $p\supset(q\supset r)\supset.q\supset.p\supset r$

A167/1 $p\supset q\supset.p\supset.r\supset q$

A167/2 $p\supset q\supset.p\supset.r\supset.s\supset q$

A167/3 $p\supset q\supset.p\supset.p'\supset.r\supset.s\supset q$

A168 $p\land q\supset rI.p\supset r\lor.q\supset r$

A169 $p\lor q\supset rI.p\supset r\land.q\supset r$

A170 $p\supset q\lor.q\supset r$

A171 $p\supset(q\vee r)I.p\supset q\vee.p\supset r$

A171/1 $p\supset q\vee.p\supset\neg q$

A172 $p\supset q\supset.q\supset r\supset.p\supset r$

A173 $p\supset q\supset.r\supset p\supset.r\supset q$

A174 $p\supset.q\supset r\supset.q\supset.r\wedge p$

A175 $p\supset(q\supset r)\supset.p\supset q\supset.p\supset r$

A176 $q\supset(p\supset r)\supset.p\supset q\supset.p\supset r$

A177 $p\wedge q\supset rI.p\supset.q\supset r$

A177/1 $p\wedge q\supset r\supset.p\supset.q\supset r$

A177/2 $p\supset(q\supset r)\supset.p\wedge q\supset r$

A177/3 $p\supset q\wedge(q\supset r)\supset.q\supset r$

A178 $p\supset(q\supset r)I.p\supset r\vee.q\supset r$

A179 $p\wedge q\supset r\supset.p\supset q\supset.p\supset r$

A180 $r\supset s\supset.p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.q\supset s$

A181 $r\supset s\supset.p\supset(q\supset.q^1\supset r)\supset.p\supset.q\supset.q^1\supset s$

A182 $r\supset s\supset.p\supset(q\supset.q^1\supset.q^2\supset r)\supset.p\supset.q\supset.q^1\supset.q^2\supset r$

A183 $r\supset s\supset.p\supset(p\supset q^1\supset.q^2\supset.q^3r)\supset.p\supset.q\supset.q^1\supset.q^2\supset.q^3\supset.s$

A184 $p\supset q\supset.p\wedge r\supset q$

A185 $p\supset q\supset.r\wedge p\supset q$

A186 $p\supset q\supset.p\supset r\supset.p\supset.p\supset.q\wedge r$

A187 $p\supset q\supset.p\supset.p\wedge q$

A188 $p\supset q\supset.p\wedge r\supset.q\wedge r$

A189 $p\supset.\neg p\supset q$

A190 $\neg p\supset.p\supset q$

A191 $p\wedge\neg p\supset q$

A192 $p\supset q\supset.\neg q\supset\neg p$

A193 $p\supset.q\vee p$

A194 $p\supset Lp$

A195 $p\supset q\supset.r\wedge p\supset.r\wedge q$

A196 $p\supset q\supset.p\vee r\supset.q\vee r$

A197 $p\supset q\supset.r\vee p\supset.r\vee q$

A198 $p\vee q\supset.r\supset.r\wedge p\vee.r\wedge q$

A199 $p\supset q\supset.r\supset s\supset.p\wedge r\supset.q\wedge s$

A199/1 $p\supset q\wedge(r\supset s)\supset.p\wedge r\supset.q\wedge s$

A199/2 $p\supset(q\supset r)\supset.p\supset.s\supset q\supset.s\supset r$

A200 $Lp\supset p$

A201 $r\supset s\supset.p\supset(s\supset q)\supset.p\supset.r\supset q$

A202 $p\supset\neg q\supset.q\supset\neg p$

A203 $p\supset(q\wedge r)\supset.p\supset q$

A204 $p\supset(q\wedge r)\supset.p\supset r$

A205 $p\supset(p\wedge q)\supset.p\supset q$

A206 $p\supset(q\wedge p)\supset.p\supset q$

A207 $p\vee q\wedge\neg q\supset p$

A208 $p\supset(q\vee r)\supset.\neg(p\wedge r)\supset.p\supset q$

A209 $p\supset(q\vee r)\supset.r\supset\neg p\supset.p\supset q$

A210 $p\wedge q\supset r\supset.p^1\supset p\wedge(q^1\supset q)\supset.p^1\wedge q^1\supset r$

A211 $p\supset.p\supset q\supset q$

A212 $p\supset\neg pI\neg p$

A213 $q\supset p\supset(p\supset q\supset p)\supset.p\supset q\supset.q\supset p\supset q$

A214 $\neg q\supset.p\supset q\supset\neg p$

A215 $\neg(p\supset q)\supset.p\wedge\neg q$

A216 $p\supset q\supset p\supset p$

A217 $Hp\vee Np$

A218 $p\rightarrow q\supset.p\supset q$

A219 $p\supset 0I\neg p$

A220 $pIq\supset.rIr^1$ (siendo ⌜r^1⌝ el resultado de reemplazar en ⌜r⌝ n ocurrencias de ⌜p⌝ por n ocurrencias respectivas de ⌜q⌝ y no estando afectadas esas ocurrencias por functores diversos de '↓', 'H', 'I' o los definidos a partir de ellos)

A221 $p\vee q\wedge(p\supset r\wedge.q\supset s)\supset.r\vee s$

A221/2 $p\vee q\wedge(p\supset s\wedge.q\supset s)\supset s$

A221/3 $p\vee q\wedge(p\supset r)\supset.r\vee q$

A221/4 $p\vee q\wedge(q\supset r)\supset.p\vee r$

A221/5 $p\supset r\supset.q\supset s\supset.p\vee q\supset.r\vee s$

A222 $p\supset q\supset.q\supset p\supset.p\equiv q$

A223 $pIq\wedge(qIr)\supset.pIr$

A224 $pIq\wedge(pIr)\supset.qIr$

A225 $p\rightarrow q\wedge(q\rightarrow p)\supset.pIq$

A226 $pIq\supset.p\rightarrow q\wedge.q\rightarrow p$

A227	p→q∧(q→p)≡.pIq
A228	p→q≡.p∨qIq
A229	p→q≡.Nq→Np
A230	¬p⊃.q→Np
A231	p∧¬pI.q∧¬q
A232	p∧¬p∧qI0
A233	p∧¬p∨qIq
A233/1	¬p∨q∧pI.p∧q
A233/2	p∨q∧¬pI.¬p∧q
A233/3	p∧q⊃r⊃.p∧¬r⊃¬q
A234	p⊃.¬p→q
A235	p⊃.¬pI0
A236	¬p⊃.pI0
A236/1	p⊃.p⊃qIq
A237	p⊃.p⊃pIp
A238	p∨q⊃.¬p⊃q
A239	pIp^1∧(rIr^1)⊃.qIs (si ⌜s⌝ no difiere de ⌜q⌝ más que por el reemplazamiento de n ocurrencias de ⌜p⌝ en ⌜q⌝ por ocurrencias respectivas de ⌜p⌝, y/o de m ocurrencias de ⌜r⌝ en ⌜q⌝ por ocurrencias respectivas de ⌜r^1⌝, siempre y cuando tales ocurrencias de ⌜p⌝ y de ⌜r⌝ estén afectadas sólo por functores definidos a partir de '↓', 'H' y/o 'I')
A240	pIp^1∨(rIr^1)⊃.qIs∨.qIs^1 (si ⌜s⌝ es el resultado de reemplazar en ⌜q⌝ n ocurrencias de ⌜p⌝ por ocurrencias respectivas de ⌜p^1⌝; y ⌜s^1⌝ es el resultado de reemplazar en ⌜q⌝ m ocurrencias de ⌜r⌝ por ocurrencias respectivas de ⌜r^1⌝, cumpliéndose la misma restricción sobre los símbolos)
A241	q⊃.pIr⊃q^1 (si ⌜q^1⌝ es el resultado de reemplazar en ⌜q⌝ n ocurrencias de ⌜p⌝ por ocurrencias respectivas de ⌜r⌝ —con la misma salvedad)
A242	q⊃.pIp^1∧(rIr^1)⊃s (si ⌜q⌝ y ⌜s⌝ son como en A239)
A243	q⊃.pIp^1∨(rIr^1)⊃.s∨s^1 (si ⌜s⌝ y ⌜s^1⌝ son como en A240)
A251	¬pINLp
A252	HpINLNp
A253	HHpIHp
A253/1	H¬pI¬p
A254	LHpIHp
A254/1	¬pIL¬p
A255	LpINHNp
A256	LLpILp
A257	L(p∨q)I.Lp∨Lq
A258	L(p∧q)I.LpLq
A259	p&qI.Lp∧Lq
A260	p⊃qIN(Lp∧Nq)
A260/1	p⊃qIN(p&Nq)
A261	p⊃qI.LpZq
A262	p→Lp
A263	Hp→p
A264	¬p→Np
A265	Np∨p
A266	N(p∧Np)
A267	Hp⊃.pI1
A268	pI1≡Hp
A268/1	pI0≡¬p
A269	Hp⊃.HpIp
A270	NHpI¬Hp
A271	NLpI¬Lp
A272	¬¬¬pI¬p
A273	¬pI¬Lp
A273/1	p⊃qI.Lp⊃q
A273/2	p⊃Np⊃Np
A274	Hp⊃.pZq⊃q
A274/1	Hp⊃.pZqIq
A275	p∧q→.p&q
A276	p&q⊃.p∧q
A277	p&q&rI.p&.q&r
A278	p⊃.LpI1
A279	p⊃.p&qIq

A280 p&pIp
A281 1
A282 LpI1≡p
A283 H1I1
A284 L1I1
A285 ¬1I0
A286 ¬0I1
A287 L0I0
A288 H0I0
A289 H(¬p∨Lp)
A290 H(Np∨Lp)
A291 ¬p∨LpI1
A292 Np∨LpI1
A293 Hp⊃H(p∨q)
A294 H(¬p∨Lp∨q)
A295 H(Np∨Lp∨q)
A296 ¬p∨Lp∨qI1
A297 Np∨Lp∨qI1
A298 ¬p∨Lp∨q∧rIr
A299 Np∨Lp∨q∧rIr
A300 p≡1Ip
A301 HpI1∨.HpI0
A302 LpI1∨LpI0
A302/1 HHp∨¬Hp
A302/2 HLp∨¬Lp
A302/3 H¬p∨¬¬p
A303 LpI1≡Lp
A304 ¬(1⊃0)
A305 ¬(1I0)
A306 1I0I0
A307 p∧qI1≡.pI1∧.qI1
A308 pI1∨(qI1)≡.p∨qI1
A309 p∧qI0≡.pI0∨.qI0
A310 p∨qI0≡.pI0∧.qI0
A311 p⊃q≡.¬q⊃¬p
A312 p≡qI.q≡p
A313 p≡q⊃.q≡r⊃.p≡r
A313/1 p≡q∧(q≡r)⊃.p≡r
A314 p≡p
A315 p≡q⊃.p∧r≡.q∧r
A316 p≡q⊃.p∨r≡.q∨r
A317 p≡q∧(r≡s)⊃.p∧r≡.q∧s
A318 p≡q∧(r≡s)⊃.p∨r≡.q∨s
A319 p≡q⊃.q≡r≡.p≡r
A320 p≡qI.p∧q∨¬(p∨q)
A321 p≡qI.p∨q⊃.p∧q
A322 p≡Lp
A323 p≡¬¬p
A324 p≡q≡.¬p≡¬q
A325 ¬(p⊃q)≡.p∧¬q
A326 pIq⊃.p≡q
A327 ¬(p≡q)≡.p∧¬q∨.q∧¬p
A328 p≡q∨.q≡r∨.p≡r
A329 ¬(p≡q∨.q≡r)⊃.p≡r
A330 p≡q≡.q≡r≡.p≡r
A331 p≡q≡.p⊃q∧.¬p⊃¬q
A332 p≡¬q≡.¬p≡q
A333 p∧q⊃.p≡q
A334 ¬p∧¬q⊃.p≡q
A335 ¬p∧q∧¬r⊃.p≡.q≡r
A336 p∧q∧r⊃.p≡.q≡r
A337 p∧¬q∧¬r⊃.p≡.q≡r
A338 p≡q≡r≡.p≡.q≡r
A339 p≡q⊃.p⊃r≡.q⊃r
A340 p≡q⊃.r⊃p≡.r⊃q
A341 p≡q≡.LpILq
A342 p≡q≡.¬pI¬q
A343 p≡q⊃.p&rI.q&r
A344 p≡q⊃.r&p≡.r&q
A345 p⊃.p∧q≡q

A346 p⊃q≡.p≡.p∧q
A347 p⊃q≡.p∨q≡q
A348 p∧q≡q∧(p∧q≡p)≡.p≡q
A349 p≡q≡.p∧q≡.p∨q
A350 p∧q≡.p&q
A351 p≡¬q≡.¬p≡q
A352 p∧Lq≡.p&q
A353 p∨Lq≡.Lp∨q
A354 ¬(p≡¬p)
A355 H(p∧q)∨¬(p∨q)≡H(p≡q)
A356 Hp∨¬p≡H(p≡p)
A357 p≡pIp≡p
A358 1≡pIp
A359 N(p≡q)I.p∨q&N(p∧q)
A360 N(p≡Np)
A361 Hq∨¬q⊃.p⊃q≡.p→q
A362 $p^1q\to.p\wedge q$
A363 q→r⊃.p→q⊃.p→r
A364 p→qI.Nq→Np
A365 p→NqI.q→Np
A366 Np→qI.Nq→p
A367 p•q→p∧.p•q→q
A368 p→q∨.q→np∨.pImq
A369 p→q∨.q→p
A370 pIpIN(pIp)
A371 ½IN½
A372 pIpI½
A373 pIpI.qIq
A374 pIq⊃.pIqI.pIp
A375 pIq⊃.pIqI.rIr
A376 pIq⊃.pIqI½
A377 p∨qIp∨.p∨qIq
A377/1 p∨q→p∨.p∨q→q
A377/2 p→(p∧q)∨.q→.p∧q
A378 pIq⊃.pIqIN(pIq)
A379 p→q≡.p⊃.p→q
A380 pIqI0∨.pIqI½
A381 pIq∧(rIs)⊃.pIqI.rIs
A382 pIq⊃(rIs)≡.pIq→.rIs
A383 $pIq\wedge(rIs)\supset(p^1Iq^1\wedge.r^1Is^1)\equiv.pIq\wedge(rIs)\to.p^1Iq^1\wedge.r^1Is^1$
A384 p→q→.q→r→.p→r
A385 p→q→.r→p∧→.r→q
A386 p→q∧.(q→r)→.p→r
A387 p→NpI.p→½
A388 Np→pI.½→p
A389 p→Np→Np
A389/1 p→N(p→Np)
A389/2 p→q→N(p→Nq)
A389/3 p→q→N(q→Np)
A389/4 p→q→N(Np→q)
A389/5 N(p→Np)
A390 Np→p→p
A391 N(pIq)→.pIp
A391/1 p→q→N(q→p)
A392 ½→p∨.½→Np
A393 pIq→r∨.pIq→Nr
A394 p→(q∨r)I.p→q∨.p→r
A395 p→(q∧r)I.p→q∧.p→r
A396 p∧q→rI.p→r∨.q→r
A397 p∨q→rI.p→r∧.q→r
A398 $pIq\to(q^1Ir\to.sIp^1)\to.q^1Ir\to.pIq\to.sIp^1$
A399 p→(q→r)→.p→q→.p→r
A400 p→q→.p→(q→r)→.p→r
A401 r→s→.p→(q→r)→.p→.q→s
A402 p→q→.Np∨q
A403 p→q→N(p∧Nq)
A404 pIq→N(r∧Nr)
A404/1 p→q→.p→Nq→Np
A405 r∧Nr→N(pIq)

A406	p→q→.p∧r→q
A407	p→q→.p∧r→.q∧r
A408	p→q→.r∧.p→.r∧q
A409	p→q→.p∨r→.q∨r
A410	p→q→.r∨p→.r∨q
A411	p→q→.p→.q∨r
A412	p→qI.p→.p∧q
A413	p→(q∧r)→.p→q
A414	p→q∧(r→s)→.p∧r→.q∧s
A415	p→q∧(r→s)→.p∨r→.q∨s
A416	p→q→.¬q→¬p
A417	p∧q→r→.p∧¬r→¬q
A418	p→q∧p→q
A419	p→(q→r)→.p∧q→r
A420	p→(p→q)→.p→q
A420/1	pIq→.rIs→.pIq
A421	p∧qI(p∨q)I.pIq
A422	p∧qI(p∧r)∧(p∨qI.p∨r)I.qIr
A423	p→q→.p→Lq
A424	Hp→qI.Hp→Hq
A425	p→q→.Hp→Hq
A426	q∨rIp→.q→p∧.r→p
A427	q∨rIp→.pIq∨.pIr
A428	q∧rIp→.pIq∨.pIr
A429	q→(p⊃r)→.p∧q→r
A430	p⊃.p→q→q
A431	¬p⊃.q→p→¬q
A432	p⊃(q→r)⊃.p∧q→r
A432/1	p→.q⊃p
A433	p⊃(q→r)⊃.p→q→.p→r
A434	p\qI.p→q∧¬(pIq)
A435	¬(p\p)
A436	p\q→¬(q\p)
A437	p\q∧(q\r)→.p\r
A438	p\q∨.q\p∨.pIq
A439	p\qI0∨.p\qI½
A440	p→qI.pIq∨.p\q
A441	p\q≡¬(q→p)
A441/1	p\q∨.q→p
A448	p\(q∧r)I.p\q∧.p\r
A449	p∨q\rI.p\r∧.q\r
A450	p∧q\rI.p\r∨.q\r
A451	p\(q∨r)I.p\q∨.p\r
A452	q→r→.p\q→.p\r
A453	p\q→.q→r→.p\r
A454	p\q→.p\.q∨r
A455	p→q→.q\r→.p\r
A456	p\q→.p∧r\q
A457	p\q→.p\.p∨q
A458	p\q→.p∧q\q
A459	¬(pIq)≡.p\q∨.q\p
A460	p\qI.Nq\Np
A461	p\q→.p∧qIp
A462	p\q→.p∨qIq
A463	p\q⊃q
A464	p\q⊃Np
A465	Np\q⊃p
A466	0\p≡p
A467	Np\1≡p
A468	p\1≡Np
A469	¬(p\0)
A470	¬(1\p)
A471	½\1∧.0\½
A482	PpI.p∧L(Np→p)
A483	Pp∨PNp
A484	Pp→p
A485	¬p→¬Pp
A486	Pp⊃.pIPp
A487	PpIp∨.PpI0
A488	¬p⊃.PpIp

A489 Hp→Pp
A490 p→PLp
A491 HpIHPp
A492 HpIPHp
A493 PpIp≡.Pp∨¬p
A494 PpIPPp
A495 pINp≡.Pp∧PNp
A496 pINpI.pI½
A497 Pp∧PNpI.pI½
A498 pINpI.Pp∧PNp
A499 P(pIp)∧PN(pIp)
A500 P½∧PN½
A501 pIqIP(pIq)
A502 p\qIP(p\q)
A503 Pp\p≡.¬¬p∧p
A504 PN(pIq)
A505 Np→p≡Pp
A506 p→Np≡PNp
A507 Pp≡.pINp∨.Np\p
A508 PNp≡.pINp∨.p\Np
A509 p\NpI.p\½
A510 Np\pI.½\p
A511 ½\p≡Pp
A512 p→½≡PNp
A513 ½\p≡¬PNp
A514 p\Np≡¬Pp
A515 p\½≡¬Pp
A516 Np\p≡¬PNp
A517 Np→p→Pp
A518 p→Np→PNp
A519 Pp⊃.p→q→Pq
A520 p→q→.Pp→Pq
A520/1 p\q→.Pp→Pq
A520/2 Pp⊃.p\q→Pp
A520/3 Pp∧¬Pq⊃.q\p
A520/4 Pp∧PNq⊃.q→p
A521 Pp∧PqIP(p∧q)
A522 Pp∨PqIP(p∨q)
A523 P(p∨Np)
A524 PN(p∧Np)
A525 PNp→NPp
A526 Pp→NPNp
A527 PN(p∧PNp)
A528 PN(Pp∧Np)
A529 P(Pp∨Np)
A530 P(PNp∨p)
A531 PN(p∧NPp)
A532 NP(p∧Np)
A533 NP(Pp∧Np)
A534 NP(p∧PNp)
A535 P(p∧Np)I.pINp
A536 P(p∧Np∧q∧Nq)→.pIq
A537 pINp∨¬Pp∨¬PNp
A538 P(p⊃q)I.p⊃Pq
A539 Pp→P(p∨q)
A540 PNp→PN(p∧q)
A541 P(p∧q)→Pp
A542 ¬PNp∧pI℘p
A543 Np\p&pI℘p
A544 ℘p≡¬PNp
A544/1 ℘Np≡¬Pp
A545 ℘p→¬PNp
A546 Np\p≡℘p
A546/1 ¬℘p≡.p→Np
A547 ½\p≡℘p
A547/1 ¬℘p≡.p→½
A548 ℘p⊃.℘pIp
A549 ℘p→p
A550 ℘℘pI℘p
A551 ½\p→℘p

A552	Np\p→℘p
A553	℘p⊃.p→q→℘q
A554	p→q→.℘p→℘q
A555	℘p∨℘qI℘(p∨q)
A556	℘p∧℘qI℘(p∧q)
A557	p\Np&NpI℘Np
A558	½\p&pI℘p
A559	HpIH℘p
A559/1	Hp→℘p
A560	HpI℘Hp
A561	℘p→Pp
A561/1	℘p⊃.℘pIPp
A562	℘PpI℘p
A563	P℘pI℘p
A564	℘p∨PNp
A565	PpI.℘p∨PSp
A566	℘p∨℘Np∨PSp
A567	Pp⊃.p\q→℘p
A568	p\q→.Pp→℘q
A569	p\q→.℘p→℘q
A570	pQqI.¬Pp∨Pp
A571	pQq∧(qQp)I.p∨qQ.p∧q
A572	Pp⊃.pQq⊃Pq
A573	℘Np⊃.pQq
A574	pQq⊃.qQr⊃.pQr
A575	Pq⊃.pQq
A576	pQq∨.qQr
A577	pQ(pQr)I.qQ.pQr
A578	pQq∧(qQp)I.P(p∧q)∨¬P(p∨q)
A579	pMqI.P(p∧q)∨¬P(p∨q)
A580	pMqI.p∨qQ.p∧q
A581	pMq≡.pQq∧.℘Np⊃℘Nq
A582	pQq⊃.℘Nq⊃℘Np
A583	pQp
A584	pQ(qQr)I.p∧qQr
A585	p∧qQrI.pQr∨.qQr
A586	p∨qQrI.pQr∧.qQr
A587	pQ(q∧r)I.pQq∧.pQr
A588	pQ(q∨r)I.pQq∨.pQr
A589	pQ(qQr)⊃.pQq⊃.pQr
A590	pQ.pQqQq
A591	qQ.pQq
A592	rQs⊃.pQ(qQr)⊃.pQ.qQs
A593	Pp⊃(qQr)I.pQ.qQr
A594	PpQqI.pQq
A595	pQPqI.pQq
A596	P(pQq)I.pQq
A597	pQq⊃(rQs)I.pQqQ.rQs
A598	pQq⊃.rQs⊃.p∨rQ.q∨s
A599	pQq⊃.NpQrQ.q∨r
A600	pQq⊃.p∨rQ.q∨r
A601	pQq⊃.p∧rQ.q∧r
A602	pQq∧(rQs)⊃.p∧rQ.q∧s
A603	pQq∧(rQs)⊃.p∨rQ.q∨s
A604	pMq∧(qMr)⊃.pMr
A605	P(pMq)I.pMq
A606	pQq∧pQq
A607	sQp⊃.pQ(rQq)⊃.sQ(rQq)
A608	pQqQpQp
A609	pQq∨Pp
A610	pQq∨℘Nq
A611	p∨NpQqQq
A612	pQq∨.pQNq
A613	pQNpQNp
A614	NpQpQp
A615	pQ.qIq
A616	qQp≡.p∨qMp
A617	p∧qMp≡.pQq
A618	1MpIPp
A619	½Mp≡Pp

A620	½MpMp
A621	SpISNp
A622	SSpISp
A623	Sp→NSq
A624	NSpI.p∨Np
A625	Sp→½
A626	S1I0
A627	S0I0
A628	¬SpI.Hp∨¬p
A629	¬SpIH(p∨Np)
A630	¬SpI¬(p∧Np)
A631	¬SHp
A632	¬S¬p
A633	¬SLp
A634	PNSp
A635	¬℘Sp
A636	Sp→p∧.Sp→Np
A637	SpIp≡PNp
A638	SpINp≡Pp
A639	Sp\p≡℘p
A640	p\NSp≡℘Np
A641	p→Sp≡PNp
A642	Np→Sp≡Pp
A643	p→SpI.pISp
A644	pISp∨.Sp\p
A645	NpISp∨.p\NSp
A646	SpIp→PNp
A647	Sp\p→℘p
A648	SpINp→Pp
A649	p\NSp→℘Np
A650	pINpIPSp
A651	℘p∨℘NpI℘NSp
A652	PS½
A653	S½I½
A654	S½INS½
A655	S½
A656	½∧N½
A657	pIp∧N(pIp)
A658	PS(pIp)
A659	S½∧NS½
A660	S(pIp)∧NS(pIp)
A661	p∧q⊃.p•q
A661/1	p•q≡.p∧q
A661/2	p^1∧pIq⊃.q•r•sI.s•r•p∧.s•p^1•r
A661/3	qIp⊃.q•r•sI.s•r•p∧.s•p•r
A661/4	pIq⊃.p•r•sI.s•r•q∧.s•p•r
A661/5	p•r•sI.s•r•p∧.s•p•r
A661/6	pIq⊃.q•r•s→.s•p•r
A661/7	p•q•r→.q•r•p
A661/8	p•q•r→.p•r•q
A662	pIq⊃.s•p•r→.s•r•q
A663	p•q•rI.q•p•r
A664	p•q•rI.q•r•p
A665	p•q•rI.r•p•q
A666	p•1Ip
A667	1•pIp
A668	p•q•rI.p•r•q
A668/1	p•q•rI.r•q•p
A668/2	p∧q•rI.r•p∧.r•q
A668/3	p∧p•qI.q•p
A669	p•1•qI.p•q
A670	pIq→.r•pI.r•q
A671	pIq→.p•rI.q•r
A672	p•qI.q•p
A673	p•q•rI.p•.q•r
A674	p→q→.p•r→.q•r
A675	p→q→.r•p→.r•q
A676	p→q∧(r→s)→.p•r→.q•s
A677	p•0I0
A678	0•pI0

A679 Hp∨¬p⊃.p•qI.p∧q
A680 ¬Sp⊃.p•qI.p∧q
A681 ¬Sp⊃.q•pI.q∧p
A682 p•(q∧r)I.p•q∧.p•r
A683 p•(q∨r)I.p•q∨.p•r
A684 p•¬pI0
A685 Hp•qI.Hp∧q
A686 ¬p•qI.¬p∧q
A687 pIq∧(rIs)→.p•rI.q•s
A688 P(p•q)→.Pp•Pq
A688/1 ℘(p•q)→.℘p•℘q
A689 H(p•q)I.Hp•Hq
A690 ¬p•¬qI¬(p∨q)
A690/1 ¬(p•q)I.¬p∨¬q
A691 L(p•q)I.Lp∧Lq
A692 Lp•qI.p&q
A693 p•q∧r≡.p∧r•.q∧r
A694 p•q∨r≡.p∨r•.q∨r
A695 Xp→p
A696 p⊃Xp
A697 Xp≡p
A698 XNp→NXp
A699 X1I1
A700 X0I0
A701 Hp∨¬p⊃.XpIp
A702 XXp→p
A703 XHpIHp
A704 HXpIHp
A705 X¬pI¬p
A706 ¬XpI¬p
A707 LXpILp
A708 XLpILp
A709 Sp≡SXp
A710 XSp≡SXp
A711 Xp→NXNp
A712 p→NXNp
A713 p→q→.Xp→Xq
A714 Xp→Xq→.Xp→q
A715 Xp→q→.Xp→NXNq
A716 pIq→.XpIXq
A717 Xp\Xq→.p\q
A718 X(p∧q)I.Xp∧Xq
A719 Xp∨XqIX(p∨q)
A720 PXp→XPp
A721 ℘Xp→X℘p
A722 Xp•XqIX(p•q)
A723 X(p⊃q)I.p⊃Xq
A724 p→Kp
A725 Kp≡p
A726 KNpINXp
A727 NKpIXNp
A728 XpINKNp
A729 Xp→Kp
A730 NKp→KNp
A731 K1I1
A732 K0I0
A733 Hp∨¬p⊃.KpIp
A734 KHpIHp
A735 HKpIHp
A736 K¬pI¬p
A737 ¬KpI¬p
A738 LKpILp
A739 KLpILp
A740 Sp≡SKp
A741 KSp≡SKp
A742 p→q→.Kp→Kq
A743 pIq→.KpIKq
A744 Kp\Kq→.p\q
A745 Kp∧KqIK(p∧q)
A746 Kp∨KqIK(p∨q)

A747	KPp→PKp
A748	K℘p→℘Kp
A749	K(p⊃q)I.p⊃Kq
A750	K(p&q)I.p&Kq
A751	K(pZq)I.XpZKq
A752	X(pZq)I.KpZXq
A752/1	KXpIp
A752/2	XKpIp
A752/3	KXpIXKp
A752/4	X(Kp•Kq)I.p•q
A752/5	Kp•KqIK(p•q)
A752/6	K(Xp•Xq)I.p•q
A752/7	KKXXpIp
A752/8	XXKKpIp
A752/9	Kp•qIK(p•Xq)
A752/10	Xp•qIX(p•Kq)
A752/11	Kp∧qIK(p∧Xq)
A752/12	Xp∧qIX(p∧Kq)
A752/13	Kp∨qIK(p∨Xq)
A752/14	Xp∨qIX(p∨Kq)
A752/15	Kp•XqIK(p•XXq)
A752/16	Kp•XqIX(KKp•q)
A752/17	K(p•XXq)IX(KKp•q)
A752/18	Xp→Xq→.p→q
A752/19	Xp→XqI.p→q
A752/20	XpIXqI.pIq
A752/21	p\qI.Xp\Xq
A752/22	Kp→KqI.p→q
A752/23	KpIKqI.pIq
A752/24	p\qI.Kp\Kq
A752/25	p→XqI.Kp→q
A752/26	Xp→qI.p→Kq
A752/27	XpIqI.pIKq
A752/28	p\KqI.Xp\q
A752/29	Kp\qI.p\Xq
A752/30	KNq→NpI.Kp→q
A752/31	p→XqI.Nq→XNp
A752/32	Xp→qI.XNq→Np
A752/33	p→KqI.Nq→KNp
A752/34	XpIqI.XNqINp
A752/35	NqIKNpI.pIKq
A752/36	p\KqI.Nq\KNp
A752/37	Xp\qI.XNq\Np
A752/38	p\XqI.Nq\XNp
A752/39	Kp\qI.KNq\Np
A752/40	p→q→.Xp→.p•q
A752/41	p→q→.p•q→Xq
A752/42	p→q→.p→.Kp•Kq
A752/43	p→q→.Kp•Kq→q
A752/44	p•qIXrI.Kp•KqIr
A752/45	XpIXq⊃(pIq)∧.p→XqI.Nq→XNp
A753	a\½
A754	mp→np≡.Yp∨YNp
A755	a
A756	å
A757	Np⊃.p→å
A758	p⊃.a→p
A759	a→p≡p
A760	p→å≡Np
A761	Yp⊃.p→q≡q
A762	Ya
A763	Yp→p
A764	Yp⊃.YpIp
A765	YaIa
A766	pIa≡Yp
A767	YYpIYp
A768	pIå≡YNp
A768/1	YNå
A769	p→å≡.p\1
A770	a→p≡.0\p

A771	a→p≡.Np\1
A772	p→å≡.0\Np
A773	½\å
A773/1	a\å
A774	SaIa
A775	Sa
A776	a∧Na
A777	å∧Nå
A778	Så
A779	aISå
A779/1	aINå
A779/2	℘å
A779/8	Yp→¬Pp
A779/9	YNp⊃℘p
A780	a\p∨¬p≡¬Yp
A781	Yp∧Yq⊃.pIq
A782	YpI0∨.YpIa
A783	YpISYp
A784	Yp∧q⊃.p→q
A785	Yp⊃q⊃.Yp→q
A786	p⊃q∧Yp⊃.p→q
A787	Yp∧aIYp
A788	a∧pIa∨.a∧pI0
A789	Yp⊃.p∧qIa∨.p∧qI0
A790	Yp⊃.Y(p∧q)∨¬(p∧q)
A791	Yp∧q→Y(p∧q)
A792	Yp∧q⊃r⊃.Yp∧q→r
A793	Yp⊃.p∧YqIYq
A794	Yp⊃.Yp∧YqIYq
A795	Yp&YqI.Yp∧Yq
A796	Yp≡Yq≡.YpIYq
A797	p→a≡.Yp∨¬p
A797/1	Yq⊃.p→q⊃.Yp∨¬p
A797/2	p→q→.Yq→.Yp∨¬p
A797/3	p∧Yq⊃.p→q⊃Yp
A797/5	p→q⊃.q⊃p∧Yq→Yp
A798	Yp∧Yq∨(Yp∧¬q∨.Yq∧¬p)IY(p∨q)
A799	p∨q→a≡.¬p∧Yq∨.¬q∧Yp∨.Yp∧Yq∨ ¬(p∨q)
A800	¬Yp∨YYp
A801	0\a
A802	å\1
A803	a\1
A804	p\q→.Yq→¬p
A805	p\Yq→.q\¬p
A806	¬Yå
A807	YNp∧YNq⊃.pIq
A808	NYpI1∨.NYpIå
A809	YNp∧q⊃.Nq→p
A810	YNp⊃.YN(p∨q)∨H(p∨q)
A811	YNp∧q→YN(p∨Nq)
A812	Hp∨q∧YNp⊃.Nq→p
A813	NYp∨åINYp
A814	å∨pIå∨.å∨pI1
A815	YNp⊃.p∨qIå∨.p∨qI1
A816	YNp≡YNq≡.YNpIYNq
A817	YNp∧YNq∨(YNp∧Hq∨.YNq∧Hp)I YN(p∧q)
A818	å→p≡.YNp∨Hp
A819	p\q→.YNp→Hq
A820	å→(p∧q)≡.Hp∧YNq∨.Hq∧YNp∨. YNp∧YNq∨H(p∧q)
A821	p\Yq→¬p
A822	p•aI.p∧a
A823	XaIa
A824	a•åIa
A825	nåIXå
A826	naIa
A827	maIKa
A828	måIå
A829	np→p

A830	p→mp
A831	np→mp
A832	nåIå
A833	XåIå
A834	maINnå
A835	maIa
A836	KaIa
A837	KåIå
A838	Yq⊃.p•qI.p∧q
A839	Yp⊃.p•qI.p∧q
A840	Yp•qI.Yp∧q
A841	p•YqI.p∧Yq
A842	Yp⊃.XpIp
A843	XYpIYp
A844	Y(p•q)→.Yp∨Yq
A845	YXp→Yp
A846	YXpIYp
A847	YNp⊃.XpIp
A848	Yp∨YNp⊃.XXpIXp
A849	Yp∨YNp⊃.KpIp
A850	Yp∨YNp⊃.KKpIKp
A851	Yp∨YNp⊃.XpIKp
A852	Yp∨YNp⊃.XpIXKp
A853	YNp⊃.p•qInq
A854	KYpIYp
A855	YKpIYp
A856	Yp∨YNp⊃.pImp∧.pInp
A857	mpInp≡.Yp∨YNp
A858	Yp→¬YNp
A859	YNp→¬Yp
A860	YnpIYp
A861	p≡np
A862	Yp∨¬p≡Ymp
A863	NmNpInp
A864	NmpInNp
A865	NnpImNp
A866	YNmpIYNp
A867	YNp∨Hp≡YNnp
A868	pIa∨(pI0)≡Ymp
A869	pIå∨(pI1)≡YNnp
A870	Ym0
A870/1	m0Ia
A871	0\m0
A872	YNn1
A872/1	n1Iå
A873	n1\1
A874	n0I0
A875	m1I1
A876	p→q→.np→nq
A877	mp→mnp∨Hp
A878	p→q→.mp→mq
A879	mnp→mp
A880	Np⊃.mpImnp
A881	mpImnp≡Np
A882	npInmp≡p
A883	nnpInp
A884	mmpImp
A885	np∧nqIn(p∧q)
A886	np∨nqIn(p∨q)
A887	mp∧mqIm(p∧q)
A888	mp∨mqIm(p∨q)
A889	q\p⊃.q→np∨.pImq
A890	HpIHmp
A891	¬pI¬np
A892	mnpImnqI.nmpInmq
A892/1	npInq→.pIq∨.pInq∨.qINp∨.pImq∨.qImp
A892/2	mpImq→.pIq∨.pInq∨.qInp∨.pImq∨.qImp
A892/3	m½Imn½∧.n½Inm½
A892/4	p\q∧(q\mp)→.pInq

A892/5 q→p∨.mp→q∨.pInq

A892/6 p\q⊃.qImp∨.pInq∨.mp\q∧.p\nq

A893 np→nqI.np→q

A894 npImpI.pIa∨.pIå

A895 q\p→.nq→np

A896 np→q∨.nq→p

A897 mp→mqI.p→mq

A898 p→mq∨.q→mp

A899 Np≡.Xp→np

A900 mp→Kp≡p

A901 pImq→.pImp

A902 pInq→.pInp

A903 n(p•q)I.np•nq

A904 nXpIXnp

A905 nKpIKnp

A906 mKpIKmp

A907 mXpIXmp

A908 mp

A909 Pnp→Pp

A910 Nnp

A911 ¬mp∨Hnp→q

A912 Pp→Pmq

A913 ℘p→℘mq

A914 ℘np→℘p

A918 mXKpImp

A919 pTmp

A920 pTnp

A921 åT1

A922 pTqI.NpTNq

A923 fp⊃.fpIp

A924 fp→p

A925 ¬fpI.LYp∨¬p

A926 a\p≡fp

A927 ¬fp≡.pI0∨.pIa

A928 ¬f0

A929 ¬fa

A930 fpIp∨.fpI0

A931 ffpIfp

A932 a\p&pIfp

A933 fp∧fqIf(p∧q)

A934 p→q→.fp→fq

A935 fp∨fqIf(p∨q)

A936 ¬p∨Yp∨fq

A937 Yp∨fpIp

A938 ¬fYp

A939 a\fp∨.fp\a

A940 ¬(fpIa)

A941 ¬Yfp

A942 ¬p∨fp≡¬Yp

A943 Yp∧Yq∨(Yp∧fq∨.Yq∧fp)IY(p∧q)

A944 ¬(Yp∧fp)

A945 fp→f(p∨q)

A946 f½∧få∧f1

A947 Hf1∧YNfå∧PSf½

A948 HpIHfp

A949 HpIfHp

A950 PpIfPp

A951 PpIPfp

A952 ℘pI℘fp

A953 ℘pIf℘p

A954 fNp→Nfp

A955 Yp→fNp

A956 Sp∧¬Yp∧¬YNpIfSp

A957 ¬p∨Hp∨Yp∨YNp≡¬fSp

A958 fSp→Sfp

A959 Y(p•q)IY(p•q)

A960 fp•fqIf(p•q)

A961 YNp∧YNq∨Hp∨Hq∨¬p∨¬q∨Yp⊃.
p•qI.p∧q

A962 YNp∧fSq∧¬ƒq⊃.p•qI.p∧q

A963 Hp∨Hq∨¬p∨¬q∨Yp∨Yq∨.YNq∨.
YNp∧fSq∨.YNq∧fSp∨.fSp∧fSq

A964 p•q\(p∧q)∧YNp⊃ƒq

A965 p•q\(p∧q)⊃.fSp∧fSq∨.YNp∧ƒq∨.
YNq∧ƒp

A967 fSp∧fSq∨(YNp∧ƒq∨.YNq∧ƒp)≡.
p•q\.p∧q

A968 fXpIXfp

A978 XXX½\XX½.fSXXX½

A979 a\X½

A980 K½INX½

A981 ½\K½∧fSK½

A981/1 ℘K½

A982 K½\KK½∧fSKK½

A982/1 ℘KK½

A983 KK½\KKK½∧fSKKK½

A984 KK½INXX½

A984/1 KKK½INXXX½

A984/2 KKKK½INXXXX½

A985 NK½IX½

A985/1 NKK½IXX½

A985/2 NKKK½IXXX½

A986 fSp∧fSq⊃.fS(p•q)∧fSN(p•q)

A987 ½•X½\X½∧fS(½•X½)

A988 ½•K½\½∧fS(½•K½)

A989 fSp≡.a\p∧.p\å

A990 fp≡fnp

A991 fp≡fmp

A992 fSp≡fSmp

A993 fSp≡fSnp

A994 m½INn½

A995 mK½INnX½

A996 nK½INmX½

A997 n½\½

A997/1 ℘Nn½

A998 ½\m½

A998/1 ℘m½

A999 X½\n½

A1000 m½\K½

A1001 ¬(½Imp∨.½Inp)

A1002 m½→p≡℘p

A1003 p→n½≡℘Np

A1004 n½\p∧(p→½)I.pI½

A1005 fSp⊃.mXp\p∧.Xp\np

A1006 fSp⊃.mp\Kp∧.p\nKp

A1006/01 mp\q⊃.mp\nq∨.YNp∧Hq

A1006/02 p\nq⊃.mp\nq∨.¬p∧Yq

A1006/03 fSp⊃ƒmp

A1006/04 np•qIn(p•q)

A1006/05 np•mqIn(p•q)∨¬q

A1006/06 p\nq∧fSp⊃.mp\n(Kp•Kq)

A1006/07 ƒp∧fNq⊃¬ƒN(p•mq)

A1006/08 ƒp∧fNq⊃.p•mqIm(p•mq)

A1006/09 ƒp∧fSq⊃.p•mqIm(p•q)

A1006/10 fSp∧fSq⊃.mp•mqIn(p•q)

A1006/11 ƒp⊃.ƒKp∧ƒXp

A1006/12 ƒp∧ƒNp⊃.ƒKp∧ƒNKp∧ƒXp∧ƒNXp

A1006/13 ƒp∧ƒq⊃ƒ(p•q)

A1006/14 ƒp⊃.p•mpIXmp

A1006/15 fSp⊃.mXp\np∧.mp\nKp

A1006/16 ƒ½∧.mX½\n½∧.m½\nK½∧.
½•m½IXm½∧.K½•mK½IM½

A1006/17 p\nq∧fSp∧fSq⊃.m(Kp•Kq)\nq

A1006/18 p\nq∧fSp∧fSq⊃.mp\nK(p•q)∧.
mK(p•q)\nq

A1006/19 ½\nK½∧fS½∧fSK½∧.
m½\nK(½•K½)∧.mK(½•K½)\nK½

A1006/20 X½\n½∧fSX½∧fS½∧.
mX½\nK(X½•½)∧.mK(X½•½)\n½

A1006/21 p→q∧(q→r)∧fSp∧fSp∧fSr⊃fSq

A1006/22 p\q∧(q\r)∧fSp∧fSr⊃fSq

A1006/23 mp\q→.p\q

A1006/24 p\nq→.p\q

A1006/25 p\nq∧fSp∧fSq⊃.
p\nK(p•q)∧fSK(p•q)∧.K(p•q)\nq∧.
p\nKK(Xp•p•q)∧fSKK(Xp•p•q)∧.
KK(Xp•p•q)\nK(p•q)

A1007 YNp∨Hp≡bp

A1008 bp⊃.bpIp

A1009 bp→p

A1010 bbpIbp

A1011 å→p≡bp

A1012 bp∧bqIb(p∧q)

A1013 p→q→.bp→bq

A1014 bp∨bqIb(p∨q)

A1015 bp∨fNp

A1016 ¬p∨Yp≡bNp

A1017 bp⊃.Hbp∨YNbp

A1018 bp•bqIb(p•q)

A1019 HbpIHp

A1020 bHpIHp

A1021 bLp≡p

A1022 ¬bp≡fNp

A1023 b(p∨Np)≡¬fSp

A1024 ¬b(p∧Np)

A1025 bp→fp

A1026 fbpIbp

A1027 bfpIbp

A1028 bp⊃.nq→.p•q

A1029 bp⊃.nq→p

A1030 bp≡bnp

A1031 bp≡bmp

A1032 nbpIbnp

A1033 mbpIbmp

A1034 bPpIbp

A1035 PbpIbp

A1036 b℘pIbp

A1037 ℘bpIbp

A1038 bNp→Nbp

A1039 bXpIbp

A1040 XbpIbp

A1041 KbpIbp

A1042 bKpIbp

A1043 bp∨bNp∨fSp

A1044 p\å≡¬bp

A1045 a\p≡¬bNp

A1046 gp

A1047 g(p∨q)I.gp∨q

A1048 g(p∧q)I.gp∧gq

A1049 ggpIgp

A1050 g(p•q)I.gp•gq

A1051 p•gqI.p∧a∨.p•q

A1052 fgpIfp

A1053 p⊃.gfpIp

A1054 gpIp≡p

A1055 gfpIgp

A1056 p\gp≡¬p

A1057 Ygp≡¬fp

A1058 Np∧åINgp

A1059 p→q⊃.gp→gq

A1060 g0Ia

A1061 g0Iga

A1062 PgpIPp

A1063 Ngp→gNp

A1064 gXpIXgp

A1065 gKpIKgp

A1066 pRq≡.bNp∨fq

A1067 pR.pRqRq

A1068 pRqIf(pRq)

A1069 pRq⊃.qRrR.pRr

A1070 qR.pRq

A1071 pRq∨.pRNq

A1072 pRq⊃.NpRrR.q∨r

A1073 p∨qRrI.pRr∧.qRr
A1074 p∧qRrI.pRr∨.qRr
A1075 pR(qRr)I.p∧qRr
A1076 pR(qRr)I.qR.pRr
A1077 bNpR.pRq
A1078 pQ(qRr)I.qR.pQr
A1079 pR(qRr)R.pRqR.pRr
A1080 pRq∨fp
A1081 pRq∨bNq
A1082 aRp
A1083 pRq∧pRq
A1084 rRsR.pR(qRr)R.pR.qRs
A1085 sRpR.pR(qRr)R.sR.qRr
A1086 pRqR.rRsR.p∧rR.q∧s
A1087 pRqR.rRsR.p∨rR.q∨s
A1088 pRqR.p∨rR.q∨r
A1089 pRqR.p∧rR.q∧r
A1090 pRqR.p•rR.q•r
A1091 pRqR.p∧rRq
A1092 pRqR.pR.q∨r
A1093 pRqR.rRpR.rRq
A1094 pR.qRrR.qR.r∧p
A1095 pRq≡.bNqRbNp
A1096 pRbNq≡.qRbNp
A1097 p\q∧p⊃.rRq
A1098 pRNpRNp
A1099 NpRpRp
A1100 fpRqI.pRq
A1101 pRfqI.pRq
A1102 pRq∨.pRbNq
A1103 pRqRpRp
A1104 pR.pRqIfq
A1105 pR(qQr)I.qQ.pRPr
A1106 pRqIN(fp&Nfq)
A1107 p→q⊃.pRq
A1501 Bp⊃.BpIp
A1502 Bp→p
A1503 ¬Bp→B¬Bp
A1504 p⇒q⇒.Bp→Bq
A1505 p⇒q→.p→q
A1506 pGp→.p⊃q
A1507 pGqG.Bp⊃Bq
A1508 Bp∧BqIB(p∧q)
A1509 pGq→.Bp⊃Bq
A1510 BLpILBp
A1511 B¬BpI¬Bp
A1512 JBpILBp
A1513 p→Jp
A1514 ¬BLpI¬Bp
A1515 ¬BLpINBLp
A1516 Bp≡¬J¬p
A1517 Bp≡NJ¬p
A1518 ¬JpINJp
A1519 NJ¬pIBLp
A1520 ¬J¬pIBLp
A1521 LJpIJp
A1522 JpINB¬p
A1523 ¬BpIJ¬p
A1524 ¬BpINBLp
A1525 ¬JpIB¬p
A1526 BJpIJp
A1527 JBpIBLp
A1528 BpIBBp
A1529 Bp=BBp
A1530 JJpIJp
A1531 JBp≡Bp
A1532 p⇒q→.Bp⇒Bq
A1533 pGq→.BpGBq
A1534 p=qI.p⇒q∧.q⇒p
A1535 p=q→.Bp=Bq

A1536 p=q→.BpIBq

A1537 B(p≡q)→B(Bp≡Bq)

A1539 p=q→.r=s (con tal que ⌜r⌝ sólo difiera de ⌜s⌝ por el reemplazamiento de n ocurrencias de ⌜p⌝ por n ocurrencias respectivas de ⌜q⌝)

A1540 p=q→.pIq

A1541 p⇒qI.Nq⇒Np

A1542 Jp∨JqIJ(p∨q)

A1543 Bp⊃JqIJ(p⊃q)

A1544 pGq∧Bp⊃Bq

A1545 Bp⊃.qGp

A1546 ¬Jp⊃.pGq

A1547 HBLpIBLp

A1548 pGq≡.¬qG¬p

A1549 HBHpIBHp

A1550 BHp→HBp

A1551 Bp∨Bq→B(p∨q)

A1552 J(p∧q)→.Jp∧Jq

A1553 B(p∨q)→.Bp∨Jq

A1553/1 Bp⊃.Jq→J(p∧q)

A1554 Bp⊃.Bp=p

A1555 Bp∨Bq≡B(p∨Bq)

A1556 Bp•BqIB(Bp•Bq)

A1557 Bp•BqIB(p•q)

A1558 BXpIXBp

A1559 BKpIKBp

A1560 p⇒q⊃.pGq

A1561 pGq⊃.Jp⇒Jq

A1562 p⇒q→.Jp⇒Jq

A1563 NpGpIBp

A1564 pGNpIBNp

A1565 NpGLpIBLp

A1566 pG¬pI¬Jp

A1567 N(pG¬p)IJp

A1568 pGq∧(rGq)I.p∧rGq

A1569 p⇒q∧(r⇒q)I.p∨r⇒q

A1570 pGq∧(pGr)I.pG.q∧r

A1571 p⇒q∧(p⇒r)I.p⇒.q∧r

A1572 pGq∨(rGq)→.p∧rGq

A1573 p⇒q∨(r⇒q)→.p∧r⇒q

A1574 pGq∨(pGr)→.pG.q∨r

A1575 p⇒q∨(p⇒r)→.p⇒.q∨r)

A1576 pGq∧(NpGq)IBq

A1577 pGq∧(pG¬q)I¬Jp

A1578 Bp⊃.Jq⇒J(p∧q)

A1579 B(p∨Jq)I.Bp∨Jq

A1580 J(p∧Jq)I.Jp∧Jq

A1581 BPpIPBPp

A1582 BPp→PBp

A1583 BPBpIPBPp

A1584 BfpIfBfp

A1585 Bfp→fBp

A1586 fBfpIBfBp

A1587 BYpIYBYp

A1588 YBa

A1589 BYp→YBp

A1590 YBYp→BYBp

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Aq001 ∃x(∀xq•p)I∀x(∃xp•q)∧.∀x(p•q)→(∀xp•q)∧.∀xs\r[(x)]⊃∃x(s\r)∧.∀xp∧∃xq→∃x(p∧q)∧. ∀x¬p→¬∃xp∧.nr\r⊃∃x(r→∃xp→.r→p)

Aq011 ∃x(∀xq•p)I∀x(∃xp•q)

Aq012 ∀x(p•q)→.∀xp•q

Aq013 ∀xs\r[(x)]⊃∃x(s\r)

Aq014 ∀xp∧∃xq→∃x(p∧q)

Aq015 ∀x¬p→¬∃xp

Aq018 nr[(x)]\r⊃∃x(r→∃xp→.r→p)

Aq019 ∀x(1•p)→p

Aq020 p→∃xp

Aq021 p[x/y]→∃xp

Aq022 ∀xp→p

Aq022/1 ∀xp→p[x/y]

Aq023 ∀xp→∃xp

Aq024 ∀x(r[(x)]→s)⊃.r→∀xs

Aq025 ∀x(p→q)⊃.∀xp→∀xq

Aq026 ∀x(pIq)⊃.∀xpI∀xq

Aq027 ∀xNNpI∀xp

Aq028 N∀xpI∃xNp

Aq029 N∃xpI∀xNp

Aq029/1 N∃xNpI∀xp

Aq030 N∀xNpI∃xp

Aq031 H∀xpI∀xHp

Aq032 ∀x(pIq)⊃.∃xpI∃xq

Aq033 ∀x(s→r[(x)])⊃.∃xs→r

Aq034 ∀x(p→q)⊃.∃xp→∃xq

Aq035 L∃xpI∃xLp

Aq036 ∃x(Hr[(x)]→∃xp→.Hr→p)

Aq037 ∀x(p∧q)I.∀xp∧∀xq

Aq038 ∃x(p∨q)I.∃xp∨∃xq

Aq039 ∃x(p→q)⊃.∀xp→∃xq

Aq040 ∀xp[(x)]Ip[(x)]

Aq041 p[(x)]I∃xp

Aq042 ∃x(p[(x)]→q)⊃.p→∃xq

Aq043 ∃x(p→q[(x)])⊃.∀xp→q

Aq044 H∃xpI∃xHp

Aq045 ∀xLpIL∀xp

Aq046 ¬∃xpI∀x¬p

Aq047 ¬∀xpI∃x¬p

Aq048 ∀x(p∨q)→.∃xp∨∀xq

Aq049 ∀x(p⊃q)→.∀xp⊃∀xq

Aq049/1 ∀x(p⊃q)→.∃xp⊃∃xq

Aq049/2 ∀x(p⊃q)⊃.∀xp⊃∀xq

Aq049/3 ∀x(p⊃q)⊃.∃xp⊃∃xq

Aq050 r[(x)]→∀xs→∀x(r→s)

Aq050/1 r[(x)]→∀xs⊃∀x(r→s)

Aq051 ∃xp→q[(x)]→∀x(p→q)

Aq051/1 ∃xp→q[(x)]⊃∀x(p→q)

Aq052 ∀x(pIq)I½∨.∀x(pIq)I0

Aq053 ∃xp→∀xq→∀x(p→q)

Aq054 ∀xq\m∀xq⊃.∀xp→∀xq→∃x(p→q)

Aq055 ∀xp∨∀xq→∀x(p∨q)

Aq056 ∃x(p∧q)→.∃xp∧∃xq

Aq057 ∀x(p[(x)]∨q)I.p∨∀xq

Aq058 ∃x(p[(x)]∧q)I.p∧∃xq

Aq059 ∃xp∨∀xq→∃x(p∨q)

Aq060 ∃x(pIq)I½∨.∃x(pIq)I0

Aq061 ∀x(p→q)I0∨.∀x(p→q)I½

Aq062 ∀x(p\q)I0∨.∀x(p\q)I½

Aq063 ∃x(p→q)I0∨.∃x(p→q)I½

Aq064 ∃x(p\q)I0∨.∃x(p\q)I½

Aq065 ∀x(r[(x)]→s)I.r→∀xs

Aq066 ∃xp→q[(x)]I∀x(p→q)

Aq067 nq\q[(x)]→.q→∃xpI∃x(q→p)

Aq067/1 n∃xp\∃xp→∃x(∃xp→p)

Aq068 q\mq[(x)]→.∀xp→qI∃x(p→q)

Aq068/1 ∀xp\m∀xp→∃x(p→∀xp)

Aq069 ∀x(p[(x)]⊃q)I.p⊃∀xq

Aq070 ∀x(p⊃q[(x)])I.∃xp⊃q

Aq071 ∃x(p[(x)]⊃q)I.p⊃∃xq

Aq072 ∃x(p⊃q[(x)])I.∀xp⊃q

Aq073 ∃x(p⊃q)I.∀xp⊃∃xq

Aq074 ∃xp⊃∀xq→∀x(p⊃q)

Aq075 ∀xp⊃.∀xqI∀x(p⊃q)

Aq076 ∀xp⊃.∃x(p⊃q)I∃xq

Aq077 ∃xp⊃.∀x(p⊃q)→∃xq

Aq078 ∀xp⊃∀xq→∃x(p⊃q)

Aq079 ∀x(p&q)I.∀xp&∀xq

Aq080 ∀xp&∃xq→∃x(p&q)

Aq081 ∃xp&∀xq→∃x(p&q)

Aq082 ∃x(p&q)→.∃xp&∃xq

Aq083 ∃x(p[(x)]&q)I.p&∃xq

Aq084 ∃x(p&q[(x)])I.∃xp&q

Aq085 N∃x(p&Nq)I∀x(p⊃q)

Aq086 ∀x(p∧q)→∀x(p&q)

Aq087 ∃x(p∧q)→∃x(p&q)

Aq091 ∃x(p\q)→.∀xp\∃xq

Aq092 ∃x(p\q)→.p[(x)]\∃xq

Aq093 ∃x(p\q)→.∀xp\q[(x)]

Aq094 ∃xp\∀xq→∀x(p\q)

Aq095 ∀x(p\q)→.∀xp\∃xq

Aq096 ∀xp\m∀xp→.∀x(p\q)→.∀xp\∀xq

Aq097 ∃xp\∀xq→.∀xp\∃xq
Aq098 ∃xp\q[(x)]→∀x(p\q)
Aq099 p\∀xq→∀x(p[(x)]\q)
Aq100 p[(x)]\mp→.p\∀xqI∀x(p\q)
Aq101 n∀xp\∃xp→.∀x(q\p)→.∃xq\∃xp
Aq102 np[(x)]\p→.∀x(q\p)I.∃xq\p
Aq103 p[(x)]\∃xqI∃x(p\q)
Aq014 ∀xp\q[(x)]I∃x(p\q)
Aq105 ∃xp\∃xq→∃x(p\q)
Aq106 ∀xp\∀xq→∃x(p\q)
Aq107 ∃xp&∀x(p⊃.q\r)→∃x(p&q\.q&r)
Aq108 ∃xp&∀x(p⊃.q\r)→.∀x(p⊃q)\∃x(p&r)
Aq111 ∀x(∀xp•q)I.∀xp•∀xq
Aq112 ∀xp•∀xqI∀x(p•q)
Aq113 ∀xp•∃xq→∃x(p•q)
Aq114 ∀x(p[(x)]•q)I.p•∀xq
Aq115 ∃x(p•q)→.∃xp•∃xq
Aq116 ∃x(p•q[(x)])I.∃xp•q
Aq117 ∃x(p•q)→.∀xp∧∀xq
Aq118 ∃x(p•q)→∃x(p∧q)
Aq119 ∀xXpIX∀xq
Aq120 X∃xpI∃xXp
Aq121 K∀xpI∀xKp
Aq122 K∃xpI∃xKp
Aq123 N∃xKpIX∀xNp
Aq124 N∃xXpIK∀xNp
Aq125 N∀xKpIX∃xNp
Aq126 N∀xXpIK∃xNp
Aq127 X∀x(p∧q)I.∀xXp∧∀xXq
Aq128 X∃(p∨q)I.∃xXp∨∃xXq
Aq129 ∀x(p→q)→.X∀xp→∀xXq
Aq130 X∀xp→∃xKp
Aq131 ∃xXKp→∃xp
Aq132 ∃xKXpI∃xp
Aq133 ∃xXp≡∃xp

Aq134 ∀xXKpI∀xp
Aq135 ∀xKXpI∀xp
Aq136 N∃xKXpI∀xNp
Aq137 N∃xXKpI∀xNp
Aq138 N∀xKXpI∃xNp
Aq139 N∀xXKpI∃xNp
Aq140 X∃(p∧q)→.∃xXp∧∃xXq
Aq151 ∃xPpIP∃xp
Aq152 P∀xpI∀xPp
Aq153 ∃x℘pI℘∃xp
Aq154 ℘∀xpI∀x℘p
Aq155 ∀x℘p∨∃xPNp
Aq156 ∃x℘p∨∀xPNp
Aq157 ℘∃xPpI℘∃xp
Aq158 P∃x℘pI℘∃xp
Aq159 ℘∀xPpI℘∀xp
Aq160 P∀x℘pI℘∀xp
Aq161 ∀xP(p∧q)I.∀xPp∧∀xPq
Aq162 ∃xP(p∨q)I.∃xPp∨∃xPq
Aq163 ∀x℘(p∧q)I.∀x℘p∧∀x℘q
Aq164 ∃x℘(p∨q)I.∃x℘p∨∃x℘q
Aq165 ∃xP(p∧q)→.∃xPp∧∃xPq
Aq166 ∀xP(p∨q)→.P∃xp∨∀xPq
Aq167 ∀x℘(p∨q)→.∃x℘p∨∀x℘q
Aq168 ∃x℘(p∧q)→.∃x℘p∧∃x℘q
Aq169 ∀xPp∨∀zPq→∀xP(p∨q)
Aq170 ∀x℘p∨∀x℘q→∀x℘(p∨q)
Aq171 ∀xPp∧∃x℘q→∃xP(p∧q)
Aq172 ∀x℘p∧∃xPq→∃xP(p∧q)
Aq173 ∀x(p→q)→.∀xPp→∀xPq
Aq174 ∀x(p→q)→.∀x℘p→∀x℘q
Aq175 ∀x(p→q)→.∃xPp→P∃xq
Aq176 ∀x(p→q)→.∃x℘p→℘∃xq
Aq177 ∀xP(p•q)→.∀xPp•∀xPq
Aq178 ∀x℘(p•q)→.∀x℘p•∀x℘q

Aq179 ∃xP(p•q)→.∃xPp•∃xPq
Aq180 ∃x℘(p•q)→.∃x℘p•∃x℘q
Aq181 ∀x(pQq)→.∀xpQ∀xq
Aq182 ∀x(pQq)→.∃xpQ∃xq
Aq183 ∀x(p[(x)]Qq)I.pQ∀xq
Aq184 ∀x(pQq[(x)])I.∃xpQq
Aq185 ∃x(p[(x)]Qq)I.pQ∃xq
Aq186 ∃x(pQq[(x)])I.∀xpQq
Aq187 ∃x(pQq)I.∀xpQ∃xq
Aq188 ∃xpQ∀xq→∀x(pQq)
Aq189 ∃xpQ.∀x(pQq)→P∃xq
Aq190 ∀xpQ.∀xPqI∀x(pQq)
Aq191 ∀xpQ.∃x(pQq)IP∃xq
Aq192 ∃xpQ∀xq→∃x(pQq)
Aq193 N∃x(Pp&NPq)I∀x(pQq)
Aq194 ∀x(pMq)→.∀xpM∀xq
Aq195 ∀x(pMq)→.∃xpM∃xq
Aq196 ∀x(pMq)→.∀xP(p∧q)∨∃x¬P(p∨q)
Aq197 p∧∀x(pMq)Qq
Aq198 p∧¬PqQ¬∀x(pQq)
Aq199 ∀x(pMq)I.∀x(pQq)∧∀x(qQp)
Aq200 ∃x(pMq)I.∀x(p∨q)Q∃x(p∧q)
Aq201 ∀xSpIN∃x(p∨Np)
Aq202 S∃xp→∃xSp
Aq203 ∀xSp→S∃xNp
Aq204 S∀xp→∃xSp
Aq205 S∀xpIS∃xNp
Aq206 ∀xSp→S∀xp
Aq207 S∃xpIS∀xNp
Aq208 ∃xSpIN∀x(p∨Np)
Aq209 ∀xp∨∀xNp→N∃xSp
Aq210 ∃xp∨∃xNp→N∀xSp
Aq251 f∃xpI∃xfp
Aq252 f∀xp→∀xfp
Aq253 Y∃xp→∃xYp
Aq254 ∃xYpIY∃xYp
Aq255 Y∀xYpI∀xYp
Aq256 ∀xYp→Y∀xp
Aq257 ∀xYp→Y∃xp
Aq258 ∀xp⊃.Y∃xp→∀xYp
Aq259 f∀xpIf∀xfp
Aq260 Y∀xfp∨.∀xfpIf∀xp
Aq261 Y∀xfp→Y∀xp
Aq262 Y∀xp∨.∀xfpIf∀xp
Aq263 Y∃xp→¬∃xfp
Aq264 ∀xYp→¬∃xfp
Aq265 Y∀xfq∧f∀xp∨.∀x(pRq)→.∀xpR∀xq
Aq266 ∀x(pRq)→.∃xpR∃xq
Aq267 p[(x)]R∀xqI∀x(pRq)∨Y∀xfq
Aq268 ∃xpRq[(x)]I∀x(pRq)
Aq269 p[(x)]R∃xqI∃x(pRq)
Aq270 ∀xpRq[(x)]I∃x(pRq)∨Y∀xfp
Aq271 q[(x)]R.∀xpRq≡∃x(pRq)
Aq272 ∀xpRq[(x)]∧∀x¬(pRq)⊃.Y∀xfp∧¬fq
Aq273 ∀xpRq[(x)]∧(Y∀xfp⊃fq)⊃∃x(pRq)
Aq274 ∃x(pRq)→.∀xpR∃xq
Aq275 ∃xpR∀xq→∀x(pRq)
Aq276 ∀xpR.∀xfqI∀x(pRq)
Aq277 ∀xpR.∃x(pRq)If∃xq
Aq278 ∃xpR.∀x(pRq)→f∃xq
Aq279 ∃x¬fp∨∀xfq→∃x(pRq)
Aq280 ∀xpR∃xq→∃x(pRq)∨Y∀xfp
Aq281 ∃xgpIg∃xp
Aq282 ∀xgpIg∀xp
Aq283 ∀xnpIn∀xp
Aq284 ∃xnpIn∃xp
Aq285 ∀xmpIm∀xp
Aq286 ∀xmpIm∃xp
Aq287 b∀xpI∀xbp
Aq288 ∃xbp→b∃xp

Aq289 b∃xbpI∃xbp

Aq290 ∀xbp∧∀xbqIb∀x(p∧q)

Aq291 ∃xb(p∧q)→.b∃xp∧b∃xq

Aq292 ∃xbp∨∃xbq→b∃x(p∨q)

Aq293 ∃xbp∨∀xfNp

Aq294 b∀xp∨f∃xNp

Aq295 ∃x(p→q)→.b∀xp→b∀xq

Aq301 ∀xBpIB∀xp

Aq302 ∃xBp→B∃xp

Aq303 J∃xpI∃xJp

Aq304 J∀xp→∀xJp

Aq305 L∃xJpIJ∃x

Aq306 J∃xLpI∃xJp

Aq307 ∀xJBpIBL∀xp

Aq308 B¬∃xp→¬∃xBp

Aq309 B¬∀xp→∃x¬Bp

Aq310 ∀xB(p∧q)I.B∀xp∧B∀xp

Aq311 ∃xJ(p∨q)I.J∃xp∨J∃xq

Aq312 ∀xBKpIKB∀xp

Aq313 ∀xBXpIXB∀xp

Aq314 ∃xBpIB∃xBp

Aq315 ∀x(p=q)→.∀xp=∀xq

Aq316 ∀x(p=q)→.∃xp=∃xq

Aq317 ∀x(p⇒q)→.∀xp⇒∀xq

Aq318 ∀x(p⇒q)→.∃xp⇒∃xp

Aq319 ∀x(pGq)→.∀xpG∀xq

Aq320 ∀x(pGq)→.∃xpG∃xq

Aq321 p╪q→¬∀x(p=q)

Aq322 ∀xp╪∀xq→∃x¬(p=q)

Aq323 ∃xp╪∃xq→∃x¬(p=q)

Aq324 ∀x(p=q)I.∀x(p⇒q)∧∀x(q⇒p)

Aq325 ∀x(p╪q≡.p\\q∨.q\\p∨.J(p\q)∧J(q\p))

Aq326 ∃xp⇒∀xq→∀x(p⇒q)

Aq327 ∃x(p⇒q)→.∀xp⇒∃xq

Aq328 ∃x(p[(x)]⇒q)→.p⇒∃xq

Aq329 ∃x(p⇒q[(x)]→.∀xp⇒q

Aq330 ∀x(p[(x)]⇒q)I.p⇒∀xq

Aq331 ∃xp⇒q[(x)]I∀x(p⇒q)

Aq332 ∀x(p[(x)]Gq)I.pG∀xq

Aq333 ∀x(pGq[(x)])I.∃xpGq

Aq334 ∃x(p[(x)]Gq)→.pG∃xq

Aq335 ∃x(pGq[(x)])→.∀xpGq

Aq336 ∃x(pGq)→.∀xpG∃xq

Aq337 ∃xpG∀xq→∀x(pGq)

Aq338 ∀x(p\\q→.q\\r→.p\\r)

Aq339 ∀x(p\\q→¬(q\\p))

Aq340 ∀xBp∨J∃x¬p

Aq341 $\forall xJ\neg p\lor\exists xBp$

Aq342 $\exists xJp\lor B\neg\exists xp$

Aq343 $\exists xBp\land\forall xJq\to\exists xJ(p\land q)$

Aq344 $\forall xBp\land\exists xJq\to\exists xJ(p\land q)$

Aq351 $\forall x,ypI\forall y,xp$

Aq352 $\exists x\forall yp\to\forall y\exists xp$

Aq353 $\exists x,ypI\exists y,xp$

Aq354 $N\exists x\forall ypI\forall x\exists yNp$

Aq355 $N\forall x\exists ypI\exists x\forall yNp$

Aq356 $\neg\exists x\forall ypI\forall x\exists y\neg p$

Aq357 $\neg\forall x\exists ypI\exists x\forall y\neg p$

Aq358 $L\forall x\exists ypI\forall x\exists yLp$

Aq359 $L\exists x\forall ypI\exists x\forall yLp$

Aq360 $H\forall x\exists ypI\forall x\exists yHp$

Aq361 $H\exists x\forall ypI\exists x\forall yHp$

Aq362 $X\exists x\forall ypI\exists x\forall yXp\land.X\forall x\exists ypI\forall x\exists yXp$

Aq363 $K\exists x\forall ypI\exists x\forall yKp\land.K\forall x\exists ypI\forall x\exists yKp$

Aq364 $P\exists x\forall ypI\exists x\forall yPp\land.P\forall x\exists ypI\forall x\exists yPp$

Aq365 $\wp\exists x\forall ypI\exists x\forall y\wp p\land.\wp\forall x\exists ypI\forall x\exists y\wp p$

Aq367 $f\exists x\forall yp\to\exists x\forall yfp\land.f\forall x\exists yp\to\forall x\exists yfp$

Aq368 $n\exists x\forall ypI\exists x\forall ynp\land.n\forall x\exists ypI\forall x\exists ynp$

Aq369 $m\exists x\forall ypI\exists x\forall ymp\land.m\forall x\exists ypI\forall x\exists ymp$

Aq370 $g\exists x\forall ypI\exists x\forall ygp\land.g\forall x\exists ypI\forall x\exists ygp$

Aq371 $\exists x\forall yBp\to B\exists x\forall yp$

Aq372 $\forall x\exists yBp\to B\forall x\exists yp$

Aq401 $\forall x,x^1,...,x^n p\to p$

Aq402 $\forall x,x^1,...,x^n p\to q$ (si q es el resultado de reemplazar uniformemente en p: cada ocurrencia libre de x por una ocurrencia libre de uan variable cualquiera; cada ocurrencia libre de x^1 por una ocurrencia libre de una variable cualquiera, y así sucesivamente)

Aq403 $\exists x,x^1,...,x^n(p\to q)\to.p\to\exists x,x^1,...,x^n q$ (con tal que p no contenga ocurrencia libre al guna de ninguna de las variables: $x,x^1,...,x^n$)

Aq404 $nq\backslash q\to\exists x,x^1,...,x^n(q\to\exists x,x^1,...,x^n p\to.q\to p)$ (con tal que q no contenga ninguna ocurrencia libre de ninguna de las variables: $x,x^1,...,x^n$)

Aq405 $q\backslash mq\to.\forall x,x^1,...,x^n p\to q\to\exists x,x^1,...,x^n(p\to q)$ (con tal que... —como en Aq404)

Aq406 $\exists x,x^1,...,x^n(p\to q)\to.\forall x,x^1,...,x^n p\to q$ (con tal que... —como en Aq404)

Aq407 $\forall x,x^1,...,x^n(p\to q)\to.\forall x,x^1,...,x^n p\to\forall x,x^1,...,x^n q$

Aq408 $\forall x,x^1,...,x^n(pIq)\to.\forall x,x^1,...,x^n pI\forall x,x^1,...,x^n q$

Aq411 $\forall x,x^1,...,x^n(p=q)\to.r=s$ (si r sólo difiere de s por el reemplazamiento de un número finito, m, de ocurrencias de q en s por sendas ocurrencias de p, no habiendo variable alguna respecto de la cual esté ligada alguna de esas ocurrencias (las de p en r y las de q en s) a no ser. $x,x^1,...,x^n$)

ANEJO Nº 2

LISTA DE REGLAS DE INFERENCIA DE *Aj y Aq*

rinf11 $pIq \vdash qIp$

rinf12 $pIq \vdash p\supset q$

rinf13 $p , pIq \vdash q$

rinf14 $p , qIp \vdash q$

rinf15 $pIq , qIr \vdash pIr$

rinf16 $pIq \vdash q{\downarrow}rI.r{\downarrow}p$

rinf16bis $pIq \vdash p\vee rI.q\vee r$

rinf17 $pIq \vdash p\wedge rI.q\wedge r$

rinf18 $pIq \vdash q\wedge rI.p\wedge r$

rinf19 $pIq \vdash q\vee rI.p\vee r$

rinf20 $pIq \vdash r\wedge pI.r\wedge q$

rinf21 $pIq \vdash r\vee pI.r\vee q$

rinf22 $p\wedge q \vdash q$

rinf23 $p\wedge q \vdash p$

rinf24 $p , p\supset q , q\supset r \vdash r$

rinf25 $pIq \vdash HpIHq$

rinf25bis $pIq \vdash \neg pI\neg q$

rinf26 $pIq , pIr \vdash qIr$

rinf27 $qIp , rIp \vdash qIr$

rinf27bis $pIq \vdash p{\downarrow}rI.q{\downarrow}r$

rinf28 $p , q \vdash p\wedge q$

rinf29 $p\rightarrow q, q\rightarrow p \vdash pIq$

rinf30 $pIq \vdash p\supset rI.q\supset r$

rinf31 $pIp^1 , p^1Ip^2 , p^2Ip^3, ..., p^{n-1}Ip^n \vdash pIp^n$

rinf32 $pIq \vdash rIr^1$ (donde $\ulcorner r^1 \urcorner$ sólo difiere de $\ulcorner r \urcorner$ por la sustitución de un número finito cualquiera de ocurrencias de $\ulcorner p \urcorner$ por otras tantas ocurrencias de $\ulcorner q \urcorner$, siempre y cuando $\ulcorner p \urcorner$ sólo esté afectado en $\ulcorner r \urcorner$ por los functores ‘I’, ‘H’, y/o ‘$\downarrow$’)

rinf33 $p\supset q , q\supset r \vdash p\supset r$

rinf34 $p\supset p^1 , p^1\supset p^2 , p^2\supset p^3, ..., p^{n-1}\supset p^n \vdash p\supset p^n$

rinf35 $p\supset .q\supset r , r\supset r^1, ..., r^{n-1}\supset r^n \vdash p\supset .q\supset r^n$

rinf36 $p\supset .q\supset .q^1\supset r , r\supset r^1 , r^1\supset r^2, ..., r^{n-1}\supset r^n \vdash p\supset .q\supset .q^1\supset r^n$

rinf37 $p\supset .q\supset .q^1\supset .q^2\supset r , r\supset r^1, ..., r^{n-1}\supset r^n \vdash p\supset .q\supset .q^1\supset .q^2\supset r^n$

rinf38 $p , \neg p \vdash q$

rinf39 $p \vdash p\vee q$

rinf40 $p\vee q , \neg p \vdash q$

rinf41 $p\supset r , q\supset s , p\vee q \vdash r\vee s$

rinf41/1 $p\supset r , p\vee q \vdash r\vee q$

rinf42 $p\supset r , q\supset r , p\vee q \vdash r$

rinf43 $p \vdash Lp$

rinf44 $Lp \vdash p$

rinf45 $p\supset q , \neg q \vdash \neg p$

rinf46 $p \vdash q\supset p$

rinf47 $p\rightarrow q \vdash p\supset q$

rinf52 $q \vdash pIp^1 \wedge (rIr^1) \supset s$ (donde $\ulcorner s \urcorner$ no difiere de $\ulcorner q \urcorner$ más que por el reemplazamiento de n ocurrencias de $\ulcorner p \urcorner$ en $\ulcorner q \urcorner$ por ocurrencias respectivas de $\ulcorner p^1 \urcorner$, y de m ocurrencias de $\ulcorner r \urcorner$ en $\ulcorner q \urcorner$ por ocurrencias respectivas de $\ulcorner r^1 \urcorner$, no estando esas ocurrencias afectadas por otros functores que por '$\downarrow$', 'H' y/o 'I')

rinf55 $pIq \supset .rIs \vdash pIq \to .rIs$ rinf55/1 $pIq \equiv .rIs \vdash pIqI.rIs$

rinf56 $r \supset s \vdash r \to s$; $r \equiv s \vdash rIs$

(Siempre que $\ulcorner r \urcorner$ resulte de combinar, de cualquier modo que sea, fórmulas equivalenciales únicamente mediante ocurrencias de '$\wedge$' o de '$\vee$'; y $\ulcorner s \urcorner$ sea el resultado de combinar fórmulas equivalenciales (no forzosamente las mismas que haya en $\ulcorner r \urcorner$) únicamente mediante '$\wedge$' o '$\vee$')

rinf 57 $r \supset s \vdash r \to s$; $r \equiv s \vdash rIs$

(Siempre que $\ulcorner r \urcorner$ resulte de combinar, de cualquier modo que sea, fórmulas equivalenciales o sobreimplicacionales únicamente mediante ocurrencias de '$\wedge$' o de '$\vee$'; y $\ulcorner s \urcorner$ sea el resultado de combinar fórmulas equivalenciales o sobreimplicacionales (no forzosamente las mismas que haya en $\ulcorner r \urcorner$) únicamente mediante '$\wedge$' o '$\vee$')

rinf60 $p \supset q \vdash Bp \supset Bq$ rinf61 $p \to q \vdash Bp \to Bq$

rinf62 $p \equiv q \vdash Bp \equiv Bq$ rinf63 $pIq \vdash BpIBq$

rinf64 $pIq \vdash JpIJq$ rinf65 $p \supset q \vdash Jp \supset Jq$

rinf66 $p \equiv q \vdash Jp \equiv Jq$ rinf67 $p \to q \vdash Jp \to Jq$

rinf68 $pIq \vdash r \equiv s$ (con tal que $\ulcorner s \urcorner$ sólo difiera de $\ulcorner r \urcorner$ por el reemplazamiento de n ocurrencias de $\ulcorner p \urcorner$ por sendas ocurrencias de $\ulcorner q \urcorner$)

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

rinfq11 $p \to q \vdash \forall xp \to \forall xq$

rinfq12 $p \to q \vdash \exists xp \to \exists xq$

rinfq13 $pIq \vdash \forall xpI\forall xq$

rinfq14 $pIq \vdash \exists xpI\exists xq$

rinfq15 $p \supset q \vdash \forall xp \supset \forall xq$

rinfq16 $p \supset q \vdash \exists xp \supset \exists xq$

rinfq17 $p \supset q \vdash p \to q$ (si tanto $\ulcorner p \urcorner$ como $\ulcorner q \urcorner$ son, ambos, de una u otra de las siguientes formas: $\ulcorner rIs \urcorner$, $\ulcorner r \to s \urcorner$, $\ulcorner r \backslash s \urcorner$. $\ulcorner \forall x(rIs) \urcorner$, $\ulcorner \forall x(r \to s) \urcorner$, $\ulcorner \forall x(r \backslash s) \urcorner$, $\ulcorner \exists x(rIs) \urcorner$, $\ulcorner \exists x(r \to s) \urcorner$, $\ulcorner \exists x(r \backslash s) \urcorner$, o una conyunción o una disyunción de dos fórmulas así)

rinfq17/1 $p \equiv q \vdash pIq$ (con la misma restricción que rinfq17)

rinfq18 $\neg q$, $p \supset \exists xq \vdash \neg p$

rinfq19 pIq ⊦ r=s (si r sólo difiere de s por el reemplazamiento en r de m ocurrencias de q en s por sendas ocurrencias de p)

ANEJO Nº 3

LISTA DE ABREVIACIONES

DE *Aj* Y *Aq*

df01 ⌜0⌝ eq ⌜aIa↓aI.a↓a⌝

df02 ⌜Np⌝ eq ⌜p↓p⌝

df03 ⌜¬p⌝ eq ⌜HNp⌝

df04 ⌜p∨q⌝ eq ⌜N(p↓q)⌝

df05 ⌜p∧q⌝ eq ⌜Np↓Nq⌝

df06 ⌜p⊃q⌜ eq ⌜¬p∨q⌝

df07 ⌜p&q⌝ eq ⌜N(p⊃Nq)⌝

df08 ⌜1⌝ eq ⌜N0⌝

df09 ⌜Sp⌝ eq ⌜p∧Np⌝

df10 ⌜p≡q⌝ eq ⌜p⊃q∧.q⊃p⌝

df11 ⌜½⌝ eq ⌜aIa⌝

df12 ⌜Lp⌝ eq ⌜N¬p⌝

df13 ⌜Xp⌝ eq ⌜p•p⌝

df14 ⌜p→q⌝ eq ⌜p∧qIp⌝

df15 ⌜pZq⌝ eq ⌜Np∨q⌝

df16 ⌜gp⌝ eq ⌜p∨a⌝

df17 ⌜p\q⌝ eq ⌜p→q∧¬(q→p)⌝

df18 ⌜å⌝ eq ⌜Na⌝

df19 ⌜np⌝ eq ⌜p•å⌝

df20 ⌜mp⌝ eq ⌜NnNp⌝

df21 ⌜pGq⌝ eq ⌜B(p⊃q)⌝

df22 ⌜Kp⌝ eq ⌜NXNp⌝

df23 ⌜p↕q⌝ eq ⌜p→q∧.q⊃p⌝

df24 ⌜Yp⌝ eq ⌜pIa∧p⌝

df25 ⌜p=q⌝ eq ⌜b(pIq)⌝

df26 ⌜fp⌝ eq ⌜¬Yp∧p⌝

df27 ⌜p⇒q⌝ eq ⌜B(p→q)⌝

df28 ⌜Pp⌝ eq ⌜Np→p&p⌝

df29 ⌜pRq⌝ eq ⌜fp⊃fq⌝

df30 ⌜ƒp⌝ eq ⌜np\p&fSp⌝

df31 ⌜p╪q⌝ eq ⌜¬(p=q)⌝

df32 ⌜℘p⌝ eq ⌜Pp∧¬PNp⌝

df33 ⌜pQq⌝ eq ⌜Pp⊃Pq⌝

df34 ⌜bp⌝ eq ⌜Np→a&p⌝

df35 ⌜Jp⌝ eq ⌜¬B¬p⌝

df36 ⌜pMq⌝ eq ⌜Pp≡Pq⌝

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

dfq1 ⌜∃xp⌝ abr. ⌜N∀x(1•Np)⌝ dfq2 ⌜p\\q⌝ abr. ⌜p⇒q∧¬(q⇒p)⌝

⌜∀x,x’,x^1,...,x^np⌝ abr. ⌜∀x∀x’∀x^1 ... ∀x^np⌝ ⌜∃x,x,x^1,...,x^np⌝ abr. ⌜∃x,∃x’∃x^1...∃x^nP⌝

Estas últimas dos definiciones serán utilizadas en nuestras pruebas sin necesidad de ser aducidas como menciones justificativas.

BIBLIOGRAFÍA

[A1] Peter Aczel, ***Non-well-Founded Sets***. Menlo Park (California): CSLI, 1988.

[A2] A.R. Anderson & N.D. Belnap, ***Entailment: The Logic of Relevance and Necessity***. Princeton University Press, 1975.

[A3] Ayda I. Arruda, «Panorama de la lógica paraconsistente», apud [M1], pp. 157-98.

[A4] Ayda I. Arruda, «Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic», apud [P17], pp. 99-130.

[B1] H.P. Barendregt, ***The Lambda Calculus***. Amsterdam: North-Holland, 1984 (2ª ed.).

[B2] Jon Barwise, ***The Situation in Logic***. Menlo Park (California): CSLI, 1989.

[B3] Diderik Batens, «Paraconsistent Extensional Propositional Logics», ***Logique et Analyse*** Nº 90-91 (1980), pp. 195-234.

[B4] Jon Barwise (ed.), ***Handbook of Mathematical Logic***. Amsterdam: North-Holland, 1977.

[C1] James van Cleve, «Why a Set Contains its Members Essentially», ***Noûs*** 19/4 (dic. 1985), pp. 585-602.

[C2] Charles S. Chihara, ***Ontology and the Vicious Circle Principle***. Ithaca: Cornell U.P., 1973.

[C3] Newton C.A. da Costa, «Nota sobre o conceito de contradição», ***Annuario da Sociedade Paranense de Matemática», 1958, pp. 6-8.***

[C4] Newton C.A. da Costa, «Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants», ***Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris***, T. 257 (1963), pp. 3790-3792.

[C5] Newton C.A. da Costa, «On the Theory of Inconsistent Formal Systems», ***Notre Dame Journal of Formal Logic***, XV/4 (1974), pp. 497-510.

[C6] Newton C.A. da Costa, ***Ensaio sobre os fundamentos da lógica***. São Paulo: Hucitec, 1980.

[C7] Newton C.A. da Costa, «Aspectos de la filosofía de la lógica de Lorenzo Peña», ***ARBOR***, Nº 520 (abril de 1989), pp. 9-32.

[C8] Haskell B. Curry, ***Foundations of Mathematical Logic***. Nueva York: Dover Publications, 1977 (2ª ed.)

[C9] Alonzo Church, ***Introduction to Mathematical Logic***, vol. 1. Princeton University Press, 1956.

[C10] William S. Cooper, ***Foundations of Logico-Linguistics***. Dorcrecht: Reidel, 1978.

[C11] C.C. Chang & Jerome Keisler, ***Model Theory***. Amsterdam: North-Holland, 2ª ed., 1977.

[F1] Frederic B. Fitch, ***Elements of Combinatory Logic***. New Haven: Yale University Press, 1974.

[F2] A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel & A. Levy, ***Foundations of Set Theory***. Amsterdam: North-Holland, 1973 (2ª ed.).

[G1] P.T. Geach, ***Logic Matters***. Oxford: Blackwell, 1972.

[G2] Kurt Gödel, «La lógica matemática de Russell» ap. ***Obras Completas***, Trad. J. Mosterín et al. Madrid: Alianza, 1981.

[G3] Paul Gochet & Pascal Gribomont, ***Logique: méthodes pour l'informatique fondamentale***. París: Hermès, 1990.

[G4] Nicola Grana, ***Logica paraconsistente***. Nápoles: Loffredo editore, 1983.

[G5] Richard E. Grandy, ***Advanced Logic for Applications***. Dordrecht: Reidel, 1977.

[H1] Susan Haack, ***Devian Logic***. Cambridge University P., 1974. (Hay trad. castellana, de la Ed. Paraninfo.)

[H2] A. Heyting, ***Introducción al intuicionismo*** (trad. Víctor S. de Zavala). Madrid: Tecnos, 1976.

[Kl] William Kneale & Martha Kneale, ***The Development of Logic***. Oxford: Clarendon, 1962. (Hay traducción castellana).

[K2] Stephen C. Kleene, ***Introducción a la metamatemática*** (trad. M. Garrido). Madrid: Tecnos, 1974.

[M1] Francisco Miró Quesada & Roque Carrión (comps.), ***Antología de la lógica en América Latina***. Madrid: Fundación del Banco Exterior, 1988.

[M2] José Manuel Méndez, «Systems with the Converse Ackermann Property», ***Theoria***, 1 (1985), pp. 253-8.

[M3] José Manuel Méndez, «Exhaustively Axiomatizing RMO with an Appropriate Extension of Anderson and Belnap's 'Strong and Natural List of Valid Entailments'» ***Theoria***, Nº 12-13 (1990), pp. 223-8.

[M4] José Manuel Méndez, «Una crítica inmanente de la lógica de la relevancia», ***Crítica***, Nº 18 (1986), pp. 61-94.

[M5] José Manuel Méndez, «Introducción a los conceptos fundamentales de la lógica de la relevancia» ***Arbor***, Nº 132 (1989), pp. 75-93.

[M6] C. Mortensen, «Every Quotient Algebra for C_1 is Trivial», ***Notre Dame Journal of Formal Logic***, vol XXI (1980), pp. 694-700.

[M7] Gr. C. Moisil, ***Essais sur les logiques non chrysippiennes***. Bucarest: Éditions de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, 1972.

[M8] Storrs McCall (ed.), ***Polish Logic: 1920-1939***. Oxford University Press, 1967.

[P1] Charles Parsons, «Some Remarks on Frege's Conception of Extension», ap. ***Studien zu Frege I: Logik und Philosophie der Mathematik***, ed. por M. Schirn. Stuttgart: Fromman V., 1976, pp. 265-78.

[P2] Lorenzo Peña, «Partial Truth, Fringes and Motion: Three Applications of a Contradictorial Logic». ***Studies in Soviet Thought***, vol 37 (Dordrecht: Kluwer, 1990), pp. 83-122.

[P3] Lorenzo Peña, «Contradictions and Paradigms: A Paraconsistent Approach», apud ***Cultural Relativism and Philosophy***, compilado por Marcelo Dascal. Peru (Ill.): Open Court (en prensa).

[P4] Lorenzo Peña, ***Fundamentos de ontología dialéctica***. Madrid: Siglo XXI, 1987. (véanse, en particular, las pp. 362ss., que contienen una exposición de la teoría de conjuntos ***Adu*** y discuten su significación filosófica.)

[P5] Lorenzo Peña, «Características técnicas y significación filosófica de un cálculo lambda libre», apud ***Lógica y filosofía del lenguaje***, compilado por S. Alvarez, F. Broncano & M.A. Quintanilla. Salamanca: Universidad de Salamanca, 1986, pp. 89-114.

[P6] Lorenzo Peña, «Contribución a la lógica de los comparativos», apud ***Lenguajes naturales y lenguajes formales II***, compilado por Carlos Martín Vide. Barcelona: Universitat de Barcelona, 1987, pp. 335-50.

[P7] Lorenzo Peña, «Dialectical Arguments, Matters of Degree, and Paraconsistent Logic», apud ***Argumentation: Perspectives and Approaches***, compilado por Frans H. van Eemeren et al.. Dordrecht: Foris Publications, 1987, pp. 426-33.

[P8] Lorenzo Peña, «La defendibilidad lógico-filosófica de teorías contradictorias», apud [M1], pp. 643-76.

[P9] Lorenzo Peña, «*Verum et ens conuertuntur*: The Identity between Truth and Existence within the Framework of a Contradictorial Modal Set-Theory», apud [P17], pp. 563-612.

[P10] Lorenzo Peña, «Algunos desarrollos recientes en la articulación de lógicas temporales», apud ***Lenguajes naturales y lenguajes formales IV.1***, compilado por Carlos Martin Vide. Barcelona: Universitat de Barcelona, 1989, pp. 413-39.

[P11] Lorenzo Peña, «Significación filosófica de la lógica transitiva», ***Ideas y Valores*** 63 (Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, dic. 1983), pp. 59-101.

[P12] Lorenzo Peña, «Identity, Fuzziness and Noncontradiction», ***Noûs*** 18/2 (mayo 1984), pp. 227-59.

[P13] Lorenzo Peña, «Un enfoque no-clásico de varias antinomias deónticas», ***Theoria*** 7-8-9 (San Sebastián: 1988), pp. 67-94.

[P14] Lorenzo Peña, «A Philosophical Justification of Many-Valued Extensions of Classical Logic», apud ***Philosophie et culture***, comp. por Venant Cauchy. Montreal: Éditions Montmorency, 1988, vol V, pp. 497-504.

[P15] Lorenzo Peña, «¿Lógica combinatoria o Teoría estándar de conjuntos?» ***ARBOR***, Nº 520 (abril de 1989), pp. 33-73.

[P16] Graham Priest, «The logic of paradox», ***Journal of philosophical logic***, vol. 8 (1979), pp. 219-41.

[P17] G. Priest, R. Routley & J. Norman (comps.), ***Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent***. Munich: Philosophia Verlag, 1989.

[Q1] W. V. Quine, «New Foundations for Mathematical Logic», ap. ***From a logical Point of View***. Harvard U.P., 1961 (2ª ed.).

[Q2] W.V. Quine, ***Mathematical Logic***. Harvard U.P., 1951 (2ª ed.).

[Q3] W.V. Quine, ***Set Theory and Its Logic***. Harvard U.P., 1969 (2ª ed.)

[Q4] W.V. Quine «Frege's Way Out», ap. ***Essays on Frege***, ed. por E.D. Klemke. Urbana: University of Illinois P., 1968, pp. 485-501.

[R1] Nicholas Rescher, ***Many-Valued Logic***. New York: McGraw Hill, 1969.

[R2] J. Barkley Rosser, ***Logic for Mathematicians*** (2ª ed.). New York: Chelsea, 1978.

[R3] Wolfgang Rautenberg, ***Klassische und nichtklassische Aussagenlogik***. Braunschweig-Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn, 1979.

[R3] Richard Routley, ***Exploring Meinong's Jungle and Beyond***. Canberra: Australian, National University, 1980. (Véanse esp. las pp. 893ss.)

[R4] Richard Routley, Val Plumwood, R.K. Meyer & Ross T. Brady, ***Relevant Logics and their Rivals***. Atascadero (California): Ridgeview, 1982.

[R5] Robert Rogers, ***Mathematical Logic and Formalized Theories***. Amsterdam: North-Holland, 1971.

[R6] Helena Rasiowa, ***An Algebraic Approach to Non-Classical Logics***. Amsterdam: North-Holland, 1974.

[S1] B. Sobociński, «Axiomatization of a Partial System of Three-Valued Calculus of Propositions», ***The Journal of Computing Systems***, vol. 1 (1952), pp. 23-35.

[S2] H.P. Smolenov, «Paraconsistency and some Prospects of Dialectical Logic»,apud ***Abstracts of the 7th International Congress of Logic***. Salzburgo: 1983, vol. 2, pp. 172-5.

[S3] Ravi Sethi, ***Programming Languages: Concepts and Constructs***. Reading (Mass.): Addison-Wesley, 1989.

[T1] Christian Thiel, «Gottlob Frege: Die Abstracktion», ap: Schirn (vide [P1]), pp. 243-64.

[T2] Christian Thiel, «Wahrheitswert und Wertverlauf». Ibid., pp. 287-300.

[T3] Mary Tiles, ***The Philosophy of Set Theory***. Londres: Blackwell, 1989.

[U1] Igor Urbas, ***On Brazilian Paraconsistent Logics***. Canberra: Australian National University, 1987 (tesis doctoral).

[W1] Hao Wang, ***From Mathematics to Philosophy***. Londres: Routledge & K.P., 1974.

[W2] Hao Wang, ***Beyond Analytic Philosophy***. Cambridge (Mass.): M.I.T. P., 1986.

[W3] A.N. Whitehead & Bertrand Russell, ***Principia Mathematica***. Cambridge U.P., 1962. (Ed. abreviada según la 2ª ed. de 1927).

[Z1] Lofti Zadeh *et alii*, ***Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes***. Nueva York: Academic Press, 1975.

ÍNDICE

abarque o abarcamiento 149 210, 223, 225, 228-231, 233, 234, 236-239, 243-245, 247, 251, 252, 257, 258

W. Ackermann 146, 317

Peter Aczel 258, 259, 316

afirmabilidad 26, 27, 57, 134-137, 187, 202

afirmable[s] con verdad 5, 6, 8, 14, 23, 25, 27, 73, 75, 89, 105, 131, 133-138, 172, 186, 187, 193, 238, 248, 284, 293

alcance 23, 113, 156-158, 164, 167, 190, 192, 280

alomorfo[s] 25, 47, 76, 154, 271 277

Elías H. Alves 268, 295

amenguante[s] 113, 121, 122, 123, 129

A. R. Anderson 44, 316, 317

antilogismo 69, 102

antinomia[s] 96, 211, 227, 279, 236, 286, 289, 290, 318

apencamiento 17, 44, 71-73, 125, 237, 260, 265

Léo Apostel 7

arel 242, 246, 250, 253

argumento transcendental 278, 279, 289

Ayda Ignez Arruda 238, 268, 269, 316

aspecto 12, 18, 45, 46, 76, 89, 90, 96, 105, 109, 121, 130-135, 137, 172, 186, 193, 231, 279, 292-294

aspectos de lo real 12, 18, 27, 105, 126, 130-133, 135-137, 139, 186, 193, 230, 231, 238, 239, 243, 245, 246, 252, 274, 279, 293, 294, 316

autoabarque 236, 257

axioma de reducibilidad 215-226

Alfred J. Ayer 7, 146

H. P. Barendregt 316

Jon Barwise 258, 259, 316

Diderik Batens 3, 268, 316

Nuel Belnap 44, 316, 317

G. Berkeley 193

bicondicional 73, 79, 80, 121, 144, 276, 287

bivalente[s] 11, 18, 142, 279, 280, 294

Boecio 48, 94, 95, 98, 101, 289

F. H. Bradley 149

R. Brandom 238, 239

Franz Brentano 7

Mario Bunge 49, 50

G. Cantor 207-209, 219-222, 225, 226, 232, 245, 251-253, 252, 253

cardinalidad 250-252, 257

Rudolf Carnap 7, 224, 228

caterva[s] 229-232, 239, 242, 243

Charles S. Chihara 221-223, 316

Roderick Chisholm 7

Alonzo Church 146, 210, 283, 316

círculo vicioso 212, 215

clasicismo 258, 274, 275

clasicista[s] 52, 61, 65, 95, 97, 148, 176, 257, 260, 270, 272, 288

combinador[es] 235, 236, 253

combinatoria, combinatorio 3, 208, 233, 235-237, 238, 239, 242-244, 246, 249, 247, 318

complemento 253, 278, 279

concatenaciones 235

conexivismo 94, 96, 97, 289

conexivista[s] 48, 51, 95-99, 289

conjunto universal 7, 8, 49, 52, 55, 58, 78, 82, 97, 132, 133, 141, 148, 166, 187, 201, 207, 209, 211, 212, 215-217, 219-221, 223-230, 232-234, 236, 238, 239, 238, 239, 248, 253, 257-259, 266, 269-271, 283, 284, 291, 294, 295, 296

constrictiva[s], constrictivo[s] 105, 113, 121-3

constructiva, constructivo 146, 211, 214, 215

constructividad 215

continuidad 215

contradictorial 17, 65, 98, 99, 114, 139-141, 238, 257, 260, 261, 264-266, 272, 280, 286, 288, 290, 318

contradictoriales 261, 262, 264, 268, 294

William S. Cooper 48, 96, 317

copulativo 236, 238, 268

corchete[s] 160, 191, 239, 240

Cornubia [principio de] 15, 61, 62, 71, 91, 140, 148, 237, 267, 272, 273, 281, 283, 285, 286

corrillo[s] 229-232, 239

Newton C.A. da Costa 3, 12, 14, 55, 66, 91, 100, 140, 141, 238, 265, 268, 271, 272, 274-276, 277-283, 285-287, 291, 292, 294, 295, 316

Crisipo 48, 95

cuantificador existencial 154, 157, 165, 168, 170, 172-174, 176, 178, 194, 211, 224

cuantificador universal 154-158, 161, 164, 165, 168, 171-174, 178, 183, 191, 193, 194, 198, 211, 290, 291

Haskell B. Curry 238, 281, 282, 316

Nicolás de Cusa 15

Ítala d'Ottaviano 141, 268

Dedekind 209, 215

deductiva 76, 86, 271, 290

deductivo 27, 89, 176, 182, 192, 198, 271

leyes de DeMorgan 50, 114, 140, 146, 237, 265, 274, 276, 277, 281, 286, 287, 289

descripciones definidas 216, 223, 224, 228, 229

cúmulos desfondado[s] 125, 126, 257-259

designados 11, 91, 97, 125, 126, 141, 142, 144, 147

desnivelamiento categorial 210-212, 218, 220

determinaciones 237-239, 246, 249, 290

difusa[s], difuso[s] 4, 16, 17, 61, 62, 99, 101, 109, 125, 235, 237, 259, 264-5, 288-9, 292

distributiva, distributivo 72, 110, 125, 154 247, 291

distributividad 57, 120, 121, 264

Michael Dummett 7, 51, 90, 146, 165, 166, 260

e falso quodlibet 62, 148, 273, 281

e prorsus falso quodlibet 45, 62, 96

El ente y su ser 187, 224, 228

elementaridad 232-234

en todos los aspectos 9, 18, 25, 27, 65, 105, 123, 126, 129-133, 135-137, 143, 170, 186, 193, 227, 230, 231, 234, 238, 239, 243-245, 250, 259, 265, 274, 283, 285, 293

Federico Engels 7

englobamiento 143-145, 148, 149

equivalencia 14, 18, 23, 25, 31, 34, 68, 69, 76, 79, 83, 85, 90-92, 94, 97, 98, 101, 102, 103, 110, 121, 123, 128, 129, 143, 148, 158, 165-7, 168, 174, 177, 227, 237, 264, 274, 276, 277, 282, 285, 287, 289, 292, 295

equivalente[s] 18, 45, 52, 66, 68, 75, 76, 78, 90, 92-94, 98-101, 105, 114, 120, 125, 129, 131, 153, 157, 158, 192, 198, 222, 225, 236, 239, 250, 252, 257, 266, 270, 273, 274, 280, 283, 285, 288-290, 292-3

Juan Duns Escoto 15, 61, 261, 267

extensionalidad 216, 217, 222, 225, 227, 231, 238, 273

Frederic Fitch 226, 236, 237, 242, 246, 253, 317

fórmula 258

A.A. Fraenkel 207, 208, 226, 245, 317

Gottlob Frege 1, 7, 15, 153, 154, 207-213, 216-220, 224, 227-230, 232, 245-247, 253, 283, 317, 319

functor[es] afirmativo[s] 105, 113, 121, 122, 129, 144, 272

Peter Geach 46, 192, 193, 227, 317

Paul Gochet 317

Goldbach 249

Ferdinand Gonseth 7, 208

grados de realidad 17

grados de verdad 16, 52, 65, 73, 90, 91, 97, 125, 130, 131, 134, 147, 174, 176, 187, 260, 265, 270, 278-280, 288, 290-292

gradual[es] 99, 109, 237, 264, 277, 281, 288, 289

gradualidad 14, 16, 62, 65, 109, 147, 230, 260, 265, 278, 279, 289, 291

gradualismo 260

gradualista[s] 17, 65, 148, 245, 260, 265, 266, 270, 280, 288

Nicola Grana 269, 317

Susan Haack 146, 317

Gilbert Harman 7

Katalin Havas 3

Hegel 12, 18, 98, 100, 149, 264

A. Heyting 7, 50, 51, 65, 66, 90, 91, 93, 139, 146, 147, 165, 260, 317

David Hilbert 7, 146

Edmundo Husserl 7, 207, 208

idealismo 90, 147, 166, 214

idealista 7, 51, 90, 146, 166, 193, 208, 211, 260

idempotencia 97, 116, 121, 227, 289

idempotente 116, 291

implicacional[es] 48, 65, 83, 87, 89, 90, 98, 101-103, 110, 121, 145, 164, 168, 171, 172, 174-176, 178, 182, 183, 191, 273, 275, 286, 289

implicaciones 105, 113

implicativa[s], implicativo[s] 89, 100, 101, 164, 285

impredicatividad 212, 215, 222, 223, 225

impredicativo, impredicativa 215, 219, 221-225

inferencia 1, 5, 8, 9, 11-14, 18, 26-28, 30, 31, 36, 46, 48, 49, 51, 55, 57, 58, 70, 72-74, 76, 80, 82, 83, 86, 96, 101, 120, 129, 130, 134-136, 139-141, 143, 148, 149, 153, 161, 162, 166, 174, 176, 182, 184, 185, 187, 190-192, 198, 199, 201-203, 235, 239, 242, 254, 266, 271, 275, 276, 282, 284, 293, 295, 296, 313

inferir 5, 8, 15, 17, 27, 46, 50, 58, 73, 96, 135, 136, 187, 193, 200

infiltradizo 239, 242

infinitesimal 117, 123, 131, 176, 264, 291

infinitesimalmente 14, 17, 23, 25, 117, 123, 125-129, 131, 155, 164, 175, 187, 188, 230, 292, 293

intercambiable[s] 140, 235, 274

intuicionismo 65, 90, 91, 146, 147, 165, 166, 260, 269, 277, 317

intuicionistas 7, 8, 14, 50, 51, 52, 55, 59, 66, 90, 146-7, 166, 167, 176, 237, 257, 260, 269, 277, 294

involutividad 114, 154, 157, 158, 237, 265, 276, 287, 289

Stanislaw Jaśkowski 262, 267, 268

Stephen Kleene 114, 263, 274, 277, 317

Saul Kripke 7, 215, 229, 273, 293

cálculo lambda 236, 240, 316, 318

Henri Lauener 3

Keith Lehrer 7

Leibniz 9, 16, 244, 246

lema de Zorn 252

ley de Peirce 66, 102, 125, 260

leyes de paso 114, 132, 146, 173, 237, 253, 265, 277, 281, 286

Manuel Liz 3

J. Łukasiewicz 50, 59, 66, 90, 91, 93, 95, 125, 147, 148, 259, 260, 291

matices 12, 15, 52, 270, 291, 292, 295

matrices características 142, 143, 148, 158, 159, 191

Storrs McCall 48, 95-97, 317

metateorema[s] 57-59, 78, 82, 83, 85, 94, 129, 130, 135, 136, 139, 143-145, 148, 149, 174, 199, 201-203, 269

R. K. Meyer 44, 268, 296, 319

minimalismo 14

modus ponens 14, 26, 35, 57, 73, 74, 76, 78, 96, 141, 143, 200, 202, 224, 242

modus tollens 96, 224, 284

Raymundo Morado 3

entes morigerado[s] 242, 249, 250, 252

Chris Mortensen 268, 286, 317

multivalente[s] 11, 50, 55, 65, 66, 90, 93, 96, 97, 239, 260, 279, 292

mundo de la experiencia cotidiana 133, 252, 293

mundo[s] posible[s] 132-134, 273, 293, 296

E. Nagel 7

negacional 273

negaciones 17, 65, 90, 96, 98, 136, 137, 158, 237, 238, 259, 266, 272, 276, 279, 285, 288

Raúl Orayen 3

paraconsistencia 139, 269, 272, 294

paraconsistente[s] 3, 4, 91, 140, 141, 208, 227, 235, 237, 262, 267-271, 281-285, 286, 288, 290, 291, 292, 294, 316, 317

paradoja[s] 17, 101, 208, 209, 212, 215, 219-221, 223, 224, 233, 234, 238, 239, 238, 239, 258, 264, 265, 281, 282, 283

W. I. Parry 48

Charles Parsons 209, 317

Charles S. Peirce 66, 102, 125, 260

Alvin Plantinga 7

predicatividad 214, 216, 224, 227

predicativa[s], predicativo[s] 210, 212, 214, 216, 217, 219, 221, 222, 223, 225, 226

prefijo del cuantificador 156, 202

Graham Priest 3, 14, 268, 318

principio de Boecio 94, 95, 98

principio de contraejemplo 93, 274

principio de distributividad 264

principio de elementaridad 232-234

principio de extensionalidad 216, 217, 222, 225, 227, 238

principio de Heráclito 89-91, 94, 98, 99, 101

proficuo 61, 139-141

Hilary Putnam 7

Willard V. Quine 1-3, 7, 15, 208, 210, 211, 216, 219, 224, 225, 227-230, 232, 234, 235, 239, 247, 252, 253, 257, 319

A. Raggio 268

Helena Rasiowa 146, 319

realismo 51, 147, 207, 211, 221

realista[s] 51, 147, 166, 167, 208, 266

reducibilidad 215-226, 292

regla de afirmabilidad 5, 8, 12, 15, 17, 18, 26-28, 30, 31, 36, 46, 48-52, 57, 64, 71-74, 76, 80, 82, 86, 96, 120, 129, 134-137, 140, 141, 143, 149, 161, 162, 174, 184, 187, 198, 199, 201, 202, 237, 238, 242, 248, 254, 260, 264, 267, 274, 277, 280-283, 285, 293-295

reglas de inferencia 1, 5, 11-14, 18, 26-28, 46, 55, 57, 58, 70, 72, 74, 80, 83, 101, 130, 139-141, 148, 153, 161, 162, 166, 182, 187, 190-192, 235, 239, 242, 275, 276, 295, 296, 313

H. Reichenbach 7

relativismo 208

relevancia 317

relevante[s] 44, 50, 51, 55, 69, 89, 91, 93, 140, 141, 176, 238, 268, 269, 271-275, 281-285, 294, 295

relevantismo 45, 97, 271, 272, 274-276, 281, 289

relevantista 14, 44-46, 50-2, 59, 63, 65-66, 89, 91, 97, 268, 271-275, 281-285, 287, 288, 291, 295

Nicholas Rescher 7, 11, 137, 143, 146, 208, 215, 238, 239, 238, 239, 260, 319

José Antonio Robles 49

J. B. Rosser 250, 252, 253, 293, 319

Richard Routley (véase Richard Sylvan)

Bertrand Russell 7, 15, 207-210, 209-212, 214-219, 221, 222, 224-227, 230, 236, 239, 246, 247, 253, 317, 319

Francisco Salto Alemany 3

saludable 274

Ravi Sethi 319

silogismo 59, 64, 68, 69, 71, 91, 101, 237, 261, 281, 287

Jristo Smolenov 268, 269, 319

B. Sobociński 267, 268, 319

Spinoza 45, 149

R. Stalnaker 55, 66, 102, 103

P. F. Strawson 48, 50

subconjunto 132, 220, 221, 235, 273

supercontradicciones 110, 245, 263, 282

supercontradictorio[s], supercontradictoria[s] 71, 114, 126, 169

superconyuntivo 117

Richard Sylvan [=Richard Routley] 3, 44, 45, 52, 65, 238, 268, 271-274, 276, 281, 287, 292, 294-296, 318, 319 tensorial 293, 294

teorema de Cantor 209, 220, 222, 225, 226, 251-253

tercio excluso 8, 14, 17, 44, 50, 51, 55, 66, 71, 74, 89, 91, 93, 105, 110, 114, 125, 133, 134, 136, 137, 140, 146, 236, 237, 254, 260, 265, 266, 274, 275, 276, 277, 286-288

Christian Thiel 211, 319

tope 113, 174, 175, 187, 278-281

uerum e quolibet 46, 49-52, 59, 96, 102, 103, 268, 272, 281

umbral 109, 110, 113, 122, 187, 290, 292

uniforme 35, 36, 122, 123, 192

Igor Urbas 3, 286, 319

James van Cleve 316

variable ligada 143, 153-162, 164, 168, 170, 172-175, 187, 190-192, 194-196, 197-202, 209, 211, 213, 217-219, 221-223, 227, 231-233, 240, 241, 248, 262, 283, 312

variables libres 161, 192, 241

verifuncional 18, 45, 96, 142, 289, 294, 295

verifuncionalidad 18

G. H. von Wright 46

Hao Wang 208, 212, 214, 226, 232, 234, 319

A. N. Whitehead 209, 219, 222, 225, 226, 247, 319

Lofti Zadeh 125, 259, 260, 319

E. Zermelo 207, 208, 210, 228, 245